Dr. Frank Wübbeling WS 13/14

Übungen zur Vorlesung Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 2, Abgabe: Montag, 27. 10. 2014, 12.00 Uhr

Übungstermin:

Gruppe 1:	Do.	14 - 16 Uhr	N1 (BK 115)
Gruppe 2:	Fr.	10 - 12 Uhr	N1 (BK 87)
Gruppe 3:	Fr.	12 - 14 Uhr	N1 (BK 87)

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Wir betrachten auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\geq 0}$ wie in der Vorlesung das (schlecht gestellte) Anfangswertproblem

$$-\Delta u = 0,\ u(x,0) = u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Bestimmen sie ein diskretes Verfahren, das die CFL–Bedingung erfüllt. Dies behebt natürlich nur die numerische Instabilität, nicht die analytische.

Hinweis: Ein diskretes Verfahren gibt Differenzenschemata und Gitter an. Wählen Sie die Gitter geeignet.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
(Kroneckerprodukt)
Wir betrachten auf $\Omega = [0,1]^2$ das Gitter (x_j, y_k), $x_j = jh$, $y_k = kh$, $h = 1/M$, $j,k = 0 \dots M$. Es sei L die aus der Vorlesung bekannte Matrix mit 2 auf der Hauptdiagonalen und -1 auf den beiden Nebendiagonalen. Weiter sei $u : \Omega \mapsto \mathbb{R} \in C^2$.

Wir betrachten die Diskretisierung $u|_{G_h}$. Die Werte im Inneren ordnen wir zeilenweise in einem Vektor $U \in C^{(M-1)^2}$ an, also

$$U = \begin{pmatrix} u(x_1, y_1) \\ \vdots \\ u(x_1, y_{M-1}) \\ u(x_2, y_1) \\ \vdots \\ u(x_2, y_{M-1}) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Seien A eine (n,m)–Matrix und B eine (p,q)–Matrix. Das Kroneckerprodukt $A \otimes B \in \mathbb{R}^{np \times mq}$ ist definiert durch

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,m}B \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Der Vektor

$$V = (I_{(M-1)^2} \otimes L + L \otimes I_{(M-1)^2})U$$

enthält zeilenweise angeordnet eine Approximation an $h^2(-\Delta u)|_{G_h}$.

Was passiert am Rand?

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Es seien A und B symmetrische Matrizen. Zeigen Sie: Alle Eigenwerte von $A \otimes B$ sind von der Form $\lambda\mu$, wobei λ ein Eigenwert von A und μ ein Eigenwert von B ist.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe): (4 Punkte)
Wir betrachten auf $[0,1] \times \mathbb{R}^{\geq 0}$ die Wellengleichung

$$u_{tt} = u_{xx}$$

mit $u(x,0) = u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ und $u(0,t) = u(1,t) = 0$.

Diskretisieren Sie die Gleichung mit dem Standard–Differenzenstern und plotten Sie die diskrete und die analytische Lösung. Wählen Sie $u_0(x) = \sin(5\pi x)$ und probieren Sie einige Werte von h aus.

Bestimmen Sie experimentell das analytische Abhängigkeitsgebiet, d.h., verkleinern Sie das numerische Abhängigkeitsgebiet so lange, bis das Verfahren instabil wird.