Übungen zur Vorlesung Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 9, Abgabe: Montag, 15. Dezember 2014, 12.00 Uhr

Zu lösen sei auf dem Einheitsquadrat $[0,1]^2$ die homogene Dirichlet–Aufgabe

$$div(\sigma(x)\nabla u) + c(x)u = f(x)$$

mit $\sigma(x) > 0$, $c(x) \geq 0$.

Aufgabe 1: (8 Punkte)
Wählen Sie zur Lösung mit der Finite–Elemente–Methode achsenparallele bilineare rechteckige Elemente und eine geeignete quasiuniforme Triangulierung. Geben Sie die lokalen und globalen Formfunktionen an. Geben Sie für $\sigma = 1$, $c = 0$ und quadratische Grundgebiete die Systemmatrix (Steifigkeitsmtrix) und die rechte Seite konkret an. Die Systemmatrix entspricht der Finite Differenzen–Diskretisierung mit einem klassischen Differenzenstern. Mit welchem?
Für die Integration auf der rechten Seite ersetzen Sie, wie bei den klassischen Newton–Cotes–Formeln, die Integration über f durch die Integration über Pf, hierbei ist P der globale Interpolationsoperator.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Tun Sie das Gleiche für dreieckig lineare Lagrange–Elemente.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Schreiben Sie ein Programm, das die Lösung der Aufgabe für $\sigma = 1$, $c = 0$ und beliebige Grundflächen berechnet mit Hilfe von dreieckigen Lagrange–Elementen.
Hinweis: Nehmen Sie als Beispiel den Einheitskreis. Benutzen Sie zunächst die PDE–Toolbox von Matlab, zeichnen Sie den Kreis, führen Sie die Triangulierung dort durch und exportieren Sie den erzeugten Mesh. Nutzen Sie dann diese Gitterdefinition zur Konstruktion der Systemmatrix und der rechten Seite. Benutzen Sie zur Approximation der auftretenden Integrale die Auswertungen in den Ecken. Nutzen Sie die Meshing–Funktionen von Matlab zum Plotten der Ergebnisse. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen der Finite Elemente–Toolbox.