Übungen zur Vorlesung Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 3, Abgabe: Montag, 4. November 2014, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare 2π–periodische Funktion. Wir betrachten die Norm

$$||f|| = \left(\int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

Weiter gelte

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0.$$

Bestimmen Sie eine Konstante C, so dass

$$||f|| \leq C||f'||.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Es sei $\sigma \in C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$-div(\sigma \nabla u) = f.$$

Geben Sie zwei konsistente Diskretisierungen auf äquidistanten Gittern an, die durch zweimalige Anwendung von D^+ bzw. D^c entstehen. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung. Nehmen Sie dazu an, dass auch u ausreichend häufig differenzierbar ist.

Hinweis: Man tut sich leicht, wenn man die Taylorentwicklung Maple oder Mathematica überlässt.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Geben Sie eine Diskretisierung der Laplacegleichung $-\Delta u = 0$ im $\mathbb{R}^2$ an, die von vierter Ordnung ist. Sie dürfen einen 9–Punkte–Stern verwenden, der die direkten und die diagonalen Nachbarn jedes Punktes enthält.

Hinweis: Der Differenzenstern kann symmetrisch über alle Spiegelachsen gewählt werden. Überlassen Sie den Nachweis der Konsistenzordnung wieder einem Algebraprogramm, falls gewünscht.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe): (4 Punkte)

Schreiben Sie ein Programm zur Lösung der Poissongleichung für Dirichlet–Randbedingungen mit Hilfe von finiten Differenzen auf $[0,1]^2$. Nutzen Sie einmal den konsistenten und stabilen 5–Punkt–Stern aus der Vorlesung, und einmal den folgenden, der ebenfalls die Konsistenzordnung 2 besitzt:

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Wählen Sie als Beispiel $f = 1$ mit homogenen Dirichlet–Randbedingungen und einige Werte für die Gitterbreite h. Was beobachten Sie? Erklären Sie das Ergebnis.