

Musterbildung in ökologischen Systemen - Vegetationsmuster

Zwischenpräsentation NiMoNa
Arbeitsgruppe theoretische Physik
Markus Wilczek, Svetlana Gurevich

C. Amrhein, C. Teschers, F. Sandfort

3. Juli 2014

Inhaltsverzeichnis

- 1 Motivation
- 2 Lösungsverfahren
 - Runge-Kutta-Verfahren
 - Pseudo-Spektralverfahren
- 3 Mathematische Modellierung & Simulation
 - Fisher-Gleichung
 - Modellgleichung
- 4 Ausblick

Motivation

- 1 Motivation
- 2 Lösungsverfahren
- 3 Mathematische Modellierung & Simulation
- 4 Ausblick

Lösungsverfahren

- 1 Motivation
- 2 Lösungsverfahren
 - Runge-Kutta-Verfahren
 - Pseudo-Spektralverfahren
- 3 Mathematische Modellierung & Simulation
- 4 Ausblick

Runge-Kutta-Verfahren

Anfangswertaufgabe

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = f(t, x(t)) \quad (1)$$

Euler-Verfahren

$$x(t+h) = x(t) + h \cdot f(t, x(t)) \quad (2)$$

Runge-Kutta-Verfahren der Stufe n

$$k_i = x(t) + h \cdot \sum_{j=1}^i a_{ij} f(t + c_j \cdot h, k_j) \quad 1 \leq i \leq n \quad (3)$$

$$x(t+h) = x(t) + h \cdot \sum_{i=1}^n b_i f(t + c_i \cdot h, k_i) \quad (4)$$

Runge-Kutta-Verfahren

Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^t \end{array} \quad (5)$$

Klassisches Runge-Kutta Verfahren der Ordnung 4

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \quad (6)$$

Fouriertransformation

Fouriertransformation

für hinreichend glatte Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, L Normierungsfaktor

$$F(f)(\xi) = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-i\xi x} dx \quad (7)$$

Ableitung

Besonderheit:

$$F\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(\xi) = i \cdot \xi \cdot F(f)(\xi) \quad (8)$$

Rücktransformation

$$F^{-1}(\tilde{f})(x) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (9)$$

Pseudo-Spektralverfahren

Diskretisierung

$$\int_a^b \rightarrow \sum_{i=1}^N \quad (10)$$

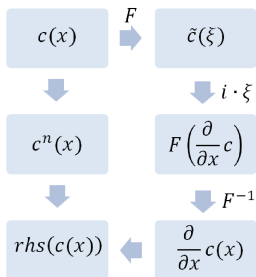


Abbildung: Pseudo-Spektralverfahren

Mathematische Modellierung & Simulation

- 1 Motivation
- 2 Lösungsverfahren
- 3 Mathematische Modellierung & Simulation**
 - Fisher-Gleichung
 - Modellgleichung
- 4 Ausblick

Modellgleichung

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{GW}{1+SW}N - CN^2 - MN + D_n \nabla^2 N \quad (11)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = P - I(1 - RN)W - FW^2N + D_w \nabla^2 (W - BN) \quad (12)$$

N	Biomasse	W	Wassermenge
$\frac{GW}{1+SW}N$	Pflanzenwachstum	P	Niederschlag
$-CN^2$	Sättigung	$-I(1 - RN)W$	Verdampfung
$-MN$	Sterblichkeit	$-FW^2N$	Wasserverbrauch
$D_n \nabla^2 N$	Diffusion	$D_w \nabla^2 (W - BN)$	Diffusion

Fisher-Gleichung

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \left(\frac{G}{S} - M\right)N - CN^2 + D_n \nabla^2 N \quad (13)$$

Beschreibung

Unendlich Wasser \rightarrow Vereinfachung der DGL

Analyse

Lösung der stationären, homogenen Gleichung liefert Fixpunkte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} = 0 \quad \wedge \quad \nabla^2 N = 0 \\ \Rightarrow N_1 = 0 \quad \vee \quad N_2 = \frac{\frac{G}{S} - M}{C} \end{aligned}$$

Stabilitätsanalyse liefert, dass N_1 instabil und N_2 stabil ist.

Simulation in 1D

Simulation in 2D

Modellgleichung

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{GW}{1 + SW} N - CN^2 - MN + D_n \nabla^2 N \quad (14)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = P - I(1 - RN)W - FW^2N + D_w \nabla^2 (W - BN) \quad (15)$$

Beschreibung

- Realistische Parameterwerte aus wissenschaftlichen Untersuchungen
- Kontrollparameter P (konstanter Niederschlag) wird variiert

Analyse

- Bestimmte Werte von P liefern zwei stabile Fixpunkte

Simulation des Pflanzenwachstums für $P = 115 \frac{\text{kg}}{\text{yr} \cdot \text{m}^2}$

Simulation des Pflanzenwachstums für $P = 160 \frac{\text{kg}}{\text{yr} \cdot \text{m}^2}$

Simulation des Pflanzenwachstums für $P = 256 \frac{\text{kg}}{\text{yr} \cdot \text{m}^2}$

Ausblick

- 1 Motivation
- 2 Lösungsverfahren
- 3 Mathematische Modellierung & Simulation
- 4 Ausblick**

Ausblick

- Quantitative Untersuchung der auftretenden Muster
- Anpassung des Algorithmus
- Erweiterung des Modells um weitere Parameter
 - Regenzeiten
 - Geländebeschaffenheit
 - ...
- Landwirtschaftliche Nutzung in semiariden Gebieten
 - Bewässerungsstrategien
 - Konzeption von Plantagen anhand von simulierten Mustern

Literaturverzeichnis



Ehud Meron, Erez Gilad, Jost von Hardenberg, Moshe Shachak, and Yair Zarmi.

Vegetation patterns along a rainfall gradient.

Chaos, Solitons & Fractals, 19(2):367 – 376, 2004.

Fractals in Geophysics.