Übungen zur Vorlesung Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 11, Abgabe: Montag, 19. Januar 2015, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Bestimmen Sie, abhängig von θ, die Konsistenzordnung der Theta–Verfahren. Nehmen Sie an, dass die Ordnung des benutzten Diskretisierungsverfahrens im Ort mindestens zwei ist.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u + f$$

mit Randwert 0 und Anfangswert u_0. Es sei f Lipschitz–stetig bezüglich der ersten Variablen mit einer von t unabhängigen Lipschitzkonstante. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass für $dt < \epsilon$ die diskreten Gleichungen des (impliziten) θ–Verfahrens genau eine Lösung besitzen.

Aufgabe 3 (Programmieraufgabe): (8 Punkte)
Wir betrachten auf $\mathbb{R}$ die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx},\ u(x,0) = u_0(x),\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

Weiter gelte

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, \ \pi/4 \le x \le 3\pi/4 \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Lösen Sie die Gleichung analytisch. Lösen Sie die Gleichung numerisch mit θ–Verfahren und unterschiedlichen Werten für θ. Lösen Sie die impliziten Gleichungen mit einem geeigneten Verfahren. Vergleichen Sie die Lösungen. Testen Sie die Stabilitätsbedingung. Was passiert für die global stabilen Verfahren, wenn man dt zu groß wählt (siehe Aufgabe 2)?