

Kolloquium Vorbereitung

$-\Delta u = f$ Sei $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ein l.u. System in C^2 .

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j u_j(x)$$

$$\text{Wähle } \delta_j, j = 1, \dots, N$$

$$(-\Delta u)(\delta_j) = p(\delta_j) \quad g.s.t.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j (-\Delta u_j)(\delta_j) = p(\delta_j), \quad \forall g.s.t. \quad \beta = \beta(g)$$

$$\text{Wähle } \delta_j, j = 1, \dots, M, M \gg N$$

Näherungsweise Gls.

Wie wählt man die Punkte?

Integriertische $F_u(u, n)$!

$$(\text{Stichworte Form. } x_k = k \cdot h, I_k = [x_k, x_{k+1}], h = \frac{N}{2})$$

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} \int_{I_k} u(x) v(x) dx$$

$$\sim \sum_{m=1}^{N-1} u(x_k + h \cdot \frac{1}{2}) v(x_k + h \cdot \frac{1}{2})$$

$\{j: \text{Gauß-Interpolationspunkte}\}$
 N Unstetigkeit der Legendre-Polynome.

Spektralmethode / Wärmeleitungsgleichung

(2)

Sei (φ_j) l. n. in $H^2 \cap H_0^1$, $S_N = \text{span}(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$.

Schwache Lösung für Galerkin-Ansatz:

$$u_N(x, t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \varphi_j(x).$$

Schwach: $(\frac{\partial u}{\partial t}, v) + (Du, Dv) = (f, v), v \in H_0^1$

$$(\frac{\partial u_N}{\partial t}, v) + (Du_N, Dv) = (f, v), v \in S_N.$$

$$\Rightarrow B \alpha'(t) + A \alpha(t) = b(t)$$

Sei P_N die orth. Projektion auf S_N

$$\Rightarrow P_N \frac{\partial u_N}{\partial t} = \underbrace{P_N \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_N}_{=: -A_N} u_N = P_N f$$

$$(A_N x, x) = (\frac{\partial}{\partial x} P_N x, \frac{\partial}{\partial x} P_N x) \geq 0$$

$\Rightarrow A, B$ pos. (semi-) definit.

$$u_{N,t} + A_N u_N = P_N f$$

$$u_{N,t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_N = f$$

$$\Rightarrow e_{N,t} = u_N - u$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} e_N + A_N e_N = (P_N - I) f - (A_N - A) u, e_N(0) = v_N - v.$$

(Gronwall)

$$\Rightarrow \|u_N(\cdot) - u(\cdot)\| \leq \|v_N - v\| + \int_0^t \| (P_N - I) f \| + \| (A_N - A) u \| ds$$

$\rightarrow 0$

$\rightarrow 0$

$\rightarrow 0$

falls (φ_i) vollst.

falls A_N existiert!

Beliebige Well. φ_j Eigenvektoren

also $\varphi_j = \sin jx$

Helmholtz-
dynamische Analyse " Lösung von Randwertproblemen (3)

Beispiel: Helmholtz

$u_{tt} = c^2 \Delta u$ zeitabhängige Ausbreitung in einem Punkt.
Unendlich Ausbreitungsgebiet.

Geschwindigkeit endlich $\Rightarrow u = 0$ außerhalb $K_p(0)$.
(Dirichlet-RB).

$$u(x, t) = u(x) \cdot e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow -\omega^2 u = c^2 \Delta u$$

$$\Rightarrow \Delta u + k^2(x) u = 0 \quad (\text{Helmholtz (inhom.)})$$

$\uparrow$
indefinit $\emptyset$

RB: $\frac{\partial u^s}{\partial r} - i k u^s \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$.
(Polarkoordinaten).

Wie das koefizient man die RB?

Ein $\int$ der Fall, $k(x) = \begin{cases} \alpha, & |x| \leq r \\ \beta, & |x| \geq r \end{cases}$ (Strom zylinder).
im $\mathbb{R}^2$

Satz von Grundlösungen für konstantes k .

$$u(r, \varphi) = v(r) \cdot w(\varphi).$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

$$r^2 \left(k^2 + \frac{r^2 v''(r)}{v(r)} + \frac{1}{r} \frac{v'(r)}{v(r)} \right) = \frac{w''(\varphi)}{w(\varphi)} = -\ell^2$$

$$\Rightarrow w(\varphi) = e^{\pm i\ell \cdot \varphi}, \quad v''(r) + \frac{1}{r} v'(r) + (r^2 - \ell^2) v(r) = 0$$

Besselsche DGL. Lösung: $J_\ell, Y_\ell, H_\ell = (J_\ell + iY_\ell)$

J_ℓ regulär, Y_ℓ hat Pol bei 0,

$$H_\ell' - i k H_\ell \rightarrow 0, \ell \rightarrow \infty \Rightarrow$$

$J_\ell e^{i\ell\varphi}$ ist reguläre Lösung, $H_\ell(r) e^{i\ell\varphi}$ ist
nicht regulär, erfüllt aber Sommerfeld.

⑨

Annahme: $\exists u \in C^2$, das die DGL erfüllt.

Ansatz:

$$u(r, \varphi) = \begin{cases} \sum \alpha_n J_n(kr) e^{in\varphi}, & r \leq R \\ \sum \beta_n H_n(kr) e^{in\varphi}, & r > R \end{cases}$$

$$u^v(R+\varepsilon, \varphi) = u(R-\varepsilon, \varphi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R+\varepsilon, \varphi) = \frac{\partial u}{\partial r}(R-\varepsilon, \varphi)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \alpha_n J_n' &= \beta_n H_n' + u' \\ \alpha_n J_n &= \beta_n H_n + u' \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Lösg eindeutig} \\ \text{(Wronski-Determinante)} \end{array}$$

Zurückführung der Gldg in Riemann auf Gldg auf Rand.

Was passiert, wenn das Objekt nicht so einfach ist?

Γ = Rand des Objekts

$$\frac{\partial u^1}{\partial r} = \frac{\partial u^2}{\partial r}, \quad u^1 = u^2 \text{ entlang } \Gamma.$$

→ kollektives Verfahren

→ unendlichen GLS.

Falls ein System von Gldgen der Form

$U(x, y)$ zur Verfügung steht ($x \in C$):

$$u(x) = \int \alpha(y) U(x, y) dy$$

(Fredholm-)Integralgleichg für α .

BEM-Lösung mit Hilfe der Fundamentallösung

1D:

5

$$-u'' = f \quad \text{auf } (0,1)$$

$$\alpha_0 u_0 + \beta_0 v_0 = \mu_0 \quad u_0 = u(0), v_0 = u'(0).$$

$$\alpha_1 v_1 + \beta_1 v_1 = \mu_1 \quad v_1 = u(1), v_1 = u'(1).$$

$$\text{Fundamentallösung: } u^*(x) = \frac{1}{2} (1 - |x|)$$

$$-u'' = \delta$$

gemaint: Sei $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} (-u'') \cdot v = \int_{\mathbb{R}} -u' \cdot v' = u'(0)$$

$$u^*(x,y) = u^*(x-y)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow - \int_0^1 f(x) u^*(x,y) dx &= \int_0^1 u''(x) u^*(x,y) dx \\ &= u'(x) u^*(x,y) - u(x) \frac{\partial u^*}{\partial x}(x,y) \Big|_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 u(x) \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}(x,y) dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(y) = \frac{1}{2} v_1 \cdot y - \frac{(1-y)}{2} \cdot v_0 + \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} u_0 + \int_0^1 f(x) u^*(x,y) dx.$$

Setze $y=0$

$$\Rightarrow u_0 = \frac{1}{2} v_0 + \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_0 + \int_0^1 f_0$$

$$u_1 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_0 + \int_1^1 f_1$$

f RB

$$\Rightarrow u_0, v_1, v_0, v_1 \text{ berechnen}$$

Poisson in $\mathbb{R}^2$:

(6)

$$-\Delta u = f \\ u = \mu, \frac{\partial u}{\partial \nu} = \mu$$

$$\text{Green: } \int_{\Omega} u(x) \Delta v(x) - v(x) \Delta u(x) dx = \int_{\Gamma} u(x) \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma(x)$$

$$v = u^* \text{ Fundamentallösung, } v = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} & \text{in } \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow - \int_{\Omega} u(x) \Delta u^*(x,y) = - \int_{\Omega} u^*(x,y) \Delta u(x) dx$$

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ & = u(y), y \in \Omega \\ & \frac{\partial u}{\partial \nu}(y), y \in \partial\Omega \text{ (Huygens)} + \int_{\partial\Omega} u^*(x,y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial u^*}{\partial \nu} \cdot u dx \\ & 0, y \notin \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Problem: $u \neq \frac{\partial u}{\partial \nu}$ benötigt. Eine aus RB.

Für $y \in \partial\Omega$:

$$\frac{1}{2} u(y) = \int_{\Gamma} u^* \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial \nu} \cdot u d\sigma + \int_{\Omega} u^* \cdot f dx$$

Fredholm'sche Integralgleichung.

Lösung durch Kolloidation oder spektrale Methoden.

Poisson in $\mathbb{R}^2$:

$$-\Delta u = f$$

$$u = \mu \frac{\partial u}{\partial \nu} = \mu_n \text{ auf } \partial \Omega = \Gamma$$

$$\text{Green: } \int_{\Omega} u(x) \Delta v(x) - v(x) \Delta u(x) dx = \int_{\Gamma} u(x) \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) - v(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) d\sigma(x)$$

$$v = u^* = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & \mathbb{R}^2 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|} & \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} n=2: & - \int_{\Omega} u(x) \Delta u^*(x,y) dx = - \int_{\Omega} u^*(x,y) \Delta u(x) dx \\ & = \begin{cases} u(y), y \in \Omega \\ 0, y \notin \Omega \\ \frac{1}{2} u(y), y \in \partial \Omega \end{cases} + \int_{\partial \Omega} u^* \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u^*}{\partial \nu} \cdot u d\sigma \end{aligned}$$

Benötigt: $u \in C^2(\bar{\Omega})$ ein. aus RB.

$$\begin{aligned} y \in \partial \Omega: \frac{1}{2} u(y) &= \int_{\Gamma} u^* \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u^*}{\partial \nu} \cdot u d\sigma \\ &+ \int_{\Omega} u^* \cdot f dx. \end{aligned}$$

Fredholm Integraly auch bzgl. Γ .

Numerische Lsg: Kollokation, spektrale Methode.

Mögliche Wahl: Galerkinverfahren auf dem Rand.

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

$$u = u^i + u^s, u^i \text{ bekannt}$$

$$(\Delta u + k^2) u^i = 0$$

$$u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

$$u^s = \sum_n a_n H_n(kr) e^{in\varphi}$$

$$\forall x = (r, \varphi) \in \partial\Omega.$$

$$\Omega = K_r(0),$$

$$u^s(\cos\varphi, \sin\varphi) = \sum_n (a_n H_n(k \cdot 1)) e^{in\varphi}$$

↑
Fourierkoeffizienten

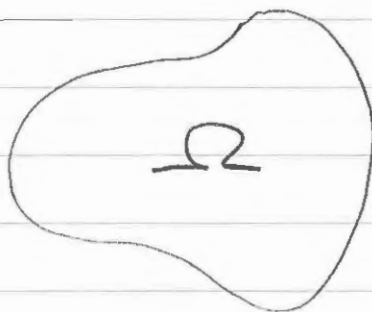
$$\Rightarrow a_n \text{ berechenbar}$$

$$\Rightarrow u^s \text{ berechenbar.}$$

Falls Ω nicht so einfach, dann von φ zu ρ

$$u^s(x) = \sum_n a_n H_n(k\rho) e^{in\varphi}, x = (\rho, \varphi) \text{ in Polark.}$$

kollodieren!



BEM-Lösung von PDE (mit Jac. Fundamentallösung)

(11) G D G L

$$-u'' = f \text{ auf } (0, 1)$$

$$\alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) = f_0$$

$$\alpha_1 u(1) + \beta_1 u'(1) = f_1$$

Fundamentallösung $u^*(x) [u^*(x, y) \neq u^*(x-y)]$:

$$\rightarrow u^*(x) = 0, x \neq 0, u^*(x) = (1 - |x|) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(u''(x)) v(x) dx = v(0) \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} (-u^*(x)) v''(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 -u^*(x) v''(x) dx + \int_0^{\infty} -u^*(x) v''(x) dx \\ &= -u^* v' \Big|_{-\infty}^0 - u^* v' \Big|_0^{\infty} + u^* v \Big|_{-\infty}^0 - u^* v \Big|_0^{\infty} = v(0). \end{aligned}$$

$$u^*(x, y) = u^*(x-y):$$

$$\begin{aligned} - \int_0^1 f(x) u^*(x, y) dx &= \int_0^1 u^*(x) u^*(x, y) dx \\ &= \int_0^1 u(x) u^*(x, y) dx + (u' \cdot u^* - u \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x}) \Big|_0^1 \\ &= -u(y) - \frac{1}{2} u_1 - \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{2} y \cdot v_1 - \frac{(1-y)}{2} \cdot v_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(y) \text{ berechnen für } x, y \text{ mit } \frac{1}{2} u_1 - \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{2} y \cdot v_1 - \frac{(1-y)}{2} \cdot v_0$$

$$y=0, y=1:$$

$$u_0 = \frac{1}{2} v_0 + \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_0 + f_0$$

$$u_1 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_0 + f_1$$

$$+ 2 \text{ RB}$$