

Sei L elliptische Differentialoperator

$$u: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u_t + Lu = f$$

Typisch: $u_t + \Delta u = f$ $L = -\Delta$

$u_t = \Delta u + f$, Diffusions-, Wärmeleitungsgleichung

$u_t - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f$ Impuls-Transportgleichung

$$u(x, 0) = u_0(x), u(x, T) = 0, x \in \Omega$$

Lösung durch Trennung der Variablen (f=0)

$$u = v(t) \cdot w(x)$$

$$v' w = v \cdot \Delta w$$

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{-\Delta w(x)}{w(x)} = \lambda$$

$$v = e^{-\lambda t} \cdot \mu, -\Delta w = \lambda w$$

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } -\Delta, w \text{ zugehörig EV}$$

in 1D: $[-\pi, \pi]$

$$\sin(kx) \text{ EV zu}$$

$$+\Delta^2 \sin(kx) = -\lambda \sin(kx)$$

$$\lambda = k^2$$

$$u(x, t) = \sum_k e^{-\lambda_k t} u_k(x), u_k \text{ ONB} \Rightarrow a_k = (u_0, u_k)$$

Insb.: Sei $u_0 = \sum_k a_k \sin kx$ (Sinus-Fourier)

$$\Rightarrow a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_0(x) \sin kx \, dx$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \sum_k \sum_l \int_0^\pi u_0(x) \sin kx \, dx \sin lx e^{-k^2 t}$$

Insb.: analytische Abb.-Gesamt von (x, t) ist $[0, 1]$

Klassische Diskretisierung (für $\mathbb{R}^n x \in \mathbb{R}$):

$$u_t \sim (u(x, t+\Delta t) - u(x, t)) \cdot \frac{1}{\Delta t}$$

$$u_{xx} \sim \frac{1}{h^2} (u(x+h\Delta t) - 2u(x, t) + u(x-h\Delta t)) \quad \dots \cdot \Delta t$$

$$\frac{t}{\Delta t} \cdot h(\Delta t) \rightarrow \infty \quad h(\Delta t) = o(\Delta t)$$

(2)

Allgem ein / diskret, Euler - Verfahren:

$$\text{Gitter } G = \{ (k h, l \cdot dt) : l \geq 0, 0 \leq k \leq \frac{T}{h} \}, \quad h = \frac{T}{N}$$

Berechne Näherung $u_{k,l} \approx u(kh, l \cdot dt)$

$$V_l = \begin{pmatrix} u_{0,l} \\ \vdots \\ u_{N,l} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} (V_{l+1} - V_l) = -k_h \cdot V_l, \quad k_h \text{ Diskretisierung von } \Delta \text{ (Laplace-Operator)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_{l+1} &= V_l + dt \cdot k_h \cdot V_l \\ &= (I - dt \cdot k_h) \cdot V_l \\ &= (I - dt \cdot k_h)^{l+1} \cdot V_0 \end{aligned}$$

Stabil genau dann, wenn V_{l+1} beschränkt ist

$$\Leftrightarrow (1 - \lambda \cdot dt) \quad \forall \text{ EW } \lambda \text{ von } K_h$$

$$\Leftrightarrow dt \leq \frac{2}{\lambda}$$

Nach Kapitel 1: EW von $k_h \sim \frac{1}{h^2}$, also $dt \sim \frac{1}{h^2}$.

Sehr kleine Zeitschrittwerte!

Theta - Verfahren, Crank - Nicholson:

$$i) \Delta u(x, t_e) \approx K_h \cdot V_l(x, t_e) \quad (\text{explizit Euler}) \quad \text{Euler}$$

$$ii) \Delta u(x, t_e) \approx K_h \cdot V_{l+1} \quad (\text{implizit Euler})$$

$$\Delta u(x, t_e) \approx (\theta) \cdot K_h \cdot V_l + (1 - \theta) \cdot K_h \cdot V_{l+1} \quad (\theta\text{-Verfahren})$$

$$\theta = \frac{1}{2}, \quad \text{Crank - Nicholson}$$

Höhere Konsistenzordnung

$$V_{l+1} - V_l = dt \cdot (\theta \cdot K_h \cdot V_{l+1} + (1 - \theta) \cdot K_h \cdot V_l)$$

$$\Rightarrow V_{l+1} = \left((I + dt \cdot \theta \cdot K_h)^{-1} \cdot (I - (1 - \theta) \cdot dt \cdot K_h) \right)^{l+1} \cdot V_0$$

$$\text{EW: } -1 \leq \frac{1 - (1 - \theta) dt \cdot \lambda}{1 + \theta \cdot dt \cdot \lambda} \leq 1$$

$$\text{linke Ungl: } 1 - (1 - \theta) \cdot dt \cdot \lambda \geq - (1 + \theta \cdot dt \cdot \lambda)$$

$$2 \geq dt \cdot \lambda \cdot (1 - 2\theta)$$

$$\text{linke Stabilität f\"ur } \theta \leq \frac{1}{2}!$$

(3)

A-priori Abschätzung für die Norm der Lösung der Wärmeleitungsgl.
 Satz Sei $u \in C^2$ bzgl. x , $u \in C^1$ bzgl. t .

Dann gilt

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \|\nabla u(\cdot, \xi)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\xi = \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$0 = \int_0^t \int_{\Omega} (u_t - \Delta u) \cdot u \, dx \, d\xi$$

$$= \int_0^t \int_{\Omega} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \nabla u \cdot \nabla u \, dx \, d\xi$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \frac{u^2}{2} \right) \Big|_0^t + \int_0^t \|\nabla u\|^2 d\xi$$

Insb.: Die Norm von u ist nicht

Erklärliche 0-Randbedingungen

(4)

(2) Grundräume:

(v.ell.)

 L besitzt Bilinearform B (auf H_0^1) L ist Operator von $H^1 \rightarrow H_0^{-1}$ (siehe Abschnitt 5.3).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f : \frac{\partial u}{\partial t}, f \in H_0^{-1}, \text{ d.h. } \int_{\Omega} f(x) u(x) dx < \infty \quad \forall u \in H_0^1.$$

Sicher richtig, falls $\frac{\partial u}{\partial t}, f \in L^2(\Omega)$.

Lösungsraum:

$$L^2((0,T), L^2(\Omega)) := L^2(\Omega \times (0,T))$$

$$L^2((0,T), H^k(\Omega)) := \{u : u(t, \cdot) \in H_0^k(\Omega), \\ (\partial^\alpha u) \in L^2((0,T), L^2(\Omega))\}$$

$$L^2((0,T), H_0^{-k}(\Omega)) := \{u : \forall |\alpha| \leq k, \\ (\partial^\alpha u) \in L^2((0,T), H_0^k(\Omega))\}.$$

$$H^m((0,T), H^k(\Omega)) := \{u : \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m u(t, x) \text{ existiert (schwach)}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^q u(t, x) \in L^2((0,T), H^k(\Omega)) \\ \forall |q| \leq m\}.$$

also: m -mal diff'bar nach t , k -mal diff'bar nach x .

$$\|u\|_{L^2((0,T), H^k(\Omega))}^2 = \int_0^T \|u(t, \cdot)\|_{H^k(\Omega)}^2 dt$$

Schwache Formulierung: Mult., integriert bzgl. x .

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right)_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} (Lu)v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right)_{L^2(\Omega)} + B(u, v) = l(v). \quad (\text{Schwache Formulierung in } \Omega)$$

Finite Differenzverfahren in t oder τ (oder Δt) integriert über t :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) dt + B(u, v) &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} l(v) dt \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) dt + B(u, v) \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} l(v) dt \end{aligned}$$

(5)

A priori für schwache Formulierung:

Sei $B(u, u) \geq C \|u\|_{H^1}^2$. wie o.B.: $v = u$, integriere in Set

$$\frac{\gamma}{2} \|u(\cdot, t)\|_2^2 - \frac{\gamma}{2} \|u_0\|_2^2 + C \int_0^t \|u\|_{H^1}^2 ds$$

$$\leq \|L(u)\|$$

$$\leq \int_0^t \|L\|_{H^{-1}} \cdot \|u\|_{H^1} ds$$

$$\leq \frac{1}{2c} \int_0^t \|L\|_{H^{-1}}^2 ds + \frac{c}{2} \int_0^t \|u\|_{H^1}^2 ds$$

$$\Rightarrow \|u(\cdot, t)\|_2^2 + C \int_0^t \|u\|_{H^1}^2 ds \leq \frac{1}{c} \int_0^t \|L\|_{H^{-1}}^2 ds + \|u_0\|_2^2$$

Insgesamt:

$$\sup \|u(\cdot, t)\|_2^2 \leq \frac{1}{c} \int_0^T \|L\|_{H^{-1}}^2 ds$$

$$\int_0^T \|u(\cdot, s)\|_{H^1}^2 ds \leq \frac{1}{c^2} \int_0^T \|L\|_{H^{-1}}^2 ds + \frac{1}{c} \|u_0\|_2^2$$

$$\Rightarrow u \in L^\infty((0, T), L^2(\Omega))$$

$$u \in L^2((0, T), H^1(\Omega))$$

stetige Abb von den Anfangsdaten

gut gestelltes Problem

$$v = L^{-1} \frac{\partial u}{\partial t}; \text{ Abschätzung für } \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2((0, T), H^{-1}(\Omega))$$

$$\Rightarrow u \in H^1((0, T), H^{-1}(\Omega))$$

A priori - Abschätzung für schwache Formulierung
 B koaktiv, $B(v,v) \geq c \|v\|^2$.

(5)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right)_{L^2(\Omega)} ds + B(u, v) = \ell(v) \quad \left(= \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \right)$$

$$\Rightarrow \|u(\cdot, t)\|_2^2 + c \int_0^t \|u(\cdot, s)\|_{H^1}^2 ds \leq \frac{1}{c} \int_0^t \|f\|_{H^{-1}}^2 ds + \|u_0\|_2^2$$

$\uparrow (= \|f\|_{L^2}^2)$

Beweis:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(\cdot, s)\|_2^2 \right|_0^t + c \int_0^t \|u(\cdot, s)\|_{H^1}^2 ds &\leq \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, s), u(\cdot, s) \right)_{L^2(\Omega)} ds + B(u, u) \\ &= \ell(u) = \int_0^t \int_{\Omega} f(x, s) u(x, s) dx ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2}} \|f(\cdot, s)\|_{H_0^{-1}} \sqrt{2} \|u(\cdot, s)\|_{H^1} ds \\ &\leq \frac{1}{2c} \int_0^t \|f(\cdot, s)\|_{H_0^{-1}}^2 ds + \frac{c}{2} \int_0^t \|u(\cdot, s)\|_{H^1}^2 ds \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Beh.

Also:

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_2^2 &\leq \frac{1}{c} \int_0^t \|f\|_{H_0^{-1}}^2 ds + \|u_0\|_2^2 \Rightarrow u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ \int_0^t \|u(\cdot, s)\|_{H^1}^2 ds &\leq \frac{1}{c^2} \int_0^t \|f\|_{H_0^{-1}}^2 ds + \frac{1}{c} \|u_0\|_2^2 \Rightarrow u \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \end{aligned}$$

Aufgabe $Lu(\cdot, t) = f(\cdot, t)$ lösbar, dann L V -elliptisch (Koaktivität)

$\Rightarrow L^{-1}$ existiert stetig. Setze $(Lv)(\cdot, s) = \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, s)$.

$$B(v, v) = (Lv, v)_{L^2(\Omega)}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right)_{L^2(\Omega)} + B(u, v) - B(u, v)$$

$$= (d, v)_{L^2(\Omega)} - \left(u, \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{L^2(\Omega)}$$

$$c \int_0^t \|v(s)\|_{L^2}^2 ds + \int_0^t \left(u, \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{L^2(\Omega)} ds \leq \int_0^t (d, v)_{L^2(\Omega)} ds$$

$$\leq \frac{1}{2c} \int_0^t \|f(\cdot, s)\|_{H_0^{-1}}^2 ds + \frac{c}{2} \int_0^t \|v(\cdot, s)\|_{H^1}^2 ds$$

$$\Rightarrow \int_0^t \|v(\cdot, s)\|_{L^2}^2 ds \leq C$$

$$\Rightarrow \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, s) \right\|_{L^2}^2 ds \leq C$$

$$\Rightarrow u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1) \cap H^1(0, T; H^{-1})$$

Maximumprinzip: $c < 0$

Satz Sei $Lu = -\Delta u + c u \frac{\partial u}{\partial t} + Lu \leq 0$ klassische Lösung,
d.h. $u \in C(0, t, C^2(\Omega)) \cap C^1(0, T, C(\Omega))$.

Dann nimmt u kein Maximum in $\Omega \times (0, T]$ an.

Beweis: Sei zunächst $c < 0$.

Falls u ein Max. in $(\bar{x}, \bar{t})$ annimmt,

so ist $\frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x}, \bar{t}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x}, \bar{t}) < 0$

Dann mit Max-Prinzip für elliptische.

$c > 0$:

Betrachte $v(x, t) = e^{\alpha t} u(x, t)$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Lv = \alpha \cdot v + e^{\alpha t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Lu \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} + (-\Delta v + (c - \alpha)v) = e^{\alpha t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Lu \right)$$

$$\alpha < 0$$

verschafft.

Stabilität bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Stabilität bzgl. α -Norm - Explizit Euler

Sei $(U_{i,k})$ Gitterfunktion.

explizit:

$$U_{k+1} = (I - dt \cdot K_h) U_k + dt \cdot F_h(t_k)$$

wir nehmen an, dass $\frac{2dt}{h^2} < 1$.

Dann hat $(I - dt \cdot K_h)$ nur positive Eigenwerte.

$$\|A\|_{\infty} = \sup_{\|x\|_{\infty}=1} \|Ax\|_{\infty} = \sup_{\|x\|_{\infty}=1} \|Ax\| = \max_i \sum_k |A_{ik}|.$$

$$\begin{aligned} \|(I - dt \cdot K_h)\|_{\infty} &= \max_i \left(1 - \sum_k dt \cdot (K_h)_{ik} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|U_{k+1}\| \leq \|U_k\| + dt \cdot \|F_h(t_k)\|_{\infty}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|U_k\| &\leq \|U_0\| + dt \sum_{i=0}^{k-1} \|F_h(t_i)\|_{\infty} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\rightarrow \sum_0^k \|f\|_{\infty}} \end{aligned}$$

Schritt in ∞ -Norm - Implizit Euler

*

(8)

$$U_{k+1} = (I + dt \cdot K_k)^{-1} U_k + dt \cdot F_k(t_k)$$

1. A ist M-Matrix $\Leftrightarrow A_{ii} > 0, A_{ij} \leq 0 (i \neq j),$
 $-\sum_{i \neq j} A_{ij} \leq A_{ii}, A$ ist invertierbar,
 (A^{-1}) hat nur pos. Einträge.

2. K_k ist M-Matrix (nur Analysis).

3. A M-Matrix $\Rightarrow \|B\|_{\infty} \leq 1, B = (I + A)^{-1}.$

Sei $v = B \cdot u \Leftrightarrow u = (I + A)v$. Wir zeigen: $\|v\|_{\infty} \leq \|u\|_{\infty}$

$$\text{Sei } v_e = \max_k v_k$$

$$\Rightarrow (1 + A_{ee}) \cdot v_e = u_e - \sum_{l \neq e} A_{el} \cdot v_l$$

$$\leq u_e - \sum_{l \neq e} A_{el} \cdot v_e$$

$$\leq u_e + A_{ee} \cdot v_e$$

$$\Rightarrow v_e \leq u_e \Rightarrow \max_k v_k \leq \max_k u_k,$$

$$\min_k v_k \geq \min_k u_k.$$

$$u \in \mathbb{R}^n: \Rightarrow \|u\|_{\infty} = \max_k |u_k| \geq \max_k |v_k| = \max_k |(Bu)_k| = \max_k \left| \sum_j B_{kj} u_j \right|$$

$$\text{Sei } k \text{ mit } \|B\|_{\infty} = \sum_j |B_{kj}|.$$

Sei k das Indizes i oder j ...

$$(u_j = \text{sgn}(B_{kj}), \Rightarrow \|u\|_{\infty} = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \|u\|_{\infty} \geq \sum_j B_{kj} u_j$$

$$= \sum_j |B_{kj}| = \|B\|_{\infty}$$

Also ist $\|(I + dt \cdot K_k)^{-1}\|_{\infty} \leq 1 \Rightarrow B \text{ ok.}$

Parabol. Probleme

⑦

$$u_t = L u + f, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, t) = 0, \quad x \in \partial \Omega, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

L elliptisch ($L = -\Delta$), $u \in H_0^1(\Omega)$.

B zugehörige Bilinearform

lin. rechte Seite.

v Testfunktion $\in H_0^1(\Omega)$:

$$(u_t, v)_{L^2(\Omega)} + (L u, v)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)}$$

$$B''(u, v)$$

$$L''(v)$$

Annahme:

$$f(x, t) = f(x).$$

$$\int_0^T \|u\|_{H^1}^2 ds \leq C \quad (\text{analytisch})$$

Finite Elemente für die Wärmeleitungsgl.:

Sei $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ ein endlichdimensionaler (Finite Elemente-)

Ausdrucksraum mit globaler Basisfunktionen φ_k .

$$u(x, t) = \sum_k u_k(t) \varphi_k(x) \quad (\text{lok.-discrete Ansatz}), \text{ führt zu G.D.Gl.}$$

$$\left(\sum_k u_k'(t) \varphi_k, \varphi_e \right) + B \left(\sum_k u_k(t) \varphi_k, \varphi_e \right) = L(\varphi_e)$$

$$\text{Mit } M = (\varphi_k, \varphi_e), K = B(\varphi_k, \varphi_e), b = (L(\varphi_e)), U(t) = (u_k(t));$$

$$M \cdot U' + K U = b \quad (\text{System gew. D.Gl.})$$

Finite Differenzen, θ -Verfahren in t : (Auch in schwacher Form hinschreiben.)

$$u_n(x, t) \sim \frac{1}{dt} (u(x, t+dt) - u(x, t))$$

$$t_k = k \cdot dt, \quad U_k = U(t_k), \quad U_k(x) = \sum (U(t_k))_j \cdot \varphi_j$$

$$\frac{1}{dt} (U_{k+1} - U_k, v) + \theta B(U_{k+1}, v) + (1-\theta) B(U_k, v) = L(v)$$

$$\Rightarrow (M + \theta \cdot dt \cdot K) U_{k+1} = (M - (1-\theta) dt \cdot K) U_k + dt \cdot b$$

$$U_{k+1} = (M + \theta \cdot dt \cdot K)^{-1} (M - (1-\theta) dt \cdot K) U_k + dt \cdot b$$

$$U_{k+1} = (M + \theta \cdot dt \cdot K)^{-1} (M - (1-\theta) dt \cdot K) U_k + dt \cdot b$$

$$\Rightarrow (M + \theta \cdot dt \cdot K) U_{k+1} = (M - (1-\theta) dt \cdot K) U_k + dt \cdot b$$

$$U_{k+1} = (M + \theta \cdot dt \cdot K)^{-1} (M - (1-\theta) dt \cdot K) U_k + dt \cdot b$$

Dissipation.

(2)

$E(u) = \frac{1}{2} B(u, u) - l(u)$ ist monoton fallend in t .

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{L^2(\Omega)} + \underbrace{B(u, \frac{\partial u}{\partial t}) - l(\frac{\partial u}{\partial t})}_{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} B(u, u) - l(u) \right)}$$

$$= \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\partial}{\partial t} E(u).$$

$$0 = \int_0^T \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\partial}{\partial t} E(u) \, ds \Rightarrow E(u(\cdot, T)) = E(u(\cdot, 0)) + \int_0^T \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds$$

$\Rightarrow$ Beh.

Dies wollen wir auch diskret erhalten.

$$v \sim \frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t}$$

$$(v, v)_{L^2(\Omega)} + \theta \Delta t \cdot B(u_{k+1}, v) = - (1-\theta) \Delta t B(u_k, v) + \Delta t l(v),$$

$\uparrow$ Diskretisierung!

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{\Delta t} \|v\|^2 + E(u_{k+1}) - E(u_k) &= B(u_{k+1}, v) \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \\ &\quad + B(u_{k+1}, v_k) \theta (1 - 2\theta) \\ &\quad + B(u_k, v_k) (\theta - 1 + \frac{1}{2}) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \theta \right) (B(v, v)) \end{aligned}$$

(3)

Q

$$v = u_{k+1} - u_k$$

$$(u, v) \neq B(u, v) = \ell(v)$$

$$\frac{d}{dt} (u_{k+1} - u_k, v) + \theta B(u_{k+1}, v) = (\theta - 1) B(u_k, v) + \ell(v)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \|v\|_2^2 = (\theta - 1) B(u_k, u_{k+1} - u_k) - \theta B(u_{k+1}, u_{k+1} - u_k) + \ell(u_{k+1} - u_k)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dt} \|v\|_2^2 + E(u_{k+1}) - E(u_k) &= B(u_{k+1}, u_{k+1}) \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \\ &+ B(u_{k+1}, u_k) (2\theta - 1) \\ &+ B(u_k, u_k) (\theta - 1 - \frac{1}{2}) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \theta\right) B(u_{k+1} - u_k, u_{k+1} - u_k) \\ &+ 2(\theta - 1) B(u_k, u_k) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(u_{k+1}) \leq E(u_k) - \|v\|_2^2 \cdot \frac{1}{dt} + \left(\frac{1}{2} - \theta\right) B(v, v)$$

$$E(u_{k+1}) \leq E(u_k), \quad \text{für } u_k \quad \theta \geq \frac{1}{2}$$

$$\theta < \frac{1}{2}: B(v, v) \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\Rightarrow E(u_{k+1}) \leq E(u_k) - \frac{1}{dt} \cdot \|v\|_2^2 \leq \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Für dreieckig-18kase Elemente: $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{2}}{h} \|v\|_{L^2(\Omega)}$

$$\leq E(u_k) - \|v\|_2^2 \left(\frac{1}{dt} - C \cdot \frac{\sqrt{2}}{h} \cdot (1/2 - \theta)\right)$$

$$\Rightarrow dt \sim h^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} C \|u_k\|_{H^1}^2 + \ell(u_k) \leq E(u_k) \leq E(u_0)$$

$$\Rightarrow \|u_k\|_{H^1}^2 \leq \frac{2}{C} (E(u_0) + \|\ell\|_{H^{-1}} \cdot \|u_k\|_{H^1})$$

$$\Rightarrow \left(\|u_k\|_{H^1} - \frac{1}{C} \|\ell\|_{H^{-1}} \right)^2 \leq \frac{2}{C} E(u_0) + \frac{1}{C^2} \|\ell\|_{H^{-1}}^2$$

$$\Rightarrow \|u_k\|_{H^1} \leq \frac{1}{C} \|\ell\|_{H^{-1}} + \sqrt{\frac{2}{C} E(u_0) + \frac{1}{C^2} \|\ell\|_{H^{-1}}^2}$$

Hyperbolische Probleme

(4)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{Transportgl.})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$v_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_1 = \frac{\partial}{\partial x} v_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_2 = \frac{\partial}{\partial x} v_1 \quad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Reduktion auf Transportgl.

Behandelt in Kapitel II.

$$CFL: dt \sim dx.$$