Modellierung eines Tumorwachstums

Ausbreitung der Nährstoffkonzentration modelliert durch partielle Differentialgleichungen

Patricia Friele, Nadja Moeller, Leonie Zeune

Westfälische Wilhelms-Universität Münster - Fachbereich 10 + 12

12. Juni 2012

WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Biologischer Hintergrund

Wachstum ist durch die Aufnahme von Nährstoffen bestimmt:

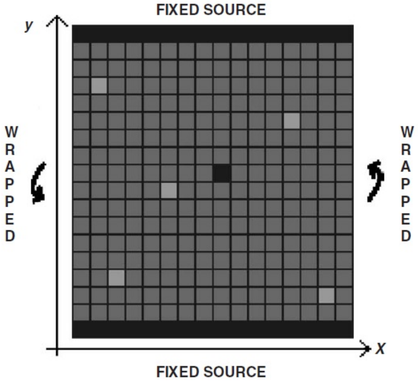
$\rightarrow$ beeinflussen die radiale, symmetrische Ausbreitung des Tumors.

Tumor hat 3 verschiedene Schichten:

- sich teilende Zellen (gute Aufnahmemöglichkeit von Nährstoffen)
- innere, sich nicht teilende Zellen (weniger gute Aufnahmemöglichkeit)
- zentraler Kern mit abgestorbenen Zellen (keine Aufnahmemöglichkeit mehr)

Modellierung

Modellierung des Tumorwachstums und der Nähstoffkonzentration mit Hilfe eines Zellulären Automats



Quelle: Mallet, D. G. und De Pillis, L. G., 'A cellular automata model of tumor-immune system interactions.' J. Theor. Biol. 239, 334–350 (2006).

Modellierung

$$\frac{\delta N}{\delta t} = D_N \nabla^2 N - kHN - \lambda_N kTN - kIN$$
$$\frac{\delta M}{\delta t} = D_M \nabla^2 M - kHM - \lambda_M kTM - kIM$$

N und M: verschiedene Nährstoffkonzentrationen
H: Anzahl der gesunden Zellen
T: Anzahl der Tumorzellen
I: Anzahl der Immunzellen
D_N und D_M: Diffusionskoeffizienten
Zur Vereinfachung setzen wir: $D_M = D_N = D$

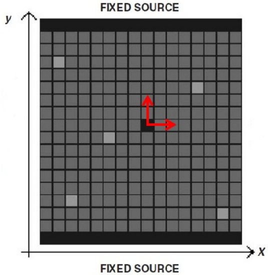
Modellierung

Zusammenfassung der beiden Diffusionsgleichungen zu einer:

$$\frac{\delta u}{\delta t} = D\Delta u - F(H, T, I) \cdot u$$

$\rightarrow$ Aufteilung der Diffusion in x- und y-Richtung

- $u(t) \mapsto u(t + \frac{\Delta t}{2})$ in x-Richtung
- $u(t + \frac{\Delta t}{2}) \mapsto u(t + \Delta t)$ in y-Richtung



Explizite oder implizite Modellierung?

Setze zunächst

$$u_{i,j}^n = u(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$$

$\rightarrow$ wir wählen die implizite Modellierung:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = D(\frac{u_{i-1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j}^{n+1}}{\Delta y^2}) - F^n u_{i,j}^{n+1}$$

mit $u_{m+1,j}^n = u_{0,j}^n = 1$.

Ergebnis

Startkonzentration konstant 0, Diffusionskoeffizient 0.25

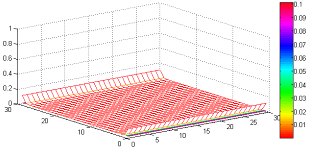


Abbildung: 1 Iteration

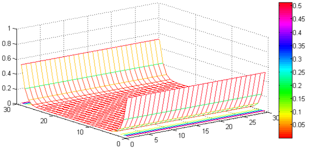


Abbildung: 10 Iterationen

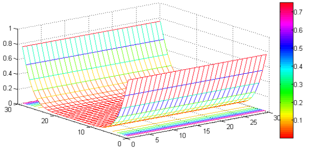


Abbildung: 40 Iterationen

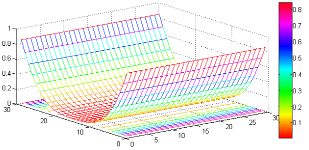


Abbildung: 100 Iterationen

Ergebnis

Startkonzentration konstant 0, 1 Tumorzelle, sonst Immun- oder Hostzellen, Diffusionskoeffizient 0.25, $k = 0.25$, $\lambda_N = \lambda_M = 50$

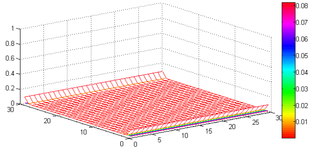


Abbildung: 1 Iteration

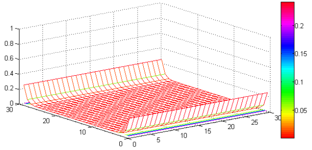


Abbildung: 10 Iterationen

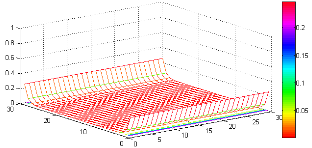


Abbildung: 40 Iterationen

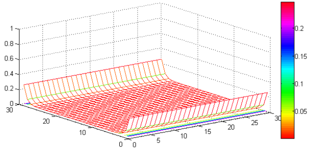


Abbildung: 100 Iterationen

Ergebnis

Startkonzentration konstant 0.25, 1 Tumorzelle, sonst Immun- oder Hostzellen, Diffusionskoeffizient 0.25, $k = 0.25$, $\lambda_N = \lambda_M = 50$

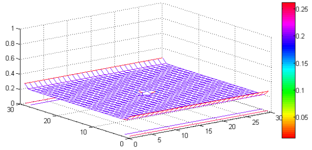


Abbildung: 1 Iteration

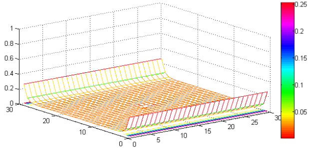


Abbildung: 10 Iterationen

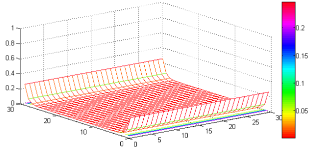


Abbildung: 40 Iterationen

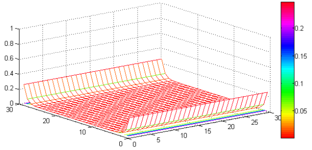


Abbildung: 100 Iterationen

Ausblick

- Stationäre Lösung, d.h. Lösung der Gleichung

$$\frac{\delta u}{\delta t} = D\Delta u - F(H, T, I) \cdot u = 0$$

  berechnen und diese als Ausgangssituation verwenden

- Koppelung mit den Ergebnissen der anderen Gruppe

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!