# Übungen zur Vorlesung Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 5, Abgabe: Montag, 18. November 2014, 12.00 Uhr

---

**Aufgabe 1:** (4 Punkte)
Es sei $f \in H^k$, und es sei $D^\alpha = 0$ für alle Multiindizes $\alpha$ mit $|\alpha| = k$. Zeigen Sie: Dann ist $f$ lokal ein Polynom vom Grad $\leq k-1$ (d.h. auf jeder Zusammenhangskomponente von $f$).

Hinweis: Zeigen Sie den Satz zunächst für $f \in C^\infty$, und betrachten Sie dann die Funktionen $w_\epsilon * f$.

**Aufgabe 2:** (4 Punkte)
Zeigen Sie: Die in der Vorlesung definierten Normen $||\cdot||'$ und $||\cdot||''$ auf $W^{k,p}$ sind äquivalent zu $||\cdot||$.

**Aufgabe 3:** (4 Punkte)
Für welche $s > 0$ sind die folgenden Funktionen in $H^s(\Omega)$:

1. $\Omega = [-2, 2]$, $f(x) := sgn(x)x^2$.
2. $\Omega = [-2, 2]$, $f(x) := ||x||^{1/2}$.
3. $\Omega = [-2, 2]^2$, $f(x) := \max(0, 1 - ||x||^2)$.

**Aufgabe 4:** (4 Punkte)
Es sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x||_2^2 < 1/2\}$. Stellen Sie fest, ob

$$f : \Omega \mapsto \mathbb{R},\ f(x) := \left(\log\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right)\right)^k,\ k < \frac{1}{2}$$

in $H^1(\Omega)$ liegt. Hinweis: Betrachten Sie die Ableitungen von $f$ in Polarkoordinaten.