Übungen zur Vorlesung Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 10, Abgabe: Montag, 5. Januar 2014, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei E ein Dreieck. Eine Quadraturformel

$$\widetilde{I} = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)$$

für das Integral

$$I = \int_E f(x)\mathrm{dx}$$

heißt von der Klasse $\mathcal{P}_k$, wenn die Polynome vom Grad $\leq k$ durch die Formel exakt integriert werden. Bestätigen Sie Teil 1 und 2 der folgenden Aussagen über Quadraturformeln. Hinweis: Es reicht, wenn Sie die Aussage für das Einheitsdreieck beweisen (alle anderen Dreiecke lassen sich durch affine Abbildungen erzeugen). Alternativ können Sie baryzentrische Koordinaten benutzen.

1. $n = 1$, $a_1 = 1$, $\alpha = |E|$, x_1 ist Mittelpunkt von E: Klasse $\mathcal{P}_1$
2. $n = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $\alpha = |E|/3$, x_k ist Seitenmittelpunkt von E: Klasse $\mathcal{P}_2$
3. $n = 7$, $a_1 = 27$, $a_2 = a_3 = a_4 = 3$, $a_5 = a_6 = a_7 = 8$, $\alpha = |E|/60$, x_1 ist Mittelpunkt von E, x_2, x_3, x_4 sind Ecken von E, x_5, x_6, x_7 sind Seitenmittelpunkte von E: Klasse $\mathcal{P}_3$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Es sei B eine koerzive, stetige Bilinearform auf dem Vektorraum V und f ein lineares Funktional auf V. Weiter sei V_h ein endlichdimensionaler Teilraum von V. B_h sei koerzive stetige Bilinearform auf V_h, f_h sei lineares Funktional auf V_h. Diese könnten zum Beispiel aus B und f entstanden sein durch Quadraturformeln, es gilt aber im allgemeinen nicht $B = B_h$ bzw. $f = f_h$ auf V_h. Die Bilinearformen B_h seien gleichmäßig koerziv, d.h.

$$\exists \widetilde{\alpha} > 0 \; \forall h > 0 : \; B_h(v, v) \geq \widetilde{\alpha}||v||^2 \, \forall v \in V_h.$$

Es seien u und u_h die Lösungen der zugehörigen Variationsgleichungen, also

$$B(u, v) = f(v) \, \forall \, v \in V$$
$$B_h(u_h, v) = f_h(v) \, \forall v \in V_h.$$

Zeigen Sie: Es gibt eine Konstante C unabhängig von h, so dass

$$||u - u_h|| \leq C(\inf_{v \in V_h} \left(||u - v|| + \sup_{\substack{w \in V_h \\ ||w||=1}} |B(v, w) - B_h(v, w)| \right) + \sup_{\substack{w \in V_h \\ ||w||=1}} |f(w) - f_h(w)|.$$

Hinweis: Schätzen Sie zunächst $||u_h - v||^2$ für $v \in V_h$ mit der Koerzivität ab.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
(Nicht–konforme Methoden)
Es sei B eine stetige, koerzive Bilinearform auf einem Hilbertraum V und f ein stetiges Funktional (wie oben), und u die Lösung der zugehörigen Variationsgleichung. Es gelte $V \subset W_h$, W_h Hilbertraum. V_h sei ein endlich–dimensionaler Unterraum von W_h (aber nicht notwendig von V). Es sei $Y_h := V + V_h$. $|| \cdot ||_h$ sei eine Norm auf Y_h.
f sei sogar definiert und stetig auf Y_h. B_h sei eine bzgl. h gleichmäßig stetige koerzive Bilinearform auf Y_h, d.h.

$$\exists\, \alpha,\, C > 0\, \forall h : |B_h(v,w)| \leq M||v||_h||w||_h,\ B_h(w,w) \geq \alpha ||w||_h^2\, \forall v, w \in Y_h.$$

Dann heißt die Lösung $u_h \in V_h$ der Variationsgleichung

$$B_h(u_h, v) = f(v)\, \forall v \in V_h$$

nichtkonforme Galerkin–Näherung.
Zeigen Sie: u_h ist eindeutig bestimmt, und es gilt

$$||u - u_h||_h \leq (1 + \frac{M}{\alpha}) \min_{v \in V_h} ||u - v||_h + \frac{1}{\alpha} \sup_{\substack{w \in Y_h \\ ||w||_h = 1}} |f(w) - B_h(u,w)|.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Auf der Homepage der Vorlesung finden Sie ein einfaches Finite Elemente–Programm für lineare Dreiecke. Exportieren Sie die Triangulierung des Weihnachtsbaums aus der Nikolausaufgabe und lesen Sie sie in das Programm ein. Lassen Sie Steifigkeitsmatrix und Lastvektor berechnen. Lösen Sie das entstehende Gleichungssystem direkt, durch Matrixinversion, mit dem cg–Verfahren, mit anderen iterativen Verfahren, und vergleichen Sie die Rechenzeiten.