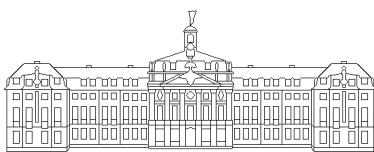


Colin W. Cryer

Numerik Partieller Differentialgleichungen I

Wintersemester¹ 1994/95



Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

¹Letzte Änderung am 2. Oktober 1995

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	1
1.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen	1
1.2 Partielle Differentialgleichungen	3
2 Die Punktmechanik	7
2.1 Einleitung	7
2.2 Die Newtonschen Axiome	7
2.3 Das n -Körperproblem	9
2.4 Arbeit und Energie	10
2.5 Erhaltungssätze	15
3 Die Kontinuumsmechanik	19
3.1 Gravitation	19
3.2 Elektromagnetische Felder	22
3.3 Erhaltungssätze (einfache Form)	24
3.4 Die Advektionsgleichung	25
3.5 Die Wärmeleitungsgleichung	25
3.6 Gleichungen, die mit der Wärmeleitungsgleichung verwandt sind	27
3.6.1 Die Diffusionsgleichung	27
3.6.2 Konvektion-Diffusion	28
3.6.3 Reaktion-Diffusion	28
3.6.4 Gasströmung in Porösen Medien	29
3.6.5 Sickerströmung	30
4 Die Kontinuumsmechanik: die Kinematik	33
4.1 Die Bewegung eines Körpers	33
4.2 Die Ansätze von Euler und Lagrange	33
4.3 Die Bilanzgleichungen	35
4.3.1 Erhaltung der Masse	35
4.3.2 Erhaltung des linearen Impulses	35
4.3.3 Erhaltung des Drehimpulses	36
4.3.4 Erhaltung der Energie	38

4.4	Die Deutung des Tensors t und Vektors b	38
4.5	Wellen im elastischen Material	40
5	Die Kontinuumsmechanik: die Strömungsmechanik	43
5.1	Einleitung	43
5.2	Die Eulerschen Gleichungen	43
5.3	Die Navier-Stokes-Gleichung	44
5.4	Die Theorie von Biot für den wasserdurchtränkten Erdboden	47
5.5	Die Wettervorhersage	48
6	Die Advektionsgleichung $u_t + cu_x = 0$	53
6.1	Einführung	53
6.2	Die allgemeine Lösung	54
6.3	Charakteristiken	55
6.4	Anfangswert- und Anfangswert-Randwertprobleme	56
6.4.1	Das Anfangswertproblem	56
6.4.2	Das Anfangswert-Randwertproblem	56
6.4.3	Sachgemäßgestellte Probleme	58
6.5	Abhängigkeits- und Bestimmtheitsbereiche	60
6.6	Anwendungen in der Biologie	61
7	Einfache Differenzenverfahren für die Advektionsgleichung $u_t + cu_x = 0$	63
7.1	Einführung	63
7.2	Approximation von Ableitungen durch Differenzen	64
7.3	Ein einfaches Differenzenverfahren	66
7.4	Ein zweites einfaches Differenzenverfahren	68
7.5	Die Courant-Friedrich-Lowy-Bedingung	69
7.6	Beweis der Konvergenz bezüglich $\ \cdot\ _\infty$	71
7.7	Zusammenfassung einfacher Methoden	73
7.7.1	Zeitvorwärts und Raumvorwärts	73
7.7.2	Zeitvorwärts und Raumrückwärts	73
7.7.3	Zeitvorwärts und räumlich zentrierte	74
7.7.4	Lax-Friedrichs	74
7.7.5	Leap-frog oder Bockspringen	74
7.8	Beweis der Konvergenz bzgl. $\ \cdot\ _2$ (Energie-Methode)	74
7.8.1	Notation	75
7.8.2	Die Energienorm	75
7.8.3	Der Existenz- und Konvergenzbeweis	76
7.9	Das Lax-Wendroff-Verfahren	79
8	Die Wärmeleitungsgleichung	85
8.1	Einführung	85

8.2 Analytische Lösungen der Wärmeleitungsgleichung	86
8.2.1 Die Methode der Trennung der Veränderlichen	86
8.2.2 Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung	91
8.3 Eigenschaften der Wärmeleitungsgleichung	93
8.3.1 Der Abhängigkeitsbereich	93
8.3.2 Das Maximumprinzip	94
8.4 Existenz und Eindeutigkeit	98
9 Numerische Lösung der 1D-WLG durch Differenzenverfahren	101
9.1 Einführung	101
9.2 Approximation von Ableitungen durch Differenzen	103
9.3 Das klassische explizite Differenzenverfahren	103
9.4 Stabilität und Konvergenz für das klassische explizite Differenzenverfahren	105
9.5 Implizite Differenzenverfahren - Einführung	107
9.6 Ordnung und Stabilität	112
10 Die eindimensionale Wellengleichung	121
10.1 Einführung	121
10.2 Die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung	124
10.3 Weitere Eigenschaften	125
11 Charakteristiken	131
11.1 Einleitung	131
11.2 Differentialgleichungen höherer Ordnung	132
11.3 Klassifikation	135
11.3.1 Elliptische Gleichungen	135
11.3.2 Parabolische Gleichungen	137
11.3.3 Hyperbolische Gleichungen	137
11.3.4 Gleichungssysteme	138
11.4 Existenz und Eindeutigkeit für das Cauchy Problem	142
12 Schwache Lösungen	145
13 Die Burger-Gleichung	153
14 Systeme von Differentialgleichungen in Erhaltungsform	161
14.1 Einführung	161
14.2 Beispiele:	161
14.2.1 Die Burgersche Gleichung [Smoller, S. 241]	161
14.2.2 Die Eulersche Gleichung für Strömungen [Smoller, S. 240, 347, 322]	162
14.2.3 Das p -System [Smoller, S. 306]	162
14.3 Einige Grundbegriffe	163

14.4 Das Lax-Wendroff-Verfahren	164
14.5 Das Zweischritt-Lax-Wendroff-Verfahren	165
14.6 Stabilität des Lax-Wendroff-Verfahrens	166
14.7 Neue Methoden	167
15 Der Äquivalenzsatz von Lax für Anfangswertaufgaben	169
15.1 Einleitung	169
15.2 Banachräume	169
15.3 Das abstrakte Cauchy-Problem	175
15.4 Differenzenverfahren	178
16 Fourierreihen und Fouriertransformationen	183
16.1 Einführung	183
16.2 Die Anwendung von Fouriertransformationen für Stabilitätsanalyse	188
16.3 Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung	190
17 Die Laplace-Transformation	195
17.1 Einleitung	195
17.2 Die Laplace-Transformation	196
17.3 Die komplexe Umkehrformel für die Laplacesche Transformation	203
17.4 Andere Integraltransformationen	209
A Einige einfache Lösungsmethoden	211
A.1 Die Methode der Trennung der Veränderlichen	211
A.2 Die Methode von Lagrange	213

Kapitel 1

Einführung

Gegenstand dieser Vorlesung ist die numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen. Keine vorherigen Kenntnisse über partielle Differentialgleichungen oder deren Anwendungen werden vorausgesetzt. Wir hoffen, dem Leser einen Überblick über dieses große Gebiet zu geben, indem eine beschränkte Auswahl von beispielhaften Methoden und Problemen detailliert behandelt wird.

1.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Das einfachste Beispiel einer partiellen Differentialgleichung ist eine Gleichung mit nur einer Veränderlichen. In diesem Fall sprechen wir von einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Eine allgemeine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung wird in Gleichung (1.1) dargestellt:

$$\left. \begin{array}{l} F(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), t) = 0, \quad t \in G \subset \mathbb{R}^1 \\ \mathbf{u} : G \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times G \longrightarrow \mathbb{R}^n . \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

In Gleichung (1.1) ist F eine vorgeschriebene Funktion, eine Abbildung von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times G \longrightarrow \mathbb{R}^n$. G ist ein Teilgebiet von \mathbb{R}^1 . Eine Lösung \mathbf{u} von Gleichung (1.1) ordnet jedem $t \in G$ einen Vektor $\mathbf{u}(t)$ zu.

Die Gleichung (1.1) ist sehr allgemein. Eine spezielle Form von (1.1) wird in Gleichung (1.2) gegeben.

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{u}}(t) = f(\mathbf{u}(t), t), \quad t \in (a, b) \\ \mathbf{u} \in C^1[(a, b); \mathbb{R}^n] . \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

Gleichung (1.2) unterscheidet sich von Gleichung (1.1) in folgender Weise:

1. Es ist angenommen worden, daß die Gleichung (1.1) für $\dot{\mathbf{u}}(t)$ gelöst werden kann, damit die Gleichung $F = 0$ nach der Form $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}$ aufgelöst werden kann, wo \mathbf{f} bekannt ist.
2. Statt eines allgemeinen offenen Gebiets G aus \mathbb{R}^1 wird ein offenes Intervall (a, b) betrachtet.
3. Zuletzt sind einige Voraussetzungen über die Differenzierbarkeit von \mathbf{u} gemacht worden, und zwar, daß \mathbf{u} stetig differenzierbar ist.

Die Gleichung (1.2) hat im allgemeinen mehrere Lösungen. Betrachten wir z.B. die lineare Gleichung mit $n = 2$:

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = u_2(t) \\ \dot{u}_2(t) = u_1(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

Aus Gleichung (1.3) läßt sich leicht erkennen, daß die erste Komponente $u_1(t)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung erfüllt:

$$\ddot{u}_1(t) = u_1(t) \quad (1.4)$$

Hieraus folgt, daß die allgemeine Lösung von Gleichung (1.3) von zwei Parametern α und β abhängt, wie in Gleichung (1.5) dargestellt.

$$\begin{cases} u_1(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t} \\ u_2(t) = \alpha e^t - \beta e^{-t} \end{cases} \quad (1.5)$$

Durch geeignete Wahl von α und β in Gleichung (1.5) läßt sich jede Lösung von Gleichung (1.3) bestimmen. Es gibt zwei Möglichkeiten, die häufig vorkommen.

1. Man kann die Werte von \mathbf{u} , d.h. von den zwei Komponenten u_1 und u_2 , an der Stelle $t = a$ festlegen:

$$\begin{cases} u_1(a) = \eta_1, \\ u_2(a) = \eta_2, \end{cases} \quad (1.6)$$

wobei η_1 und η_2 vorgeschriebene Konstanten sind. Dies heißt eine *Anfangswertaufgabe* oder ein *Anfangswertproblem* für Gleichung (1.3).

2. Man kann den Wert von u_1 an der Stelle $t = a$ und u_2 an der Stelle $t = b$ festlegen:

$$\left. \begin{array}{lcl} u_1(a) & = & \eta_1 , \\ u_2(b) & = & \eta_2 , \end{array} \right\} \quad (1.7)$$

wobei η_1 und η_2 wieder zwei vorgeschriebene Konstanten sind. Dies heißt ein *Randwertproblem* oder eine *Randwertaufgabe* für Gleichung (1.3).

Walter [1976] ist eine Einführung in die klassische Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen. Neuere Gesichtspunkte werden in Wiggins [1990] und in den dort zitierten Büchern beschrieben.

1.2 Partielle Differentialgleichungen

Jetzt werden wir die vorherigen Überlegungen für gewöhnliche Differentialgleichungen auf den Fall von partiellen Differentialgleichungen übertragen. Es sei G ein Gebiet des \mathbb{R}^m . Ein Punkt aus G wird mit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ bezeichnet. Auf G sei ein Vektor \mathbf{u} mit n -Komponenten u_1, u_2, \dots, u_n definiert. Die Komponenten von \mathbf{u} seien p -mal stetig differenzierbar. F sei eine Abbildung von $\mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei

$$\ell = m + n \left[1 + \frac{m}{1!} + \dots + \frac{m(m+1)\dots(m+p-1)}{p!} \right]. \quad (1.8)$$

Gesucht wird \mathbf{u} , so daß \mathbf{u} die folgende partielle Differentialgleichung erfüllt:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, D\mathbf{u}, \dots, D^p\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad (1.9)$$

wobei $D\mathbf{u}, \dots, D^p\mathbf{u}$ die partiellen Ableitungen von \mathbf{u} darstellen. Die partielle Differentialgleichung (1.9) ist der gewöhnlichen Differentialgleichung (1.1) formal ähnlich. Dennoch sind partielle Differentialgleichungen theoretisch und numerisch wesentlich schwieriger zu behandeln als gewöhnliche Differentialgleichungen.

1. Der numerische Aufwand steigt mit der Anzahl der Dimensionen sehr rasch. Dies läßt sich leicht einsehen. Wenn wir z.B. eine gewöhnliche Differentialgleichung auf dem Intervall $[0, 1]$ lösen wollen, können wir 1.000 Stützpunkte im Intervall nehmen und die Lösung auf diesen Stützpunkten mit einer modernen Rechenanlage schnell berechnen. Wenn wir eine partielle Differentialgleichung auf einem Einheitswürfel in d -Dimensionen betrachten und in jeder Richtung 1.000 Stützpunkte nehmen, dann gibt es insgesamt 10^{3d} Stützpunkte. Aus diesem Grunde wurde es erst in den letzten Jahren möglich, Probleme in 3 oder mehr Dimensionen mit annehmbarer Genauigkeit numerisch zu lösen, und die numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen ist ein Grund für die Entwicklung von sog. Super-Computern mit sehr großer Leistungskapazität.

2. Das allgemeine Gebiet in einer Dimension ist ein Intervall und dies hat sehr einfache topologische Eigenschaften. Bei Problemen in höheren Dimensionen ist es nötig, viel kompliziertere Gebiete zu betrachten. Man braucht nur daran zu denken, wenn man die Wärmeverteilung in einem Dieselmotor berechnen will. Die topologischen Komplikationen eines Dieselmotors mit seinen verschiedenen Brennkammern lassen sich leicht vorstellen. Man kann deshalb einsehen, daß die Betrachtung von relativ komplizierten Rändern immer sehr große Schwierigkeiten für partielle Differentialgleichungen mit sich bringt.
3. Die Theorie von partiellen Differentialgleichungen ist viel komplizierter als die von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Fragen über Existenz, Eindeutigkeit und Differenzierbarkeit der Lösung sind oft nicht leicht zu beantworten. Diese Schwierigkeiten spiegeln sich wider in der Theorie für numerische Methoden, weil es natürlich einen engen Zusammenhang gibt zwischen numerischen Methoden einerseits und der Existenz- und Eindeutigkeitstheorie andererseits. Viele Existenzsätze stützen sich sogar auf einfache numerische Methoden.
4. Die mathematische Theorie von und die numerischen Methoden für partielle Differentialgleichungen verlangen eine enge Verknüpfung mit den jeweiligen Anwendungen, so daß auch diese Bestandteil der Vorlesung sind.

Literaturverzeichnis

- [1] Courant, R.; Hilbert, D.: Methods of Mathematical Physics. Volume II. Partial Differential Equations. Interscience, 1962.
- [2] Großmann, Ch. ; Roos, H.-G.: Numerik partieller Differentialgleichungen. Teubner, 1992
- [3] Meis, T.; Marcowitz, U: Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen. Springer, 1978.
- [4] Quarteroni, A. ; Valli, A.: Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer, 1994.
- [5] Renardy, M. ; Rogers, R.C.: An Introduction to Partial Differential Equations. Springer, 1992.
- [6] Tychonoff, A.N.; Samarskii, A.A.: Differentialgleichungen der mathematischen Physik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1959.
- [7] Walter, W.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 2. Auflage. Springer, 1976.
- [8] Wiggins, S.: Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer, 1990.

Kapitel 2

Die Punktmechanik

2.1 Einleitung

Die Theorie partieller Differentialgleichungen wird sehr stark durch die Anwendungen beeinflußt, da dadurch interessante und wichtige Aufgaben erkannt werden können.

Viele partielle Differentialgleichungen entstehen in der Kontinuumsmechanik, die eine Erweiterung der Newtonschen Mechanik ist. Die Newtonsche Mechanik wird deshalb in diesem Kapitel kurz beschrieben.

2.2 Die Newtonschen Axiome

Die Newtonschen Axiome (Newton: 1643 - 1727) lauten:

Lex prima: Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Lex secunda: Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

Lex tertia: Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

Lex quarta: Zusatz zu den Bewegungsgesetzen: Regel vom Parallelogramm der Kräfte, d.h. Kräfte addieren sich wie Vektoren. Damit wird das Superpositionsprinzip der Kraftwirkungen festgelegt (das Prinzip der ungestörten Überlagerung).

Sei nun M ein Massenpunkt mit:

$$\begin{aligned}
 m &= m(t) : \text{ Masse zur Zeit } t \\
 \mathbf{x} &= \mathbf{x}(t) : \text{ Koordinaten zur Zeit } t \\
 \mathbf{v} &= \mathbf{v}(t) := \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} : \text{ Geschwindigkeit zur Zeit } t \\
 \mathbf{a} &= \mathbf{a}(t) := \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} : \text{ Beschleunigung zur Zeit } t
 \end{aligned}$$

Die Newtonschen Axiome lauten dann:

Axiom 2.1 (Das Trägheitsgesetz) *Der Massenpunkt verharrt im Zustand der Ruhe oder der geradlinigen gleichförmigen Bewegung, bis dieser Zustand durch das Einwirken von Kräften beendet wird. D.h.*

$$\mathbf{F} = 0 \implies \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 . \quad (2.1)$$

Axiom 2.2 (Das dynamische Grundgesetz) *Die erste zeitliche Ableitung des linearen Impulses des Massenpunktes ist gleich der auf ihn einwirkenden Kraft \mathbf{F} . D.h.*

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = \mathbf{F} . \quad (2.2)$$

Ist die Masse m konstant, dann gilt:

$$m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} . \quad (2.3)$$

(Kraft = Masse mal Beschleunigung.)

Die Beziehung

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) \quad (2.4)$$

ist zum einen Definition der Kraft, zum anderen Gesetz.

Wirken gleichzeitig mehrere Kräfte \mathbf{F}_i auf den Massenpunkt, so gilt

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = \mathbf{F} := \sum_i \mathbf{F}_i . \quad (2.5)$$

Axiom 2.3 (Das Reaktionsprinzip, Wechselwirkungsgesetz) Übt der Massenpunkt M_1 auf einen Massenpunkt M_2 die Kraft \mathbf{F}_{12} aus, so übt der Massenpunkt M_2 auf den Massenpunkt M_1 eine Kraft \mathbf{F}_{21} aus, deren Betrag gleich dem von \mathbf{F}_{12} und deren Richtung entgegengesetzt ist, $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$. (Kraft = Gegenkraft, zu jeder "actio" gehört eine "reactio".)

2.3 Das n -Körperproblem

Das berühmteste Beispiel der Anwendung der Newtonschen Axiome ist das n -Körperproblem.

Seien M_1 bis M_n ($n > 1$) n Punktmassen im \mathbb{R}^3 mit Koordinaten

$$\mathbf{r}_k(t) = (x_k(t), y_k(t), z_k(t))$$

und Massen m_k . Nach dem Newtonschen Anziehungsgesetz übt die Masse M_ℓ ($\ell \neq k$) eine Anziehungskraft

$$\mathbf{F}_{k\ell} = \gamma \frac{m_k m_\ell}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_\ell|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_\ell - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_\ell - \mathbf{r}_k|} \quad (2.6)$$

auf M_k , wobei γ die Gravitationskonstante ist.

Die Bewegungsgleichungen der n Körper sind:

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_k \mathbf{r}_k(t)) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n \mathbf{F}_{k\ell}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (2.7)$$

D.h. es gilt

$$m_k \ddot{x}_k = \gamma m_k \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n \frac{m_\ell \cdot (x_\ell - x_k)}{[|x_k - x_\ell|^2 + |y_k - y_\ell|^2 + |z_k - z_\ell|^2]^{3/2}} \quad (2.8)$$

mit entsprechenden Gleichungen für y_k und z_k . Dies ist ein System von $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die $3n$ Unbekannten $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$.

Das n -Körperproblem besteht in der Beschreibung des Gesamtverlaufes aller Lösungen der Bewegungsgleichungen für beliebig vorgegebene Anfangswerte. Trotz der Bemühungen hervorragender Mathematiker seit 250 Jahren ist dieses Problem für $n > 3$ bis heute ungelöst geblieben.

Die Geschichte des n -Körperproblems wird wie folgt in dem Buch von Siegel [1956, S. 21] beschrieben:

Im Jahre 1858 äußerte DIRICHLET zu seinem Freunde KRONECKER, er habe eine allgemeine Methode zur Behandlung der Probleme der Mechanik gefunden, und zwar gehe diese Methode nicht auf die direkte Integration der Differentialgleichungen der Bewegung aus, sondern bestehe in einer stufenweisen Annäherung an die Lösung des Problems. In einem anderen Gespräch sagte er noch, daß ihm der Beweis für die Stabilität des Planetensystems gelungen sei. Da DIRICHLET bald darauf starb und keine schriftlichen Aufzeichnungen über diese Entdeckungen hinterließ, so wissen wir nichts weiteres über seine Methode. WEIERSTRASZ vermutete, es handele sich dabei um Entwicklungen in Potenzreihen, und er bemühte sich dann, eine entsprechende Lösung des n -Körperproblems zu finden; auch wies er seine Schüler S. KOVALEVSKI und G. MITTAG-LEFFLER auf diesen Ansatz hin. Auf Anregung von MITTAG-LEFFLER stiftete der damalige König von Schweden und Norwegen sogar einen Preis für die Lösung der Aufgabe, eine für alle Zeiten gültige Reihenentwicklung der Koordinaten der n Körper zu finden. Der Preis wurde 1889 POINCARÉ zuerkannt, obwohl er die gestellte Aufgabe auch nicht gelöst hatte; doch enthält seine Preisschrift eine Fülle von originellen Ideen, die für die weitere Entwicklung der Mechanik von großer Bedeutung waren und auch andere Teile der Mathematik befruchteten. Schließlich wurde 20 Jahre später die Preisaufgabe im Falle $n = 3$ durch SUNDMAN gelöst. Die hauptsächliche Schwierigkeit des Problems röhrt davon her, daß es bisher nicht gelang, etwaige Zusammenstöße von zwei Körpern durch geeignete Ungleichheitsbedingungen für die Anfangswerte von vornherein dauernd auszuschließen. SUNDMAN umging diese Schwierigkeit, indem er an Stelle der Zeit t eine neue unabhängige Variable ω derart einführte, daß t und die sämtlichen Koordinaten q als Funktionen von ω auch bei einem Zusammenstoß zweier Körper noch regulär bleiben, und so gewann er Reihenentwicklungen von q und t nach Potenzen von ω , welche den gesamten Bewegungsvorgang darstellen.

Das n -Körperproblem bleibt noch ungelöst. Neuere Ergebnisse werden in Siegel und Moser [1971], Abraham und Marsden [1978] beschrieben.

2.4 Arbeit und Energie

Sei M ein Massenpunkt, der einer Kraft \mathbf{F} unterworfen ist und sich entlang einer Kurve C von P_1 nach P_2 bewegt.

Die geleistete Arbeit ist:

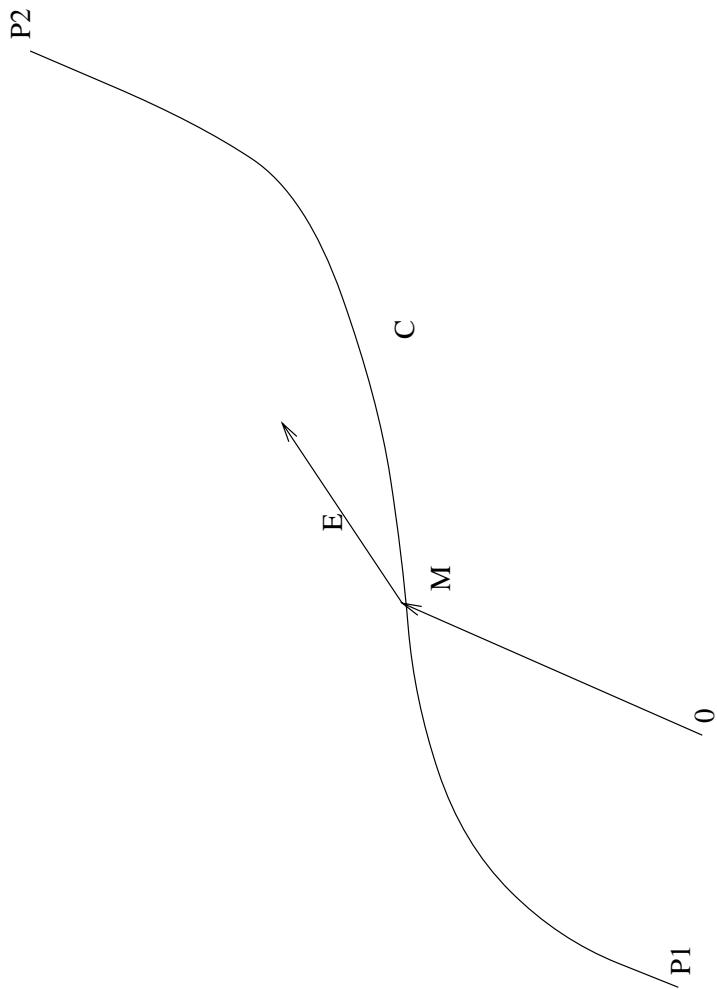


Abbildung 2.1: Bewegung eines Massenpunktes

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}(t)$$

Um einen Massenpunkt M zu beschleunigen und ihn auf eine bestimmte Geschwindigkeit v zu bringen, muß Arbeit geleistet werden. Diese steckt dann in Form von kinetischer Energie T im Massenpunkt. D.h.

$$\begin{aligned}
W &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} (m \frac{d\mathbf{v}}{dt}) \cdot \mathbf{v} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dt \\
&= \frac{1}{2} m (|\mathbf{v}_2|^2 - |\mathbf{v}_1|^2) \\
&= T_2 - T_1
\end{aligned}$$

wobei

$$T := \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2$$

die kinetische Energie eines Massenpunktes M mit Masse m und Geschwindigkeit \mathbf{v} ist.

Sei \mathbf{F} eine Kraft, die auf einen Massenpunkt M mit Koordinaten \mathbf{r} einwirkt. Sei $V(\mathbf{r})$ eine reelle Funktion mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{r}) &= -\operatorname{grad} V(\mathbf{r}) \\
&= -\nabla V(\mathbf{r}) \\
&= -\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Man spricht dann von einem konservativen Kräftefeld.

Wenn sich ein Massenpunkt unter Einwirkung einer konservativen Kraft \mathbf{F} von P_1 nach P_2 entlang einer Kurve C bewegt, ist die geleistete Arbeit

$$\begin{aligned}
W &= \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= - \int_{P_1}^{P_2} \operatorname{grad} V(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\
&= V(P_1) - V(P_2).
\end{aligned}$$

Diese Arbeit ist in diesem Fall somit wegunabhängig.

Gilt

$$\mathbf{F}^{(1)} = -\operatorname{grad} V(\mathbf{r}),$$

dann heißt die skalare Größe $V(\mathbf{r})$ potentielle Energie, skalares Potential oder kurz Potential.

Beispiel 2.1 Bei dem n -Körperproblem ist die Gravitationskraft, die auf den Massenpunkt M_k einwirkt, gleich

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_k &= \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n \mathbf{F}_{k\ell} \\ &= \gamma m_k \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n \frac{m_\ell \cdot (\mathbf{r}_\ell - \mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_\ell|^3} \\ &= -\operatorname{grad}_{\mathbf{r}_k} V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)\end{aligned}$$

mit

$$V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = -\gamma \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^{\ell-1} \frac{m_j m_\ell}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_\ell|},$$

so daß bei dem n -Körperproblem die Gravitationsskräfte konservativ sind.

Beweis:

Sei

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{a}) &:= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \\ &= \frac{1}{[(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2]^{1/2}}\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-1/2}{[(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2]^{3/2}} \cdot 2(x - a_1) = -\frac{x - a_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}_{\mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}; \mathbf{a}) &= \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{array} \right) \\ &= \frac{-(\mathbf{r} - \mathbf{a})}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3}.\end{aligned}$$

Für V gilt:

$$V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = - \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^{\ell-1} \gamma m_j m_\ell \varphi(\mathbf{r}_j; \mathbf{r}_\ell) ,$$

so daß

$$\begin{aligned} \text{grad}_{\mathbf{r}_k} V &= - \text{grad}_{\mathbf{r}_k} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n \gamma m_k m_\ell \varphi(\mathbf{r}_k; \mathbf{r}_\ell) \\ &= - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n \gamma m_k m_\ell \text{grad}_{\mathbf{r}_k} \varphi(\mathbf{r}_k; \mathbf{r}_\ell) \\ &= + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n \gamma m_k m_\ell \frac{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_\ell)}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_\ell|^3} \\ &= - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^k \mathbf{F}_{k\ell} = -\mathbf{F}_k \end{aligned}$$

Bemerkung 2.1

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}; \mathbf{a}) = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 ,$$

so daß φ und V die Laplace-Gleichung erfüllen.

Beweis:

Sei ohne Einschränkung $a = 0$.

$$\varphi_x = -\frac{x}{|r|^2} \cdot \varphi ,$$

woraus folgt, daß

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} &= -\frac{\varphi}{|r|^2} + \frac{x}{|r|^4} \cdot 2x \cdot \varphi - \frac{x}{|r|^2} \cdot \varphi_x \\ &= -\frac{\varphi}{|r|^2} + \frac{2 \cdot x^2 \varphi}{|r|^4} + \frac{x^2 \varphi}{|r|^4} \\ &= -\frac{\varphi}{|r|^2} + 3\varphi \frac{x^2}{|r|^4} \end{aligned}$$

Die Tatsache, daß φ eine Lösung der Laplace-Gleichung ist, folgt durch Summation von φ_{xx} , φ_{yy} und φ_{zz} .

Diese Eigenschaft von φ und V wird später verallgemeinert.

2.5 Erhaltungssätze

Seien M_1, \dots, M_n ein System von Punktmassen. Der Vektor

$$\mathbf{p} := \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k$$

heißt linearer Impuls des Systems.

Behauptung 2.1 (Erhaltung des linearen Impulses) *Solange keine äußeren Kräfte auf das System wirken, ist der lineare Impuls konstant.*

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} (m_k \mathbf{v}_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \quad (\text{Lex secunda}) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1, \ell \neq k}^n \mathbf{F}_{k\ell} \\ &= 0, \end{aligned}$$

da $\mathbf{F}_{k\ell} = -\mathbf{F}_{\ell k}$ (Lex tertia).

Der Vektor

$$\mathbf{L} := \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k$$

heißt Drehimpuls des Systems. Der Vektor

$$\mathbf{D} := \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k$$

heißt Drehmoment.

Behauptung 2.2 (Erhaltung des Drehimpulses) *Solange keine äußeren Kräfte auf das System wirken, ist der Drehimpuls konstant.*

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathbf{L} &= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k \\
 &= \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{v}}_k + \sum_{k=1}^n m_k \dot{\mathbf{r}}_k \times \mathbf{v}_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k + \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k \times \mathbf{v}_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{k\ell} \quad (\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell < k}^n (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_\ell) \times \mathbf{F}_{k\ell} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

da $\mathbf{F}_{k\ell}$ ein Vielfaches von $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_\ell)$ ist.

Behauptung 2.3 (Erhaltung der Energie) *Solange keine äußeren Kräfte auf das System wirken, ist die Gesamtenergie $E := T + V$ konstant.*

Beweis: Es gelte:

$$m_k \mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k = -\text{grad}_{\mathbf{r}_k} V$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k |\mathbf{v}_k|^2 \\
 &= \sum_{k=1}^n m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \mathbf{v}_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{F}_k \\
 &= - \sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}_k} V \\
 &= - \sum_{k=1}^n \text{grad}_{\mathbf{r}_k} V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \cdot \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \\
 &= - \frac{dV}{dt}.
 \end{aligned}$$

Als erstes Integral für eine C^1 -Kurve $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ bezeichnet man eine C^1 -Funktion $H : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\frac{d}{dt} H(\xi(t)) \equiv 0$, d.h. H ist konstant längs der Kurve $\xi(t)$.

Für das n -Körperproblem ergeben sich also folgende erste Integrale für $(x_1, \dots, \dot{z}_n) \in \mathbb{R}^{6n}$:

- a) 3 erste Integrale, die die Erhaltung des linearen Impulses beschreiben, z.B.

$$\sum_{k=1}^n m_k \dot{x}_k = \text{const}$$

- b) 3 erste Integrale, die die Erhaltung des Drehimpulses beschreiben, z.B.

$$\sum_{k=1}^n m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k) = \text{const}$$

- c) 1 erstes Integral, das die Erhaltung der Gesamtenergie beschreibt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k |\mathbf{v}_k|^2 + V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = \text{const}$$

- d) 3 weitere erste Integrale, z.B.:

$$\sum_{k=1}^n m_k (x_k - t \dot{x}_k) = \text{const}$$

Es wurde von Bruns gezeigt, daß jedes weitere algebraische erste Integral für das n -Körperproblem eine Linearkombination dieser zehn ist.

Literatur

Abraham, R.; Marsden, J.E.: Foundations of Mechanics. Reading, Mass.: Benjamin Cummings, 1978.

Siegel, C.L.: Vorlesungen über Himmelsmechanik. Berlin: Springer, 1956.

Siegel, C.L.; Moser, J.K.: Lectures on Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971.

Kapitel 3

Die Kontinuumsmechanik

Die Kontinuumsmechanik ist eine Erweiterung der Punktmechanik. In der Punktmechanik werden Eigenschaften, wie Masse, idealisierten Massenpunkten zugeordnet. In der Kontinuumsmechanik dagegen wird so postuliert, daß solche Eigenschaften räumlich verteilt sind und durch Dichtefunktionen beschrieben werden können, so daß z.B. die Masse eines Volumenelements V durch

$$\int_V \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.1)$$

gegeben wird, wobei $\rho(\mathbf{x})$ die Dichte im Punkt \mathbf{x} ist.

Literatur:

Becker, E. und Bürger, W.: Kontinuumsmechanik. Stuttgart: Teubner, 1975.

Prager, W.: Einführung in die Kontinuumsmechanik. Basel: Birkhäuser, 1961.

Truesdell, C.: The Elements of Rational Continuum Mechanics. Berlin: Springer, 1965.

Truesdell, C. und Toupin, R.A.: The Classical Field Theories. Handbuch der Physik, Bd. III/1. Berlin: Springer, 1960.

3.1 Gravitation

Gemäßdem Newtonschen Anziehungsgesetz übt ein Massenpunkt M mit Masse m im Punkt ξ eine Anziehungskraft

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= +\gamma \frac{m}{|\xi - \mathbf{x}|^2} \cdot \frac{\xi - \mathbf{x}}{|\xi - \mathbf{x}|} \\ &= +\gamma \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} \frac{m}{|\mathbf{x} - \xi|}\end{aligned}\quad (3.2)$$

auf einen Einheitsmassenpunkt im Punkt \mathbf{x} aus, wobei γ eine Konstante ist.

$$u(\mathbf{x}; M) := \frac{m}{|\mathbf{x} - \xi|} \quad (3.3)$$

heißt die Potentialfunktion des Massenpunktes $M(\xi)$. (N.B.: $u(\mathbf{x}; M)$ ist die Potentialfunktion aus dem letzten Kapitel mit umgekehrten Vorzeichen.)

Sei nun $V \subset \mathbb{R}^3$ ein Körper mit der stetigen DichteVerteilung $\rho(\xi)$. Um das Potential u von V in einem Punkt \mathbf{x} außerhalb V zu bestimmen, zerlegt man V in hinreichend kleine Teilgebiete ΔV und summiert die entsprechenden Potentiale. Es folgt:

$$u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}; V) := \int_V \frac{\rho(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|} d\xi \quad (\mathbf{x} \notin V) \quad (3.4)$$

$$= \int_V \rho(\xi) \varphi(\mathbf{x}; \xi) d\xi \quad (3.5)$$

mit

$$\varphi(\mathbf{x}; \xi) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|}. \quad (3.6)$$

Für $\mathbf{x} \notin V$ ist $\varphi(\mathbf{x}; \xi)$ eine glatte Funktion von \mathbf{x} , die die Laplace-Gleichung

$$\Delta \varphi = \nabla^2 \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \quad (3.7)$$

erfüllt. Es folgt, daß $u(\mathbf{x}; V)$ ebenfalls eine (glatte) harmonische Funktion ist:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad (3.8)$$

(Dies wurde 1782/85 durch Laplace zuerst bewiesen.)

Der Körper V übt eine Anziehungskraft

$$\mathbf{F} = +\gamma \operatorname{grad} u(\mathbf{x}; V) \quad (3.9)$$

auf einen Einheitsmassenpunkt im Punkt \mathbf{x} aus.

Die o.a. Formeln setzen voraus, daß $\mathbf{x} \notin V$. Aber die Schwerkraft ist auch innerhalb eines Körpers, z.B. der Erde, vorhanden. Es ergibt sich dann die Frage, ob diese Formeln auch für $\mathbf{x} \in V$ gültig sind.

Definition 3.1 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\alpha \in (0, 1]$. f heißt Hölderstetig mit Exponent α auf D , wenn

$$\sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\alpha} < \infty.$$

Hölderstetige Funktionen sind stetig.

Satz 3.1 (Poisson, 1813) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $n \geq 3$. Sei $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}$ Hölderstetig mit Exponent α auf D . Sei

$$u(\mathbf{x}) = \int_D \frac{\rho(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|^{n-2}} d\xi$$

und

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)},$$

[die Oberfläche der n -dimensionalen Einheitskugel].

Dann ist $u(\mathbf{x})$ stetig für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und zweimal stetig differenzierbar für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \partial D$, und

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & , \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{D} \\ -(n-2)\omega_n \rho(\mathbf{x}) & , \quad \mathbf{x} \in D \end{cases}$$

Insbesondere für $n = 3$ gilt:

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & , \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D} \\ -4\pi\rho(\mathbf{x}) & , \quad \mathbf{x} \in D \end{cases}$$

Beweis:

Siehe Gilbarg und Trudinger [1977, Lemma 4.2], Günter [1957, S. 87], Kellogg [1953, S. 156], Forster [1984, S. 163]. Der Beweis von Forster setzt voraus, daß $\rho \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Günter gibt eine nur stetige Funktion ρ an, für die eine der zweiten Ableitungen von u nicht definiert ist. Dies zeigt, daß man i.A. auf die Hölderstetigkeit von ρ nicht verzichten kann. Der Beweis von Kellogg erlaubt bestimmte Unstetigkeiten von ρ , fordert aber, daß

V "regulär" sei.

Literatur:

Forster, O.: Analysis 3. Braunschweig: Vieweg, 1984.

Gilbarg, D. und Trudinger, N.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin: Springer, 1977.

Günter, N.M.: Die Potentialtheorie und ihre Anwendungen auf Grundaufgaben der mathematischen Physik. Leipzig: Teubner, 1957. [Übersetzung aus der französischen Ausgabe von 1934.] [In der Institutsbibliothek.]

Kellogg, O.D.: Foundations of Potential Theory. New York: Dover, 1953. [Neudruck der Ausgabe von 1929.]

3.2 Elektromagnetische Felder

Im Jahre 1785 wurden folgende Gesetze von Coulomb gefunden:

1. Coulombsches Gesetz (elektrostatisches Gesetz)

Seien Q_1 und Q_2 zwei punktförmige elektrische Ladungen mit Koordinaten \mathbf{r}_1 bzw. \mathbf{r}_2 . Die Ladung Q_2 übt die Kraft

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q_1 Q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

auf Q_1 , wobei

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= \text{elektrische Feldkonstante (Influenzkonstante)} \\ \epsilon_r &= \text{relative Dielektrizitätskonstante}\end{aligned}$$

2. Coulombsches Gesetz (magnetisches Gesetz)

Seien p_1 und p_2 zwei punktförmige Magnetpole mit Koordinaten \mathbf{r}_1 bzw. \mathbf{r}_2 . Der Pol p_2 übt die Kraft

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{1}{4\pi\mu_0\mu_1} \cdot \frac{p_1 p_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

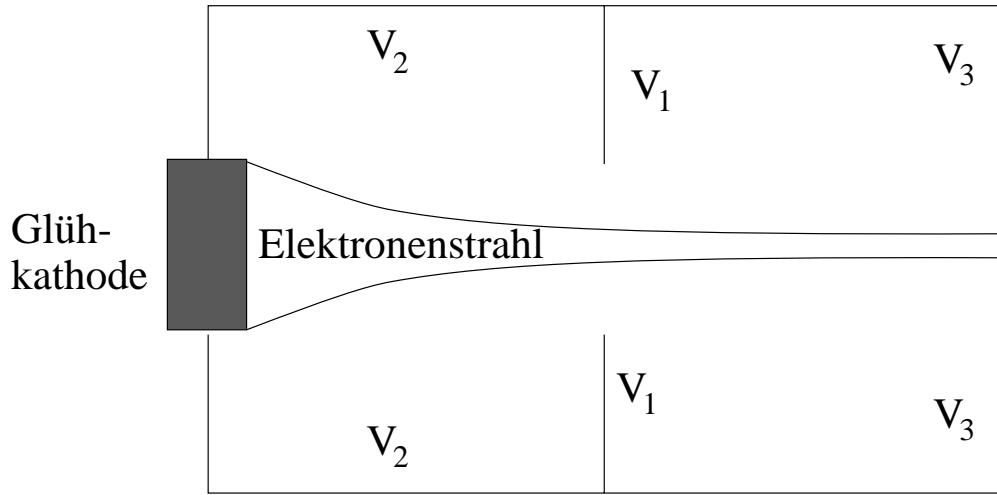


Abbildung 3.1: Eine Elektronenkanone

auf p_1 , wobei

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \text{magnetische Feldkonstante (Induktionskonstante)} \\ \mu_r &= \text{relative Permeabilität}\end{aligned}$$

Es folgt aus den Coulombschen Gesetzen, daß die Theorie der Gravitationspotentiale sofort auf die Theorie der elektrischen und magnetischen Kraftfelder übertragen werden kann. (Elektrisches Potential, Magnetisches Potential.) Es gibt sehr viele wichtige praktische Anwendungen, z.B. Elektronenmikroskope, Elektronenröhren, Elektronenkanonen (siehe Abbildung 3.1, wobei V eine harmonische Funktion mit den angegebenen Randwerten ist).

Noch allgemeiner sind die Maxwellschen Gleichungen:

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0 \\ \text{div } \mathbf{D} &= 4\pi\rho \\ \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E}\end{aligned}$$

mit

-
- \mathbf{E} = elektrische Feldstärke
 \mathbf{H} = magnetische Feldstärke
 \mathbf{j} = Stromdichte
 ρ = Ladungsdichte
 c = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
 μ = magnetische Permeabilität
 σ = Leitfähigkeit
 ϵ = Dielektrizitätskonstante

3.3 Erhaltungssätze (einfache Form)

Satz 3.2 (Gaußscher Integralsatz) Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand, $\mathbf{n} : \partial V \rightarrow \mathbb{R}^n$ der äußere Einheitsnormalenvektor und $U \supset V$ eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n . Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Beweis: Forster, Analysis 3, S. 155.

Wir betrachten jetzt eine Materialeigenschaft E , für die ein Erhaltungsgesetz gelte.
Sei

$\Psi :=$ Menge E pro Volumeneinheit, d.h. in einem Volumenelement ΔV ist $\Delta V \Psi$ von E vorhanden.

$e :=$ Menge E , die pro Volumeneinheit und Zeiteinheit erzeugt (oder benutzt) wird, d.h. in einem Volumenelement ΔV wird in Zeit Δt die Menge $\Delta V \Delta t e$ von E erzeugt (oder benutzt).

$\mathbf{q} :=$ Stromdichte, d.h. durch ein Flächenelement ΔS mit Normalen \mathbf{n} fließt in Zeit Δt die Menge $\Delta S \Delta t \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ von E .

Sei nun $V \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand und äußerem Normalenvektor \mathbf{n} . Da E erhalten wird, folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \Psi(\mathbf{x}; t) d\mathbf{x} = \int_V e \, d\mathbf{x} - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes folgt:

$$\int_V \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} - e + \operatorname{div} \mathbf{q} \right) d\mathbf{x} = 0 .$$

Da V eine beliebige Teilmenge von \mathbb{R}^n war, gilt

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} - e + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in V .$$

Einige Anwendungen folgen.

3.4 Die Advektionsgleichung

Eine Flüssigkeit (z.B. Luft oder Wasser) bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit \mathbf{v} . Die Flüssigkeit trägt einen Schadstoff mit sich, dessen Dichte pro Volumeneinheit u sei.

In bezug auf die Gleichungen in Absatz 3.3 gilt:

$$\begin{aligned}\Psi &= u \\ e &= 0 \\ \mathbf{q} &= u\mathbf{v}\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} u = 0 .$$

3.5 Die Wärmeleitungsgleichung

Sei Ω eine Teilmenge von \mathbb{R}^m . Wir betrachten die Wärmeverteilung in Ω für Zeit t in einem endlichen oder unendlichen Intervall I . Sei $G := \Omega \times I$, $u(\mathbf{x}, t)$ die Temperatur an einem Punkt $(\mathbf{x}, t) \in G$ (siehe Abbildung 3.2).

Der Wärmeinhalt an einem Punkt aus G wird mit $H(\mathbf{x}, t)$ bezeichnet. H ist die Wärme [Energie], die benötigt wird, um ein Einheitsvolumen des Materials von Null Grad Kelvin bis zum jetzigen Zustand zu bringen $[0^\circ K = -273^\circ C]$.

Wärme wird durch chemische Reaktionen, radioaktiven Verfall, Erhitzung mittels Mikrowellen o.ä. erzeugt, und zwar in einer Höhe von $e(x, t, u, H)$ Wärmeeinheiten pro Einheitsvolumen und Einheitszeit.

Ist die Temperatur nicht konstant, so entsteht ein Wärmestrom. Sei $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ die *Wärmestromdichte*:

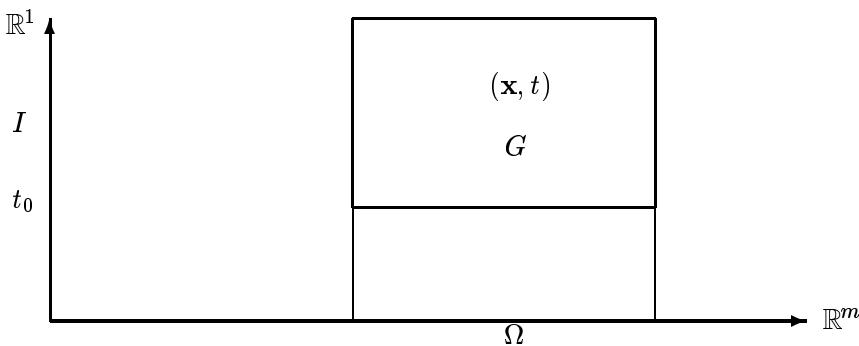


Abbildung 3.2:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = (q_1(\mathbf{x}, t), \dots, q_n(\mathbf{x}, t))^T .$$

D.h. durch das Flächenelement im Punkt \mathbf{x} mit Oberflächeninhalt ΔS und Normalen \mathbf{n} fließt während des Zeitintervalls $(t, t + \Delta t)$ die Wärmemenge ΔH

$$\Delta H = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \Delta S \Delta t .$$

In bezug auf die Gleichungen in Absatz 3.3 gilt $\Psi = H$. Es folgt:

$$\frac{\partial H}{\partial t} - e + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0 .$$

Es bleibt, die Beziehung zwischen dem Wärmeinhalt H , der Wärmestromdichte \mathbf{q} und der Temperatur u anzugeben. Diese Beziehungen (constitutive equations) sind natürlich vom Material abhängig. Obwohl ihre Gestalt auf Grund theoretischer Überlegungen oft etwas eingeschränkt werden kann, basieren sie letztendlich auf experimentellen Ergebnissen und sind deshalb teilweise sehr umstritten. In unserem Fall werden wir annehmen, daß der Wärmestrom nach dem *Fourierschen Gesetz* (Fourier 1822) gegeben ist:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -K(\mathbf{x}, t, u(\mathbf{x}, t)) \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t) , \quad (3.10)$$

wobei K eine $n \times n$ -Matrix ist mit Komponenten, die von \mathbf{x}, t und u abhängig sind. Diese Gleichung (3.10) ist sehr allgemein und wird nur erwähnt, damit die möglichen Verallgemeinerungen zur Kenntnis genommen werden. Es wird oft angenommen, daß K von u unabhängig ist. Ist das Material homogen, dann ist K von \mathbf{x} unabhängig. Ist das Material isotropisch, dann ist K ein Vielfaches der Einheitsmatrix und Gleichung (3.10) nimmt die einfache Gestalt an:

$$\mathbf{q} = -k \operatorname{grad} u , \quad [\operatorname{grad} := \operatorname{grad}_{\mathbf{x}}] , \quad (3.11)$$

wobei k die *Wärmeleitfähigkeit* des Materials ist.

Wir werden uns in Zukunft fast ausschließlich mit Gleichung (3.11) beschäftigen. Es sollte aber bemerkt werden, daß die Komplikationen, die in Gleichung (3.10) dargestellt werden, oft in der Praxis vorkommen können. Es gibt nämlich in der Natur und auch in der modernen Industrie viele Werkstoffe, die weder isotropisch noch homogen sind und für die die Wärmeleitfähigkeitsmatrix K von der Temperatur u abhängig ist.

Der Wärmeinhalt H kann auch oft eine komplizierte Funktion der Temperatur u sein. Ein besonders interessanter Fall ist, wenn u_0 die Schmelztemperatur des Stoffes ist, weil dann H um die latente Wärme (Umwandlungsenthalpie) einen Sprung macht, so daß H nicht eine eindeutige Funktion von u ist. Diesen Fall (eine *freie Randwertaufgabe*) werden wir evtl. später näher besprechen. Im jetzigen Absatz wird allerdings angenommen, daß H wie folgt definiert ist:

$$H = \rho c u , \quad (3.12)$$

wobei c die *spezifische Wärmekapazität* und ρ die *Dichte* bezeichnen; c und ρ seien Konstanten.

Durch Ersetzen von H und \mathbf{q} durch Gleichungen (3.11) und (3.12) erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho c} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + \frac{e}{\rho c} , \quad \text{für } (\mathbf{x}, t) \in G . \quad (3.13)$$

Die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u , \quad (3.14)$$

die *Wärmeleitungsgleichung*, erhält man, falls $e \equiv 0$ und $\rho = c = k = 1$.

Literatur:

Carslaw, H.S., Jaeger, J.C.: Conduction of Heat in Solids. Oxford: Clarendon Press, 1959.

Grigull, U., Sondner, H.: Wärmeleitung. Berlin: Springer, 1979. (In der Inst. Bibl.)

3.6 Gleichungen, die mit der Wärmeleitungsgleichung verwandt sind

3.6.1 Die Diffusionsgleichung

Ist die Konzentration $u(\mathbf{x})$ eines gelösten Stoffes nicht überall gleich, so erfolgt Diffusion von Stellen höherer Konzentration zu Stellen niedriger Konzentration. Die *Diffusions-*

gleichung beschreibt diesen Vorgang:

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) , \quad (3.15)$$

wobei

$$\begin{aligned} c &= \text{Porositätskoeffizient} \\ D &= \text{Diffusionskoeffizient} \end{aligned}$$

Die Herleitung der Diffusionsgleichung ist fast identisch mit der Herleitung der Wärmeleitungsgleichung. Statt des Fourierschen Gesetzes gilt das Ficksche Gesetz (Fick, 1855):

$$\mathbf{q} = -D \operatorname{grad} u$$

Ein Unterschied zwischen der Wärmeleitungsgleichung und der Diffusionsgleichung ist, daß der Diffusionskoeffizient D oft eine nichtlineare Funktion der Konzentration u ist.

Literatur:

Crank, J.: The Mathematics of Diffusion, 2. ed. Oxford: Clarendon Press, 1975.

Jacobs, M.H.: Diffusion Processes. Berlin: Springer, 1967.

3.6.2 Konvektion-Diffusion

Die Konvektion-Diffusions-Gleichung (englisch: convection-diffusion or advection-diffusion)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon \Delta u + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} u \quad (3.16)$$

beschreibt die zeitlichen und örtlichen Änderungen der Konzentration $u(\mathbf{x}, t)$ eines Stoffes, der gleichzeitig diffundiert und durch einen Strom mit konstanter Geschwindigkeit \mathbf{v} getragen wird. Hierbei sei ϵ eine Konstante.

Diese Gleichung ist z.B. für die Berechnung der Luft- und Wasserverschmutzung wichtig.

Die numerische Lösung beinhaltet mehrere Schwierigkeiten, wenn ϵ klein oder \mathbf{v} groß ist.

3.6.3 Reaktion-Diffusion

Die Hodgkin-Huxley-Gleichungen

$$\begin{aligned}
 cu_t &= R^{-1}u_{xx} + g(u, v, w, z) \\
 v_t &= \epsilon_1 v_{xx} + g_1(u)(h_1(u) - v) \\
 w_t &= \epsilon_2 w_{xx} + g_2(u)(h_2(u) - w) \\
 z_t &= \epsilon_3 z_{xx} + g_3(u)(h_3(u) - z) ,
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

wobei c und R positive, $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ nichtnegative Konstanten sind, beschreiben die Übertragung von Information in Nervenbahnen.

Ähnliche Gleichungen treten auf bei der Modellierung einiger chemischer Reaktionen, z.B. (Aris [1975, S. 3]):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u - \phi^2 R(u, v) \\
 \frac{\partial v}{\partial t} &= \Delta v + \beta \phi^2 R(u, v)
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 u &= \text{Konzentration des Stoffes} \\
 v &= \text{Temperatur} \\
 R &= \text{Reaktionsgeschwindigkeit (bekannt)} \\
 \phi &= \text{Thiele-Modulus (Konstante)} \\
 \beta &= \text{Praterzahl (Konstante)} .
 \end{aligned}$$

Literatur:

Aris, R.: The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalysts. Vol. 2. Oxford, 1975.

Buckmaster, J.D. und Ludford, G.S.S.: Theory of Laminar Flames. Cambridge, 1982.

Smoller, J.: Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. New York: Springer, 1983.

3.6.4 Gasströmung in Porösen Medien

Für ein Gas in einem porösen Medium gilt:

$$\mathbf{q} = -k \mathbf{grad} p ,$$

wobei k eine Konstante und p der Druck ist. Wegen der Erhaltung der Masse ergibt sich:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{q}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 ,$$

wobei ρ die Dichte ist. Wenn

$$p = c\rho^\gamma \quad (3.18)$$

ist, dann folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u^m \quad (m > 1) \\ &= (u^m)_{xx} + (u^m)_{yy} + (u^m)_{zz} \end{aligned} \quad (3.19)$$

mit

$$\begin{aligned} m &:= 1 + \gamma \\ u &:= \alpha\rho \end{aligned}$$

(Siehe Friedman [1982, Seite 589].)

Literatur:

Friedman, A.: Variational Principles and Free Boundary Problems. New York: Wiley, 1982.

3.6.5 Sickerströmung

Das Strömungspotential $\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi((x, y, z), t)$ einer Sickerströmung genügt der Differentialgleichung (Bear [1972, S. 199]):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{K} \cdot \operatorname{grad} \varphi) &= 0 \\ \varphi &:= z + p/\gamma \\ \mathbf{q} &= \mathbf{K} \cdot \operatorname{grad} \varphi \end{aligned} \quad (3.20)$$

\mathbf{q} bezeichnet dann die Geschwindigkeit der Sickerströmung.

Die Gleichung

$$\mathbf{q} = \mathbf{K} \operatorname{grad} \varphi$$

heißt das verallgemeinerte Darcysche Gesetz (Darcy, 1856). Wegen der geologischen Geschichte des Bodens ist \mathbf{K} oft anisotropisch und inhomogen.

Bei der Förderung von Erdöl entstehen folgende Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \cdot [\lambda_o K(\mathbf{x})(\operatorname{grad} P_o - \rho_o g)] &= \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial(\Phi \rho_o S_o)}{\partial t} + q_o \\ \operatorname{div} \cdot [\lambda_w K(\mathbf{x})(\operatorname{grad} P_w - \rho_w g)] &= \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial(\Phi \rho_w S_w)}{\partial t} + q_w\end{aligned}$$

$$t > 0 , \quad \mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega$$

$$S_o + S_w = 1 ,$$

$$P_{cow} = P_o - P_w = f(S_w)$$

mit der Anfangsbedingung

$$P_l(x, y, z, 0) = P_l^o(x, y, z) \quad \text{für } l = o, w \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

und den Randbedingungen

$$\frac{\partial P_l}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad l = o, w \quad \text{für } \mathbf{x} \in \partial\Omega , \quad t > 0$$

Die Indizes o und w entsprechen Öl bzw. Wasser.

Literatur:

Bear, J.: Dynamics of Fluids in Porous Media. American Elsevier, 1972.

Freeze, J. und Cherry, J.A.: Groundwater. Prentice Hall, 1979.

Hornung, U. und Messing, W.: Poröse Medien-Methoden und Simulation. Beiträge zur Hydrologie, 1984.

Kinzelbach, W.: Groundwater Modelling. Amsterdam: Elsevier, 1986.

Knabner, J.: Mathematische Modelle fuer Transport und Sorption gelöster Stoffe in porösen Medien. Peter Lang, 1991.

Zhu, J.: Using a hypercube to solve inverse problems in reservoir simulations. SIAM News 25, No. 2, March 1992, S. 1.

Kapitel 4

Die Kontinuumsmechanik: die Kinematik

4.1 Die Bewegung eines Körpers

In der Punktmechanik sind Punktmassen behandelt worden. In der Kontinuumsmechanik betrachten wir materielle Körper, d.h. zusammenhängende Menge von Materiepunkten.

Sei \mathcal{B} ein Körper, dessen Bewegung betrachtet wird. Die Materiepunkte von \mathcal{B} werden mit \mathbf{X} bezeichnet, wobei \mathbf{X} die räumlichen Koordinaten des Materiepunktes zu einem festen Zeitpunkt darstellt. Die Koordinaten \mathbf{X} heißen materielle Koordinaten. Zu jedem Zeitpunkt t hat der Materiepunkt \mathbf{X} räumliche Koordinaten $\mathbf{x} := \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. Es wird vorausgesetzt, daß die Abbildung

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \chi(\mathbf{X}, t)$$

ein Diffeomorphismus ist, so daß insbesondere für jedes feste t die inverse Abbildung $\chi^{-1}(\cdot, t)$ mit

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)$$

existiert. (Siehe Abbildung 4.1.)

4.2 Die Ansätze von Euler und Lagrange

In der Punktmechanik wird die Bewegung einzelner Massenpunkte analysiert. In der Kontinuumsmechanik kann man ebenfalls der Bewegung eines Materiepunktes folgen, z.B. die Geschwindigkeit $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ des Materiepunktes \mathbf{X} ist

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \chi(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) .$$

Diese Betrachtungsweise heißt auch der Lagrangische Ansatz.

Referenzkonfiguration
des Körpers

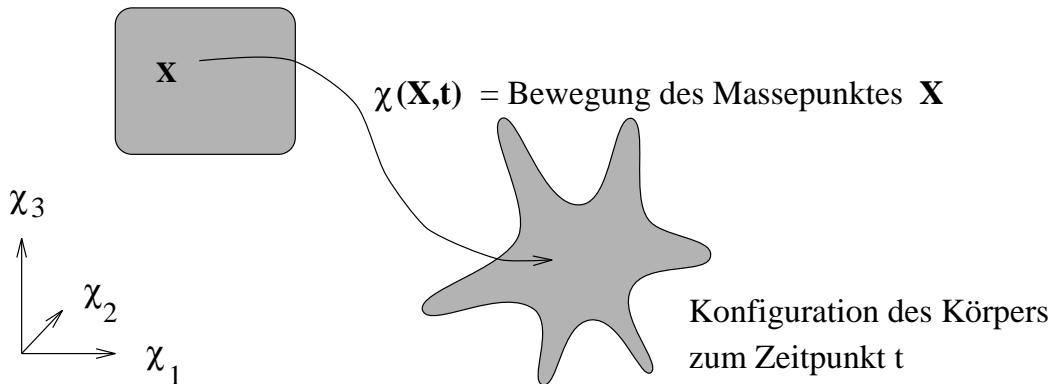


Abbildung 4.1: Deformation eines Körpers

In mehreren Anwendungen benutzt man den Eulerschen Ansatz, indem die Eigenschaften der Bewegung in einem festen Punkt x betrachtet werden. Dann ist z.B.

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t)$$

die Geschwindigkeit des Materiepunktes \mathbf{X} , der sich zur Zeit t an der Position $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$ befindet.

Sei nun f eine skalare Funktion, die von der Bewegung abhängig ist. Die materielle oder substantielle Ableitung $\frac{Df}{Dt}$ ist definiert als

$$\frac{Df}{Dt} = \left. \frac{df}{dt} \right|_{\mathbf{x} \text{ konstant}} .$$

Ist $f = f(\mathbf{X}, t)$, dann folgt

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{X}, t) ,$$

d.h. Df/Dt ist einfach die partielle Ableitung von f in t -Richtung.

Ist $f = f(\mathbf{x}, t)$, dann folgt aus $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$ und $f(\mathbf{x}, t) = f(\chi(\mathbf{X}, t), t)$, daß

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt} &= \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \chi_i}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) \cdot V_i(\mathbf{X}, t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}_i(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) . \end{aligned}$$

Falls f eine vektorwertige Funktion ist, ist die Definition von Df/Dt komponentenweise zu verstehen.

4.3 Die Bilanzgleichungen

Satz 4.1 (Reynoldsches Transporttheorem) *Sei $\mathcal{B}(t)$ ein materieller Körper. Dann gilt:*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}(t)} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{B}(t)} \left(\frac{Df}{Dt}(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t) \cdot \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) d\mathbf{x} .$$

Beweis:

Das Integral über $\mathcal{B}(t)$ wird mittels der Transformationsformel für mehrfache Integrale auf ein Integral über die Referenzkonfiguration $\mathcal{B}(0)$ zurückgeführt:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}(t)} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}(0)} f(\chi(\mathbf{X}, t)) |\det J(\mathbf{X}, t)| d\mathbf{X} .$$

Dabei ist $J(\mathbf{X}, t)$ die Jacobimatrix von χ bezüglich \mathbf{X} . Da $\chi(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$, χ stetig in \mathbf{X} und t und $\chi(\cdot, t)$ invertierbar für alle t , ist $\det J$ immer positiv, und die Betragstriche können weggelassen werden. $\frac{d}{dt}$ und $\int_{\mathcal{B}(0)}$ können jetzt vertauscht werden, und man erhält das Ergebnis durch Ableiten des Integranden.

4.3.1 Erhaltung der Masse

Sei $\mathcal{B}(t)$ ein materieller Körper. Es gelte für $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}(t)} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 .$$

Mit Hilfe des Reynoldschen Transporttheorems folgt:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

oder

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 .$$

4.3.2 Erhaltung des linearen Impulses

Das Lex secunda von Newton gibt

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} . \quad (4.1)$$

Sei $\mathcal{B}(t)$ ein materieller Körper. In Anlehnung an diese Gleichung setzen wir voraus, daß der lineare Impuls erhalten wird. Konkret heißt es

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}(t)} \rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\partial\mathcal{B}(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\mathcal{B}(t)} \rho(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x})d\mathbf{x} .$$

Die Deutung von \mathbf{t} und \mathbf{b} wird später erläutert. Hier genügt es zu sagen, daß $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ ein Vektor ist und $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ ein Tensor zweiter Stufe, der als 3×3 -Matrix dargestellt werden kann.

Nach Anwendung des Reynoldschen Transporttheorems folgt:

$$\int_{\mathcal{B}(t)} \left(\frac{D}{Dt}(\rho\mathbf{v}) + \rho\mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{t} - \rho\mathbf{b} \right) d\mathbf{x} = 0$$

mit

$$\operatorname{div} \mathbf{t} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial t_{1i}}{\partial x_i}, \frac{\partial t_{2i}}{\partial x_i}, \frac{\partial t_{3i}}{\partial x_i} \right)^T .$$

Da $\mathcal{B}(0)$ und χ , damit auch $\mathcal{B}(t)$ beliebig sind, folgt

$$\frac{D}{Dt}(\rho\mathbf{v}) + \rho\mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{t} - \rho\mathbf{b} = 0 .$$

Unter Benutzung der Gleichung für die Erhaltung von Masse folgt:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \operatorname{div} \mathbf{t} - \rho\mathbf{b} = 0 .$$

(Das erste Gesetz von Cauchy.)

4.3.3 Erhaltung des Drehimpulses

Für ein diskretes System von Massenpunkten folgt aus den Newtonschen Axiomen, daß der Drehimpuls erhalten wird:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{x}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) = 0 .$$

Sei nun $\mathcal{B}(t)$ ein materieller Körper. Hier setzen wir die Erhaltung des Drehimpulses voraus:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}(t)} \mathbf{x} \times \rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\partial\mathcal{B}(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\mathcal{B}(t)} \mathbf{x} \times \rho(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

woraus mit Hilfe des Reynoldschen Transporttheorems folgt, daß

$$\frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{x} \times \mathbf{v}) + \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{div}(\mathbf{x} \times \mathbf{t}) - \rho \mathbf{x} \times \mathbf{b} = 0 ,$$

oder

$$\rho \frac{D}{Dt}(\mathbf{x} \times \mathbf{v}) - \operatorname{div}(\mathbf{x} \times \mathbf{t}) - \rho \mathbf{x} \times \mathbf{b} = \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \mathbf{x} \times \mathbf{v} = 0 .$$

Weitere Manipulationen liefern

$$\rho \mathbf{x} \times \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \mathbf{x} \times (\operatorname{div} \mathbf{t}) - (\operatorname{grad} \mathbf{x}) \times \mathbf{t} - \rho \mathbf{x} \times \mathbf{b} = 0 ,$$

(da $\frac{D\mathbf{x}}{Dt} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$) und

$$\mathbf{x} \times \left(\rho \frac{D\mathbf{v}}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{t} - \rho \mathbf{b} \right) - (\operatorname{grad} \mathbf{x}) \times \mathbf{t} = 0 .$$

In dieser Gleichung verschwindet der erste Term (erstes Gesetz von Cauchy), so daß schließlich

$$(\operatorname{grad} \mathbf{x}) \times \mathbf{t} = 0 .$$

Es gilt aber

$$\operatorname{grad} \mathbf{x} = 1$$

und, mit Hilfe der Levi-Civita Symbole ϵ_{ijk} ,

$$(\operatorname{grad} \mathbf{x} \times \mathbf{t})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} t_{jk} ,$$

so daß

$$\operatorname{grad} \mathbf{x} \times \mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_{23} - t_{32} \\ t_{31} - t_{13} \\ t_{12} - t_{21} \end{pmatrix} = 0 ,$$

d.h., der Tensor \mathbf{t} ist symmetrisch.

Dabei sind die ϵ_{ijk} definiert als

$$\begin{cases} 1 & , \text{ falls } (i, j, k) \text{ eine gerade Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist} \\ -1 & , \text{ falls } (i, j, k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist} \\ 0 & , \text{ falls } (i, j, k) \text{ keine Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist} \end{cases}$$

4.3.4 Erhaltung der Energie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}(t)} (E + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\partial \mathcal{B}(t)} (\mathbf{q} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} ds \\ &+ \int_{\mathcal{B}(t)} \rho(\mathbf{x}) (h + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} E &= \text{spezifische innere Energie} \\ \mathbf{q} &= \text{Wärmefluß} \\ \mathbf{t} &= \text{Spannungstensor} \\ h &= \text{Wärmequelle} \\ \mathbf{b} &= \text{Volumenkraftdichte} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\rho \frac{DE}{dt} - \operatorname{div} \mathbf{q} - \mathbf{t} : \operatorname{grad} \mathbf{v} - \rho h = 0$$

mit

$$\mathbf{t} : \operatorname{grad} \mathbf{v} := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Die Bilanzgleichungen sind also:

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \quad (\text{Masse}) \\ \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \operatorname{div} \mathbf{t} - \rho \mathbf{b} &= 0 \quad (\text{linearer Impuls}) \\ \mathbf{t} &= \mathbf{t}^T \quad (\text{Drehimpuls}) \\ \rho \frac{DE}{Dt} - \operatorname{div} \mathbf{q} - \mathbf{t} : \operatorname{grad} \mathbf{v} - \rho h &= 0 \quad (\text{Energie}) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen müssen jetzt durch Materialgesetze (engl. constitutive laws) ergänzt werden.

4.4 Die Deutung des Tensors t und Vektors b

Der Vektor \mathbf{b} ist eine Volumenkraftdichte, z.B. Schwerkraft. Der Cauchysche Spannungstensor \mathbf{t} (Cauchy 1827?) beschreibt die Spannungen innerhalb des materiellen Körpers. Oft schreibt man:

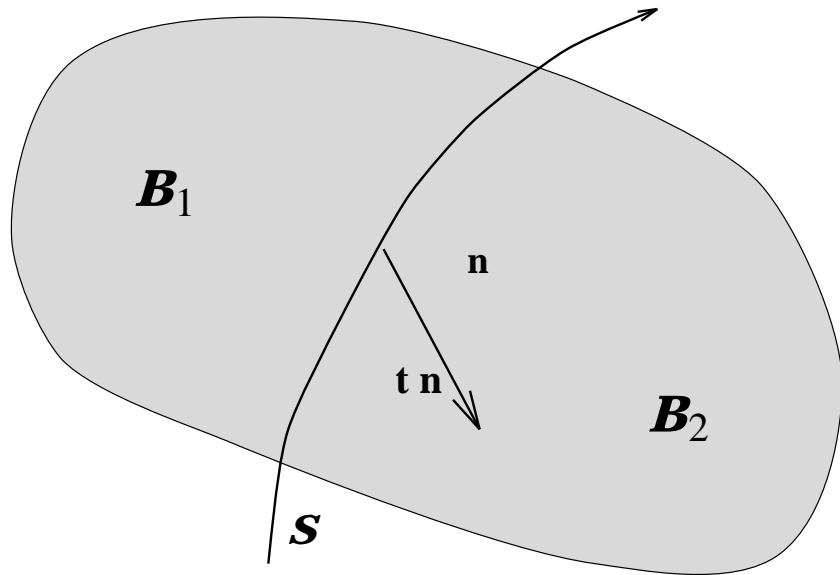


Abbildung 4.2: Kräfteverhältnis innerhalb eines Körpers

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

oder

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Die Komponenten $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ heißen Normalspannungen und die Größen

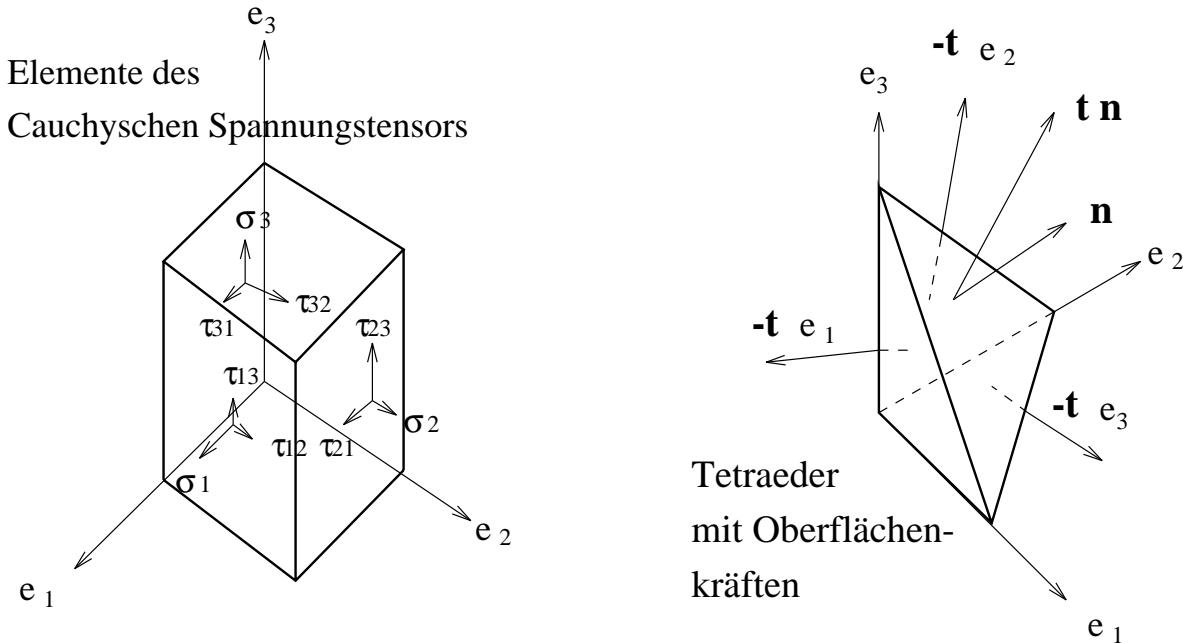
$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} &= \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} &= \tau_{xz} &= \tau_{zx} \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} &= \tau_{yz} &= \tau_{zy} \end{aligned}$$

die Tangential- oder Schubspannungen.

Sei S eine Oberfläche mit äußeren Einheitsnormalen n (bzgl. B_1) innerhalb eines materiellen Körpers.

$t \cdot n$ ist die Kraft (pro Einheitsoberfläche), die das Teilgebiet B_2 auf das Teilgebiet B_1 ausübt (siehe Abbildung 4.2).

Es genügt, $t \cdot e_1$, $t \cdot e_2$ und $t \cdot e_3$ zu kennen, wobei e_i der Einheitsvektor in Richtung x_i ist (siehe Abbildung 4.3).

Abbildung 4.3: Der Spannungstensor \mathbf{t}

4.5 Wellen im elastischen Material

Als Beispiel einer Anwendung der Bilanzgleichung betrachten wir Wellen in einem elastischen Material (siehe Allen, Herrera und Pinder [1988, S. 35]).

Es wird vorausgesetzt, daß keine Volumenkräfte vorhanden sind, so daß

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \operatorname{div} \mathbf{t} = 0 .$$

Sei

$$\mathbf{U} := \mathbf{x} - \mathbf{X} .$$

\mathbf{U} heißt Verschiebungsvektor.

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{U} \approx \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}$$

falls \mathbf{v} und $\operatorname{grad} \mathbf{U}$ klein sind.

Ebenfalls gilt

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \approx \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} ,$$

so daß

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} - \operatorname{div} \mathbf{t} = 0 .$$

Sei

$$\mathbf{e} := \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \mathbf{U} + (\operatorname{grad} \mathbf{U})^T) .$$

\mathbf{e} heißt Verzerrungstensor.

Dem Hookschen Gesetz (Hooke 1678) zufolge gilt:

$$\mathbf{t} = 2\mu\mathbf{e} + \lambda \operatorname{spur}(\mathbf{e})\mathbf{1} ,$$

wobei λ und μ positive Konstanten sind.

Damit liegt ein System von drei partiellen Differentialgleichungen für die drei Komponenten von \mathbf{U} vor.

Gilt $U_2 = U_3 = 0$, d.h.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

so folgt

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = k \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}$$

mit $k = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$, d.h. U_1 erfüllt die eindimensionale Wellengleichung.

Literatur:

Allen, M.B., Herrera, I. und Pinder, G.F.: Numerical Modeling in Science and Engineering. Wiley, 1988.

Becker, E. und Bürger, W.: Kontinuumsmechanik. Teubner, 1975.

Truesdell, C.: A First Course in Rational Continuum Mechanics. Academic Press, 1977.

Kapitel 5

Die Kontinuumsmechanik: die Strömungsmechanik

5.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden Anwendungen der Bilanzgleichungen in der Strömungsmechanik behandelt.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (\text{Masse}) \quad (5.1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \operatorname{div} \mathbf{t} - \rho \mathbf{b} = 0 \quad (\text{linearer Impuls}) \quad (5.2)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^T \quad (\text{Drehimpuls}) \quad (5.3)$$

$$\rho \frac{DE}{Dt} - \operatorname{div} \mathbf{q} - \mathbf{t} : \operatorname{grad} \mathbf{v} - \rho h = 0 \quad (\text{Energie}) \quad (5.4)$$

5.2 Die Eulerschen Gleichungen

In einer *reibungslosen Flüssigkeit* gilt:

$$\mathbf{t} = -p \mathbf{1} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

wobei $p = p(\mathbf{x}, t)$ den Druck bezeichnet. Die Bilanzgleichung (5.1) ändert sich nicht. Die Drehimpulsgleichung (5.3) wird automatisch erfüllt. Gleichung (5.2) vereinfacht sich:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \mathbf{b} . \quad (5.6)$$

Diese Vektorgleichung nennt man die Eulersche Gleichung.

Unter den Voraussetzungen $\mathbf{q} = 0$ und $h = 0$ nimmt die Energiegleichung (5.4) die Gestalt

$$\frac{DE}{Dt} + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (5.7)$$

an.

Die Massenbilanz- oder Kontinuitätsgleichung (5.1), die Eulersche Gleichung (5.6) und die Energieerhaltungsgleichung (5.7) bilden ein System von fünf Gleichungen für die sechs Unbekannten \mathbf{v}, ρ, p, E . Es fehlt noch eine Materialgleichung. Zwei Materialgleichungen, die oft benutzt werden, sind die *allgemeine Gasgleichung*

$$p = RT\rho \quad (5.8)$$

mit Konstanten R und T und

$$p = \alpha\rho^\gamma \quad (5.9)$$

mit Konstanten α und γ .

Die Eulerschen Gleichungen werden oft bei der Modellierung von Luftbewegungen eingesetzt.

5.3 Die Navier-Stokes-Gleichung

(5.5) gilt für reibungslose Flüssigkeiten. Für *zähe Flüssigkeiten* sind Schubspannungen vorhanden. In Abbildung 5.1 wird die Strömung einer Flüssigkeit zwischen zwei Platten gezeigt. Die untere Platte ist fest, die obere Platte hat die horizontale Geschwindigkeit U .

Wäre die Flüssigkeit reibungslos, bliebe sie in Ruhelage. Ist sie hingegen zäh, dann haftet sie an den Plattenwänden, so daß die Geschwindigkeitsverteilung

$$u = U y/a \quad (5.10)$$

nach geraumer Zeit angenommen wird. Die Kraft, die erforderlich ist, um die Bewegung der oberen Platten aufrecht zu erhalten, ist - nach Newton -

$$\tau = \mu \frac{U}{a} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.11)$$

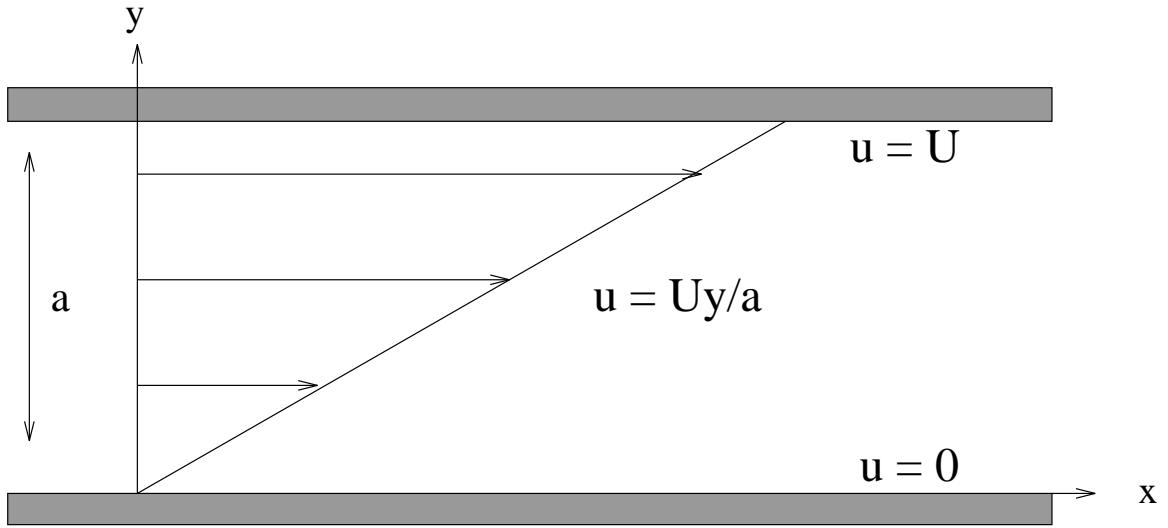


Abbildung 5.1: Strömung zwischen zwei Platten

wobei die Konstante μ die *Zähigkeit* beschreibt. Also ist die Schubspannung τ eine lineare Funktion der Ableitung $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Es kann gezeigt werden, daß die allgemeinste lineare Beziehung zwischen t und dem *Deformationsgeschwindigkeitstensor*

$$\mathbf{D} := \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \mathbf{v} + \operatorname{grad} \mathbf{v}^T) \quad (5.12)$$

folgende Gestalt hat:

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{1} + \lambda \operatorname{sp}(\mathbf{D})\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D} \quad (5.13)$$

mit Konstanten λ und μ . Flüssigkeiten, die dieses Materialgesetz erfüllen, heißen *Newtonsche Flüssigkeiten*. (Diese Gleichungen sind der Hookeschen Gleichung sehr ähnlich.)

Ist die Flüssigkeit inkompressibel, d.h.

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 , \quad (5.14)$$

folgt aus der Massenbilanzgleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 , \quad (5.15)$$

so daß

$$\mathbf{sp}(\mathbf{D}) = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 . \quad (5.16)$$

Die Materialgleichung für t wird dann

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D} \quad (5.17)$$

Sei nun

$$\mathbf{b} = 0 , \mathbf{q} = 0 , h = 0 . \quad (5.18)$$

Die Bilanzgleichung für den linearen Impuls (5.2) wird

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \operatorname{div}(-p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D}) = 0 . \quad (5.19)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} \\ 2 \operatorname{div} \mathbf{D} &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{v} + (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T) \\ &= \nabla^2 \mathbf{v} , \end{aligned}$$

so daß

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} = -\operatorname{div} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} . \quad (5.20)$$

Diese Gleichung heißt die *Navier-Stokes-Gleichung*. Komponentweise geschrieben:

$$\begin{aligned} \rho u_t + uu_x + vu_y + wu_z &= -p_x + \mu \Delta u \\ \rho v_t + uv_x + vv_y + wv_z &= -p_y + \mu \Delta v \\ \rho w_t + uw_x + vw_y + ww_z &= -p_z + \mu \Delta w \end{aligned} \quad (5.21)$$

Hierzu kommt noch die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = u_x + v_y + w_z = 0 . \quad (5.22)$$

5.4 Die Theorie von Biot für den wasserdurchtränkten Erdboden

Die Theorie von Biot ist ein Versuch, das Verhalten von wasserdurchtränktem Erdboden zu modellieren. Insbesondere soll die Senkung des Bodens wegen erhöhten Oberflächendruckes erklärt werden (engl.: consolidation).

Es wird vorausgesetzt, daß der Boden ein elastisches Skelett ist, das mit Wasser durchtränkt ist. Das Volumenverhältnis Wasser : Boden wird mit f bezeichnet.

Die Verschiebungsvektoren des Skeletts bzw. Wassers werden mit \mathbf{u} bzw. \mathbf{U} bezeichnet. \mathbf{e} und \mathbf{E} bezeichnen die entsprechenden Verzerrungstensoren:

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \mathbf{u} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})^T) \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \mathbf{U} + (\operatorname{grad} \mathbf{U})^T)\end{aligned}$$

Der Spannungstensor \mathbf{t} besteht nun aus zwei Teilen:

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \sigma_x + \sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y + \sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z + \sigma \end{pmatrix},$$

wo $\sigma_x, \sigma_{xy}, \dots, \sigma_z$ die Spannungen in dem Skelett sind und σ der Wasserdruck ist.

Das Hookesche Gesetz wird verallgemeinert:

$$\begin{aligned}\mathbf{t} - \sigma \mathbf{1} &= 2\mu \mathbf{e} + \lambda e \mathbf{1} + Q \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{1} \\ \sigma &= Qe + R\boldsymbol{\epsilon}\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}e &= \operatorname{sp}(\mathbf{e}), \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \operatorname{sp}(\mathbf{E}).\end{aligned}$$

Die folgenden sechs Gleichungen können dann hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu + Q) \operatorname{grad} e + (Q + R) \operatorname{grad} \boldsymbol{\epsilon} &= 0 \\ \operatorname{grad}(Qe + R\boldsymbol{\epsilon}) &= b \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{U} - \mathbf{u}).\end{aligned}$$

Literatur:

Biot, M.A.: Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid.
J. Applied Physics, **26**, S. 182-185(1955).

Fernandez, C.M.: Simulation of fully saturated soil consolidation problem.
Rapports Techniques No. 135, INRIA 1992.

5.5 Die Wettervorhersage

Die Wettervorhersage ist ein Beispiel für eine Anwendung komplexer numerischer Methoden. Es gibt mehrere Modelle, die sich bezüglich Komplexität, Vorhersagezeitraum und dem geografischen Anwendungsgebiet unterscheiden. Stellvertretend für Wettervorhersagemodelle nehmen wir das Vorhersagemodell des Europäischen Zentrums für Mittelfristige Wettervorhersage (EZMW) (siehe Tiedtke [1984]):

1) Einleitung

Das Vorhersagemodell des Europäischen Zentrums ist ein rein deterministisches Modell, bei dem die hydro-thermodynamischen Gleichungen numerisch integriert werden. Hinsichtlich seiner Struktur unterscheidet es sich deshalb nur wenig von Modellen, mit denen man Kurzfristvorhersagen (Vorhersagezeit von 2-3 Tagen) erstellt. Unterschiede bestehen jedoch bezüglich der Komplexität der Modellphysik und der Größe des Integrationsgebietes. Zur Modellphysik ist zu vermerken, daß kurzfristige Änderungen der atmosphärischen Strömung im wesentlichen durch die Umverteilung von kinetischer und potentieller Energie im Zusammenhang mit dem Auftreten von barokliner und barotroper Instabilität bestimmt werden. Der Erfolg von Kurzfristmodellen hängt deshalb in erster Linie davon ab, diese Umwandlungsprozesse möglichst genau zu simulieren. Über längere Zeitintervalle gewinnen jedoch irreversible Prozesse (Produktion und Dissipation von Energie) zunehmend an Bedeutung, so daß die Modellphysik in Modellen zur Mittelfristvorhersage zwangsläufig umfangreicher, aber damit auch rechenintensiver wird. Das Vorhersagemodell des EZMW ist in dieser Hinsicht eher einem Zirkulationsmodell vergleichbar als einem Kurzfristmodell. Bezüglich des Integrationsgebietes ist zu bedenken, daß der Einflußbereich für das an einem bestimmten Ort auftretende Wetter mit Vergrößerung des Vorhersagezeitraumes schnell anwächst. Während die Wetterentwicklung in Mitteleuropa bis zu zwei Tagen in den meisten Fällen nur durch Vorgänge im Europäisch-Atlantischen Raum bestimmt wird, kann sich der Einfluß der Südhemisphäre in Europa bereits innerhalb einer Woche bemerkbar machen. Das Modell des EZMW erfaßt aus diesem Grund den gesamten Globus.

2) Modellgleichungen

Im folgenden wollen wir die wichtigsten physikalischen Eigenschaften des Modells an Hand der Modellgleichungen illustrieren. Die Modellgleichungen (1) bis (6) basieren auf den Bilanzgleichungen für Impuls, Wärme, Wasserdampf, der Zustandsgleichung für ideale Gase und der statischen Grundgleichung. Hierbei sind bereits die zwei grundsätzlichen Annahmen gemacht worden, daß Luft sich wie ein ideales Gas verhält und daß alle Zustandsänderungen im hydrostatischen Gleichgewicht verlaufen, was für großräumige Bewegungen mit sehr guter Näherung zutrifft. Die letzte Annahme erlaubt es uns auch, die Gleichungen im p -System, d.h. mit dem Druck p als Vertikalkoordinate zu formulieren. Die Gleichungen verknüpfen die zeitlichen Änderungen der Zustandsgrößen Wind, Druck, Temperatur, Dichte und Feuchte mit den reversiblen Prozessen wie Advektion und Energieumformungen (gegeben durch die Terme auf der linken Seite der Gleichungen und den irreversiblen Prozessen in Verbindungen mit Strahlungstransfer, Phasenumwandlungen und subskaligen Transporten (Terme auf der rechten Seite der Gleichungen). Die Existenz der subskaligen Terme beruht, wie in Promet 1'72 ausgeführt wurde, auf der für die numerische Integration notwendigen Diskretisierung der Gleichungen, wobei die abhängenden Veränderlichen entweder in einem räumlichen Gitternetz oder mit Hilfe endlicher Reihenentwicklungen nach orthogonalen Funktionen (z.B. Kugelflächenfunktionen) dargestellt werden. Die Gleichungen (1) bis (6) stellen das Grundgerüst dar, von dem wir im folgenden ausgehen, wenn wir die wichtigsten Annahmen zur Simulation der reversiblen und irreversiblen Prozesse diskutieren.

Hydrodynamische Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_H + \nabla_H \phi + f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_H = -g \frac{\partial}{\partial p} \vec{\tau} + \mathbf{F}_M \quad (1)$$

Erster Hauptsatz der Thermodynamik

$$c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) - \alpha \omega = Q + L(C - E) - g \frac{\partial}{\partial p} H + c_p F_T \quad (2)$$

Kontinuitätsgleichung

$$\nabla_H \cdot \mathbf{v}_H + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (3)$$

Wasserdampf-Bilanzgleichung

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q = -(C - E) - g \frac{\partial}{\partial p} W + F_q \quad (4)$$

Zustandsgleichung idealer Gase

$$p - R\rho T_v = 0 \quad (5)$$

Statische Grundgleichung

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{1}{\rho} = 0 \quad (6)$$

Die verwendeten Symbole haben folgende Bedeutung:

T, p, ρ	<i>Temperatur, Druck, Dichte</i>
\mathbf{v}	<i>3 dim. Geschwindigkeitsvektor</i>
ω	$= \frac{dp}{dt}$
\mathbf{v}_H	<i>horizont. Geschwindigkeitsvektor</i>
q	<i>Wasserdampfgehalt (spez. Feuchte)</i>
T_v	$= T(1 + 0.6077q)$ <i>virtuelle Temperatur</i>
α	$= \frac{1}{\rho}$
f	$= 2\Omega \sin \varphi$ (<i>Coriolisparameter</i>)
Φ	$= gz$ (<i>Gravitationspotential</i>)
g	<i>Gravitation</i>
\mathbf{k}	<i>vertikaler Einheitsvektor</i>
R	<i>Gaskonstante trockener Luft</i>
L	<i>Kondensationswärme</i>
c_p	<i>spez. Wärme trockener Luft bei konstantem Druck</i>
t	<i>Zeit</i>
$\vec{\tau}$	<i>vertikaler Impulsflußdurch subskalige Bewegungen</i>
H	<i>vertikaler Flußfühlbarer Wärme durch subskalige Bewegungen</i>
W	<i>vertikaler Fluß von Wasserdampf durch subskalige Bewegungen</i>
Q	<i>Strahlungsbedingte Wärmequelle</i>
\mathbf{F}_M, F_T, F_q	<i>Änderungen der Geschwindigkeit, Temperatur, Feuchte durch subskalige Transporte in horizontaler Richtung</i>
C, E	<i>Kondensations-, Verdunstungsrate</i>

Literatur:

Allen, M.B., Herrera, I. und Pinder, G.F.: Numerical Modeling in Science and Engineering. Wiley, 1988.

Haltiner, G.J., Williams, R.T.: Numerical Weather Forecasting, 1980.

Tiedtke, M.: Das Vorhersagemodell. Promet 14, 16-23 (1984).

Wieghardt, K.: Theoretische Strömungslehre. Teubner, 1974.

Kapitel 6

Die Advektionsgleichung $u_t + cu_x = 0$

6.1 Einführung

Wir betrachten die Gleichung

$$u_t + cu_x = 0 \quad (6.1)$$

Ohne Einschränkung kann $c \geq 0$ angenommen werden: Ist $c < 0$, betrachtet man $v(x, t) := u(-x, t)$; v erfüllt dann die DGL. $v_t - cv_x = 0$.

Diese Gleichung wurde schon in Absatz 3.4 hergeleitet, und zwar in der allgemeineren Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u = 0 .$$

Für den Fall $n = 1$ geben wir eine einfache Herleitung:

Eine Flüssigkeit (Luft oder Wasser) bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit c in der Richtung der positiven x-Achse. Die Flüssigkeit trägt einen Schadstoff mit sich. Die Dichte (Masse pro Längeneinheit) des Schadstoffes sei $u(x, t)$. Der *Fluß* des Schadstoffes (die Masse, die in einer Zeiteinheit an dem Punkt x vorbeifließt) sei $q(x, t)$.

Da die Masse erhalten bleibt, folgt für alle Intervalle $V = (x_1, x_2)$, daß

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V u(x, t) dx = q(x_1) - q(x_2) , \quad (6.2)$$

so daß

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx \right] + \left[\frac{q(x_2) - q(x_1)}{x_2 - x_1} \right] = 0 .$$

Falls u stetig differenzierbar ist, folgt, daß für $x_2 \rightarrow x_1 = x$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = 0 . \quad (6.3)$$

Es gilt weiter

$$q(x, t) = c u(x, t) . \quad (6.4)$$

Aus (6.3.) und (6.4) folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 . \quad (6.5)$$

6.2 Die allgemeine Lösung

Zur Lösung von (6.1) wird eine neue Variable ξ eingeführt:

$$\begin{aligned} \xi &:= x - ct \\ x &= \xi + ct . \end{aligned} \quad (6.6)$$

Wir betrachten deshalb die Hilfsfunktion

$$v(\xi, t) := u(\xi + ct, t) . \quad (6.7)$$

Aus (6.1) und (6.7) folgt:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} c + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 , \quad (6.8)$$

d.h. $v(\xi, t)$ ist von t unabhängig. Sei

$$\varphi(\xi) := v(\xi, t) . \quad (6.9)$$

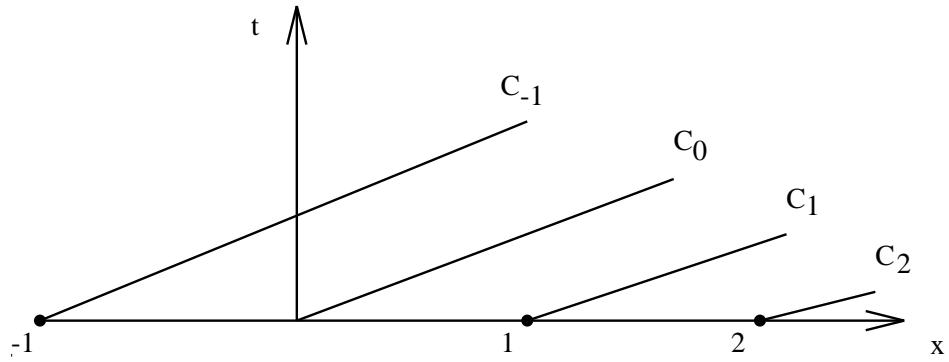
Es folgt aus (6.7) und (6.9), daß

$$u(x, t) = \varphi(\xi) = \varphi(x - ct) . \quad (6.10)$$

Umgekehrt sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in C(\mathbb{R})$, $u(x, t) = \varphi(x - ct)$. Dann gilt :

$$u_t + cu_x = -c\varphi'(x - ct) + c\varphi'(x - ct) = 0 .$$

Wir fassen das Ergebnis zusammen:

Abbildung 6.1: Charakteristiken der Gleichung $u_t + cu_x = 0$

Lemma 6.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein konvexes zusammenhängendes Gebiet. $u(x, t) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ist genau dann eine Lösung der Gleichung

$$u_t + cu_x = 0$$

in Ω , wenn es eine Funktion $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ gibt mit

$$u(x, t) = \varphi(x - ct), \quad (x, t) \in \Omega. \quad \square$$

Bemerkung 6.1 Die Lösung $u(x, t) = \varphi(x - ct)$ kann man auch mit der Methode von Lagrange herleiten.

6.3 Charakteristiken

Sei $\xi \in \mathbb{R}$. Es folgt aus (6.10) oder Lemma 1, daß jede Lösung $u(x, t)$ der Gleichung (6.1) auf der Kurve C_ξ :

$$C_\xi : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - ct = \xi \quad (6.11)$$

konstant ist:

$$u(x - ct) = \varphi(\xi), \quad (x, t) \in C_\xi. \quad (6.12)$$

Diese Tatsache kann graphisch dargestellt werden (Abbildung 6.1). Die Kurven C_ξ heißen *Charakteristiken* der Gleichung (6.1). Diese Definition ist im Einklang mit einer anderen umfassenderen Definition von Charakteristiken, die später gegeben wird.

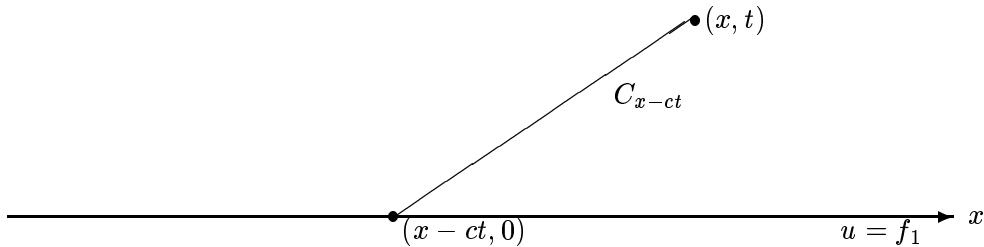


Abbildung 6.2: Das Anfangswertproblem

6.4 Anfangswert- und Randwertprobleme

In Anwendungen wird meistens nach einer Lösung gesucht, die bestimmte Bedingungen erfüllt. Aus Abb. 6.1 sieht man, daß für die Gleichung (6.1) zwei sinnvolle Möglichkeiten existieren:

6.4.1 Das Anfangswertproblem

$$(AW) : u(x, 0) = f_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.13)$$

Da $u(x, t)$ auf jeder Charakteristik C_ξ konstant ist, folgt (siehe Abbildung 6.2):

$$u(x, t) = u(x - ct, 0) = f_1(x - ct).$$

6.4.2 Das Anfangswert-Randwertproblem

$$\begin{aligned} (AW) : u(x, 0) &= f_1(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \\ (RW) : u(0, t) &= f_2(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Die Lösung ist (siehe Abbildung 6.3):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(x - ct, 0) = f_1(x - ct), \quad \text{für } x \geq ct \\ u(x, t) &= u(0, t - x/c) = f_2(t - x/c), \quad \text{für } x \leq ct. \end{aligned}$$

Die Bezeichnungen Anfangswert bzw. Randwert stehen in Zusammenhang mit der Identifikation von x und t als Ortsveränderliche bzw. Zeitveränderliche.

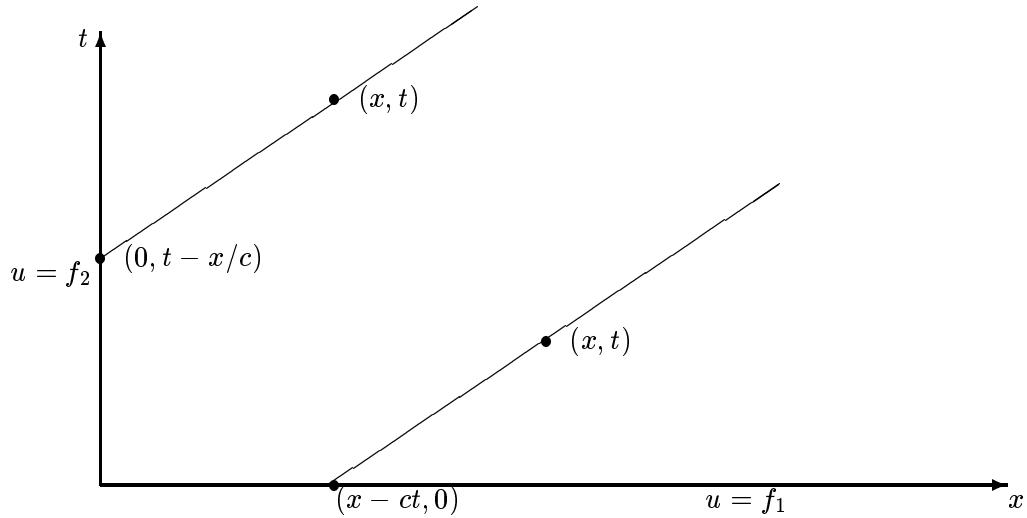


Abbildung 6.3: Das Anfangswert-Randwertproblem

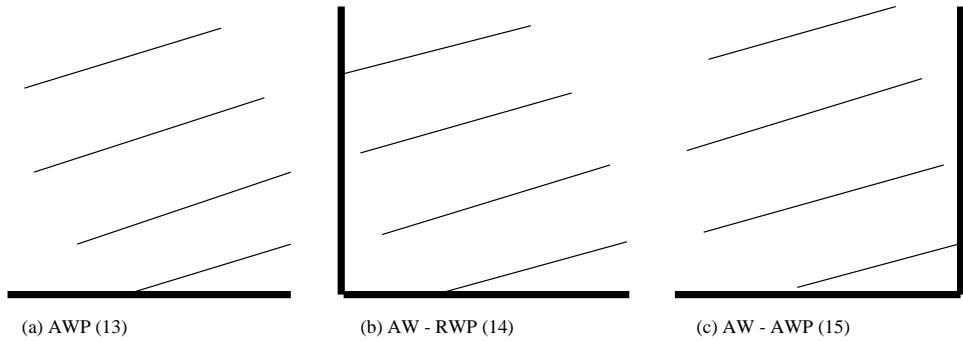


Abbildung 6.4: Mögliche Anfangswert-Randwertprobleme

Die Probleme werden nochmals in Abbildung 6.4 dargestellt, wobei die Kurven, auf denen die Lösung u vorgeschrieben ist, fettgedruckt sind.

Das dritte Problem in Abbildung 6.4, nämlich

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f_1(x), \quad x \in \mathbb{R}_- \\ u(0, t) &= f_2(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{6.15}$$

ist möglicherweise widersprüchlich, da die Bedingung

$$f_2(t) = u(0, t) = u(-ct, 0) = f_1(-ct)$$

erfüllt werden muß. f_2 kann hier also nicht frei gewählt werden.

Aus diesem Beispiel geht hervor, daß nur bestimmte Anfangswert- und Randwertprobleme sinnvoll sind, und daß die sinnvollen Bedingungen von der partiellen Differentialgleichung abhängig sind. Z.B. für $c > 0$ wären die Kombinationen (a) und (c) in Abbildung 6.4 sinnvoll und die Kombination (b) möglicherweise widersprüchlich.

6.4.3 Sachgemäßgestellte Probleme

Definition 6.1 Ein Anfangswert- oder Anfangswert-Randwertproblem heißt sachgemäßgestellt (engl. properly posed), wenn es folgende Forderungen erfüllt:

1. Existenz: Es existiert mindestens eine Lösung.
2. Eindeutigkeit: Es gibt höchstens eine Lösung.
3. Stetige Abhängigkeit: Die Lösung u ist von den Daten (z.B. f_1 und f_2 bei dem AW-RWP) stetig abhängig.

Bemerkung 6.2 Diese Definition ist gewissermaßen unvollständig, da folgendes nicht präzise festgelegt wird:

- a) der Raum (oder die Menge), in dem (in der) Lösungen liegen müssen,
- b) der Begriff stetig abhängig.

Die Definition mußdeshalb problembedingt ergänzt werden.

Bemerkung 6.3 Der Begriff sachgemäßgestellt wurde von Hadamard zuerst eingeführt und wird deshalb manchmal als "sachgemäßgestellt im Sinne von Hadamard" bezeichnet.

Bezüglich der Gleichung (6.1) gilt:

1. Das Anfangswertproblem (6.13) ist sachgemäßdargestellt.
2. Das Anfangswert-Randwertproblem (6.14) ist sachgemäßgestellt.
3. Das Anfangswert-Randwertproblem (6.15) ist nicht sachgemäß gestellt.
4. Das Anfangswert-Randwertproblem in Abbildung 6.5 ist sachgemäßgestellt.

Beispiel 6.1 Als Beispiel eines schlecht gestellten Problems gilt die Rückwärtswärmeleitungsgleichung. Die Wärmeleitungsgleichung für die Temperatur $u(x, t)$ in einem unendlich langen Stab am Punkt $x \in \mathbb{R}$ zur Zeit t ist:

$$u_t = u_{xx} \quad (6.16)$$

Das übliche sachgemäßgestellte Problem besteht daraus, die Temperatur $u(x, t)$ zur Zeit $t > 0$ zu bestimmen, wenn die Temperatur zur Zeit $t = 0$ vorgeschrieben ist. D.h. man betrachtet das AWP:

$$\left. \begin{array}{l} u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ u_t = u_{xx} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right\} \quad (6.17)$$

Man kann sich aber fragen, welche Temperaturverteilung zur Zeit $t = 0$ die Temperaturverteilung $u(x, 1) := f(x)$ verursachen würde. D. h. finde $u(x, 0) = g(x)$, so daß

$$\left. \begin{array}{l} u(x, 1) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right\} \quad (6.18)$$

Dieses Problem kann transformiert werden. Sei

$$\left. \begin{array}{l} s := -t + 1 \\ v(x, s) := u(x, 1 - s) \end{array} \right\} \quad (6.19)$$

Das Problem lautet dann: Finde $v(x, 1)$, so daß :

$$\left. \begin{array}{l} v(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ v_s = -v_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right\} \quad (6.20)$$

Dieses ist ein AWP für die Rückwärtswärmeleitungsgleichung

$$v_s = -v_{xx}. \quad (6.21)$$

Daß das Problem 6.20 schlecht gestellt ist, erkennt man aus der Lösung

$$\tilde{v}(x, s) = \epsilon e^{n^2 \pi^2 s} \sin n\pi x.$$

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_\infty &= \|u(x, 1)\|_\infty \\ &= \|\tilde{v}(x, 0)\|_\infty \\ &= \max_x |\tilde{v}(x, 0)| = \epsilon, \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

aber

$$\begin{aligned} \|g(x)\|_\infty &= \|u(x, 0)\|_\infty \\ &= \|\tilde{v}(x, 1)\|_\infty \\ &= \max_x |\epsilon e^{n^2 \pi^2} \sin n\pi x| \\ &= \epsilon en^2 \pi^2. \quad \square \end{aligned}$$

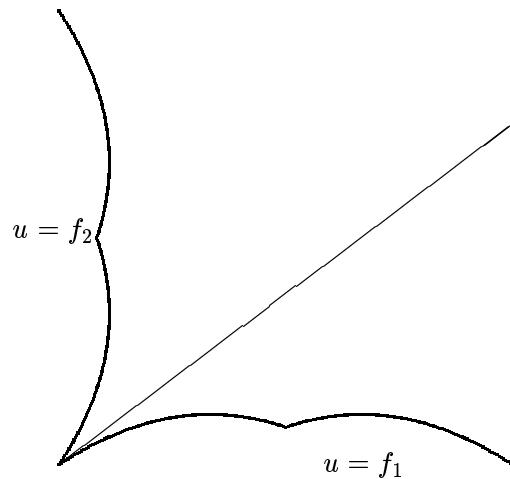
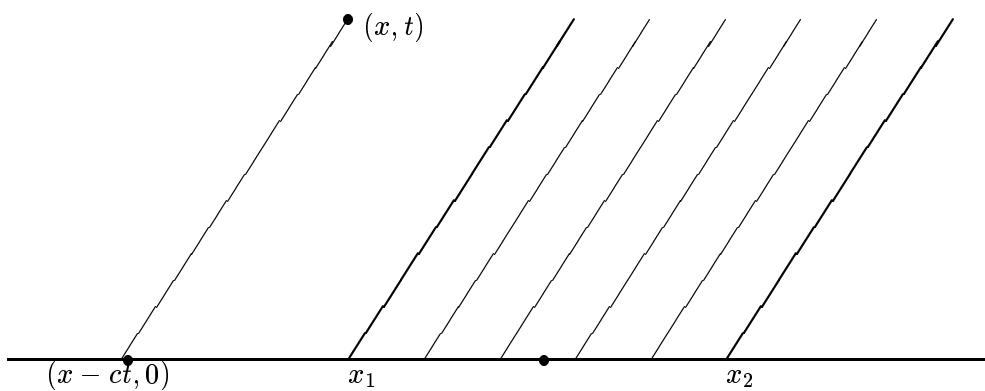
Abbildung 6.5: Ein AW-RWP für $u_t + u_x = 0$ 

Abbildung 6.6: Abhängigkeits- und Bestimmtheitsbereiche

6.5 Abhängigkeits- und Bestimmtheitsbereiche

Aus Abbildung 6.6 sind zwei Folgerungen für das AWP (6.13) ersichtlich:

1. Die Lösung u hängt im Punkt (x, t) nur vom Wert $u(x-ct, 0)$ ab, d.h. der *Abhängigkeitsbereich* (engl.: domain of dependence) des Punktes (x, t) ist der Punkt $(x-ct, 0)$
2. Die Werte von $u(x, 0)$,

$$x_1 \leq x \leq x_2 ,$$

bestimmen die Lösung im Streifen

$$\Omega = \{(x, t) : x_1 - ct \leq x - ct \leq x_2 - ct\} ,$$

d.h. Ω ist der *Bestimmtheitsbereich* (engl.: domain of influence) der Strecke

$$I = \{(x, t) : t = 0 , x_1 \leq x \leq x_2\} .$$

6.6 Anwendungen in der Biologie

Advektion wird nur selten allein betrachtet. Die Advektions-Diffusionsgleichung

$$u_t = cu_x + D u_{xx},$$

die sowohl Advektion als auch Diffusion berücksichtigt, hat viele Anwendungen, die wir später erwähnen (siehe Kapitel 8). Eine mögliche Anwendung der Advektionsgleichung wäre der Transport von Hormonen durch das Kreislaufsystem.

Hormone sind chemische Nachrichtenträger, die in spezialisierten Zellen (*inkretorischen Drüsenzellen*) produziert und von diesen in die Blutbahn sezerniert werden. Auf dem Blutwege gelangen die Hormone an die Zielorgane und üben dort eine spezifische Wirkung aus. Nur die Zellen der Zielorgane besitzen *Rezeptoren* für das entsprechende Hormon. Sie können deshalb die chemisch codierte Nachricht des Hormons lesen. (siehe R. F. Schmidt und G. Thews [Hrsg.], Physiologie des Menschen, 25. Aufl., Springer, 1993, Seite 390).

Der Transport der Hormone in einem Blutgefäß könnte durch die Advektionsgleichung modelliert werden,

$$u_t + cu_x = 0.$$

Die Geschwindigkeit c des Blutes ist ortsbabhängig und variiert um einen Faktor von etwa 1000:

Aorta:	33 cm/s	$= 3,3 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}$
Kapillaren:	$0,3 \text{ mm/s}$	$= 3 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$

Der normale Mensch hat etwa 5 l Blut, das im Durchschnitt einmal pro Minute durch das ganze Kreislaufsystem fließt. Wird der Ausstoß eines Hormons zur Zeit $t = 0$ erhöht, kann die Wirkung erst nach einer Zeit

$$t = \frac{x}{c}$$

erfolgen, wo x die Länge des Blutkreislaufs zwischen der Drüse und dem Empfangsorgan ist.

Kapitel 7

Einfache Differenzenverfahren für die Advektionsgleichung $u_t + cu_x = 0$

7.1 Einführung

Die ersten numerischen Methoden, die allgemein zur Lösung von Anfangs- und Randwertaufgaben eingesetzt wurden, waren die Differenzenverfahren. Schon um die Jahrhundertwende wurden einige analytische und numerische Ergebnisse erreicht (Runge [1908], Richardson [1911], Liebmann [1918]). Die theoretischen Grundlagen wurden u.a. in der berühmten Arbeit von Courant, Friedrichs und Lewy [1928] geschaffen.

Zwischen etwa 1930 und 1950 wurden Differenzenverfahren eingesetzt, um mehrere wichtige praktische Probleme zu lösen (Southwell [1940, 1946, 1956], Thom und Apelt [1961]). Ab 1950 nahm die Anzahl der Anwendungen mit der zunehmenden Verfügbarkeit von Computern rasch zu. Die Bücher von Collatz [1955] und Forsythe und Wasow [1960] beinhalten zahlreiche Hinweise auf all diese frühen Entwicklungen.

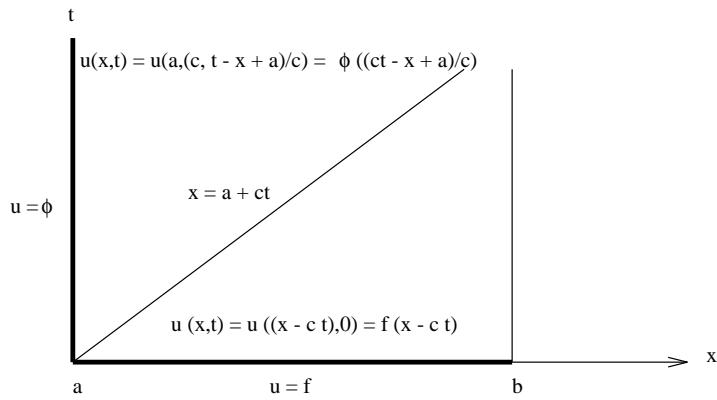
Die Grundidee des Differenzenverfahrens ist, die Lösung $u(x, t)$ einer partiellen Differentialgleichung in einer Menge von Gitterpunkten (x_i, t_j) zu approximieren, indem die partiellen Ableitungen durch Differenzen ersetzt werden. Um die Methode zu beschreiben, betrachten wir zuerst das Anfangsrandwertproblem für die Advektionsgleichung:

Problem 1: Das Anfangsrandwertproblem:

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0, \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) &= f(x), \quad a \leq x \leq b \\ u(a, t) &= \phi(t), \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \tag{7.1}$$

Die Lösung von (7.1) wird in Abbildung 7.1 dargestellt (siehe Kapitel 6).

Zur numerischen Lösung des Problems 1 mit einem Differenzenverfahren wird ein gleichmäßiges $(N + 1) \times (M + 1)$ Gitter auf $G := (a, b) \times (0, T)$ gelegt:

Abbildung 7.1: Das ARWP für $u_t + cu_x = 0$

$$\begin{aligned} h &= \Delta x := \frac{b-a}{N}, \\ k &= \Delta t := \frac{T}{M}, \\ x_i &= a + ih, \quad 0 \leq i \leq N, \\ t_j &= jk, \quad 0 \leq j \leq M. \end{aligned}$$

Die Menge der Gitterpunkte wird mit $G_{h,k}$ bezeichnet und in Abbildung 7.2 dargestellt. Die exakte Lösung $u(x, t)$ des Problems wird auf den Gitterpunkten durch eine Näherung $u^{h,k}$ approximiert:

$$u(x_i, t_j) \doteq u^{h,k}(x_i, t_j) =: u_{i,j}^{h,k}$$

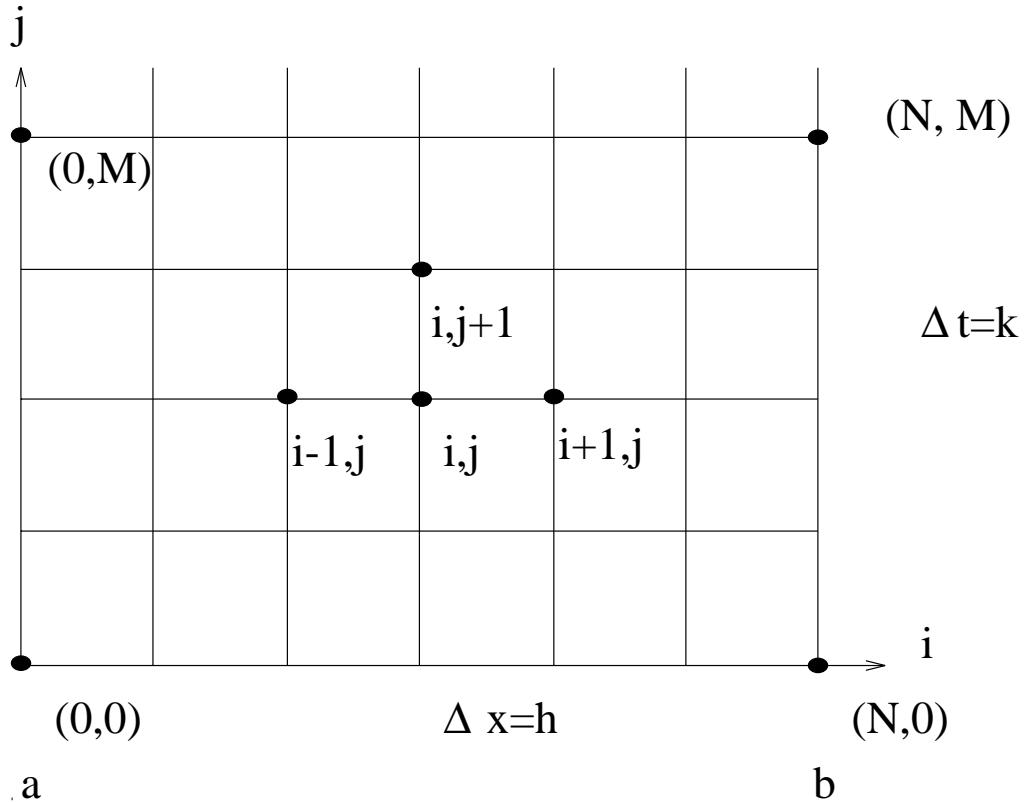
Die Werte

$$\begin{aligned} u_{i,0}^{h,k} &:= u(x_i, 0) = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq N \\ u_{0,j}^{h,k} &:= u(0, t_j) = \phi(t_j), \quad 0 \leq j \leq M \end{aligned} \tag{7.2}$$

liegen vor. Ein Differenzenverfahren besteht aus einer Formel, die es ermöglicht, die übrigen Werte von $u_{i,j}^{h,k}$ zu berechnen. In den nächsten Abschnitten werden mehrere Differenzenverfahren vorgestellt.

7.2 Approximation von Ableitungen durch Differenzen

Sei $u \in C^2(G)$. Aus der Taylorreihenentwicklung


 Abbildung 7.2: Das Gitter $G_{h,k}$

$$u(x + h, t) = u(x, t) + h \frac{\partial u}{\partial x} (x, t) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (x, t) + \dots \quad (7.3)$$

folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} (x, t) = \frac{u(x + h, t) - u(x, t)}{h} + O(h) = D_{+x}(h)u(x, t) + O(h) \quad (7.4)$$

mit

$$h D_{+x}(h)u(x, t) := u(x + h, t) - u(x, t) . \quad (7.5)$$

Ebenfalls gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} (x, t) = D_{-x}(h)u(x, t) + O(h) \quad (7.6)$$

mit

$$D_{-x}(h) := \frac{u(x, t) - u(x - h, t)}{h} \quad (7.7)$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = D_{0x}(h)u(x, t) + O(h^2) \quad (7.8)$$

mit

$$D_{0x}(h) := \frac{u(x + h, t) - u(x - h, t)}{2h} \quad (7.9)$$

Wenn keine Verwirrung möglich ist, schreibt man D_0 statt $D_{0x}(h)$ usw.

Selbstverständlich gelten ähnliche Formeln für partielle Ableitungen nach t , z.B.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D_{+t}(k)(x, t) + O(k) \quad (7.10)$$

mit

$$D_{+t}(k)u(x, t) := \frac{u(x, t + k) - u(x, t)}{k} \quad (7.11)$$

7.3 Ein einfaches Differenzenverfahren

Sei $u \in C^2(G)$ eine Lösung der Gleichung

$$u_t + cu_x = 0 . \quad 7.1$$

Es folgt aus (7.4), (7.5), (7.10), (7.11), daß

$$D_{+t}(k)u(x_i, t_j) + c D_{+x}(h)u(x_i, t_j) = O(h) + O(k) \quad \text{für } 0 \leq i < N, 0 \leq j \leq M - 1. \quad (7.12)$$

Als Approximation zu $u(x_i, t_j)$ wird $u_{i,j}^{h,k}$ genommen, wobei $u^{h,k}$ die Lösung der Gleichung (7.12) mit rechter Seite gleich Null ist:

$$D_{+t}u^{h,k}(x_i, t_j) + c D_{+x}u^{h,k}(x_i, t_j) = 0 \quad (7.13)$$

oder



Abbildung 7.3: Das Molekül

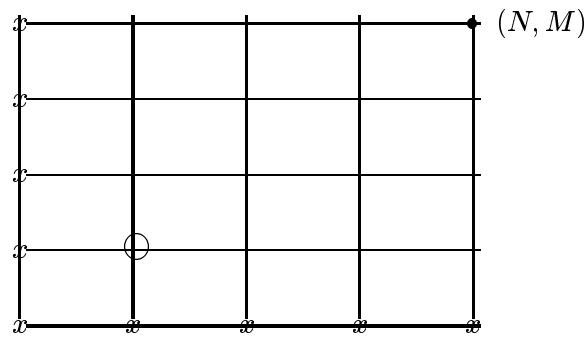


Abbildung 7.4: Die Anfangs- und Randwerte

$$\frac{u_{i,j+1}^{h,k} - u_{i,j}^{h,k}}{k} + c \frac{u_{i+1,j}^{h,k} - u_{i,j}^{h,k}}{h} = 0 . \quad (7.14)$$

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß der Quotient k/h konstant bleibt:

$$\lambda := \frac{k}{h} \in \mathbb{R} . \quad (7.15)$$

Statt $u^{h,k}$ genügt es, u^h zu schreiben, da $k = \lambda h$. Die Gleichung (7.14) wird in die folgende Gleichung überführt:

$$u_{i,j+1}^h - (1 + c\lambda)u_{i,j}^h + c\lambda u_{i+1,j}^h = 0 . \quad (7.16)$$

Die Gleichung (7.16) kann als "Molekül" grafisch dargestellt werden (Abbildung 7.3): Nun betrachten wir das Problem 1. Einige Anfangs- und Randwerte von $u(x, t)$ sind vorgeschrrieben, und die entsprechenden Werte von $u_{i,j}^h$ sind in (7.2) angegeben worden. Die Gitterpunkte, wo u^h schon bekannt ist, sind in Abbildung 7.4 mit Kreuzen markiert. Der Gitterpunkt $(1,1)$ ist mit einem Kreis markiert. Es gilt:

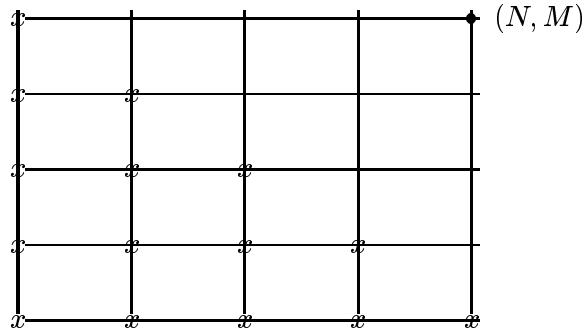


Abbildung 7.5: Punkte, wo u^h aus ... berechenbar ist

$$u_{1,1}^h - (1 + c\lambda)u_{1,0}^h + c\lambda u_{2,0}^h = 0 .$$

Da die Werte $u_{1,0}^h$ und $u_{2,0}^h$ schon bekannt sind, kann $u_{1,1}^h$ berechnet werden. Durch wiederholte Anwendung der Gleichung (7.16) kann u^h in allen Gitterpunkten berechnet werden, die in Abbildung 7.5 mit einem Kreuz markiert sind.

In den übrigen Gitterpunkten (i, j) kann (7.16) nicht angewandt werden, da $u_{i+1,j-1}^h$ nicht bekannt ist.

7.4 Ein zweites einfaches Differenzenverfahren

Im vorherigen Absatz wurde die Gleichung

$$u_t + cu_x = 0$$

durch die Differenzengleichung

$$D_{+t}u^h + c D_{+x}u^h = 0$$

approximiert. Wird die Ableitung u_x durch D_{-x} statt D_{+x} approximiert, dann erhalten wir folgende Gleichung:

$$u_{i,j+1}^h - (1 - c\lambda)u_{i,j}^h - c\lambda u_{i-1,j}^h = 0 \quad (7.17)$$

deren Molekül in Abbildung 7.6 gezeigt wird:

Ein wesentlicher Unterschied zu (7.16) besteht darin, daß die Approximation u^h sich mittels (7.17) in allen Gitterpunkten berechnen läßt, was darauf hindeutet, daß (7.17) möglicherweise eine bessere Approximation als (7.16) ist. Dieser Verdacht wird im nächsten Abschnitt bestätigt.



Abbildung 7.6: Das Molekül II

7.5 Die Courant-Friedrich-Lowy-Bedingung

In diesem Absatz beschreiben wir eine sehr wichtige notwendige Stabilitätsbedingung für Differenzenverfahren. Diese Bedingung heißt **Courant-Friedrich-Lowy-Bedingung** oder auch **CFL-Bedingung** in abgekürzter Schreibweise. Diese Bedingung wurde zum ersten Mal in der berühmten klassischen Arbeit von Courant, Friedrichs und Lewy [1928] veröffentlicht. Diese Bedingung ist oft die einzige bekannte Bedingung für Stabilität.

Der Grundgedanke der CFL-Bedingung ist folgender: Es läßt sich in manchen Fällen feststellen, daß die Lösung einer partiellen Differentialgleichung an der Stelle (x, t) von einigen Anfangs- und Randwerten abhängig ist. In Kapitel 6 ist der Abhängigkeitsbereich für das Anfangswertproblem für die Gleichung

$$u_t + cu_x = 0$$

untersucht worden. Es wurde festgestellt, daß der Abhängigkeitsbereich der Lösung u im Punkt (x, t) der Punkt $(x - ct, 0)$ ist:

$$AB(u; (x, t)) = (x - ct, 0) . \quad (7.18)$$

Für eine Differenzengleichung ist es auch möglich, einen Abhängigkeitsbereich zu finden. Als erstes Beispiel betrachten wir die Differenzengleichung (7.16)

$$u_{i,j+1}^h - (1 + c\lambda)u_{i,j}^h + c\lambda u_{i+1,j}^h = 0 .$$

Die numerische Lösung $u_{i,j+1}^h$ im Punkt $(i, j + 1)$ ist von den Werten der numerischen Lösung in zwei Gitterpunkten im vorherigen Zeitintervall abhängig: $(i + 1, j)$ und (i, j) . Durch Wiederholung wird sofort gesehen, daß der Abhängigkeitsbereich für u^h im Punkt (x_i, t_j) das Intervall (x_i, x_{i+j}) auf der x-Achse ist:

$$AB(u^h; (x_i, t_j)) = \{(x, 0) : x_i \leq x \leq x_{i+j}\} .$$

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}x_i &= a + i \cdot h \\t_j &= j \cdot k \\\lambda &= k/h\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}AB(u^h; (x, t)) &= \{(\bar{x}, 0) : x \leq \bar{x} \leq x + t/\lambda\} \\&\text{für } (x, t) \in G_h\end{aligned}\tag{7.19}$$

Für die Gleichung (7.17) ergibt sich ähnlicherweise:

$$\begin{aligned}AB(u^h; (x, t)) &= \{(\bar{x}, 0) : x - t/\lambda \leq \bar{x} \leq x\} \\&\text{für } (x, t) \in G_h\end{aligned}\tag{7.20}$$

Satz 7.1 (CFL-Bedingung) *Für die Konvergenz eines Differenzenverfahrens ist es notwendig, daß der Abhängigkeitsbereich der Differentialgleichung im Abschluß des Abhängigkeitsbereiches der Differenzengleichung beim Grenzübergang von h gegen 0 enthalten ist.*

Für alle $(x, t) \in G$ gilt dann genauer:

Ist $(x_h, t_h) \in G_h$ eine Folge von Gitterpunkten mit $(x_h, t_h) \rightarrow (x, t)$ und $\xi \in AB(u; (x, t))$, dann gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß

$$B_\epsilon(\xi) \cap AB(u^h; (x_h, t_h)) \neq \emptyset$$

für $0 < h < \delta$, wo $B_\epsilon(\xi)$ den Kreis mit dem Radius ϵ und dem Mittelpunkt ξ bezeichnet.

Beweis:

Sei die CFL-Bedingung nicht erfüllt. Dann gibt es $(x, t) \in G$, $\xi \in AB(u; (x, t))$ eine Folge $\{(x_n, t_n)\}$, $(x_n, t_n) \rightarrow (x, t)$ und ein $\epsilon > 0$, so daß

$$B_\epsilon(\xi) \cap AB(u^h; (x_n, t_n)) = \emptyset$$

für alle $h > 0$, d.h. Änderungen der Anfangs- oder Randdaten in $B_\epsilon(\xi)$ ändern die Lösung u in (x, t) , aber nicht die Approximationen u^h in den Gitterpunkten (x_n, t_n) .

Es ist deshalb möglich, die Anfangs- oder Randwertdaten so zu wählen, daß der Limes

$$\lim_{h \rightarrow 0} u^h(x_n, t_n)$$

entweder nicht existiert oder nicht gegen $u(x, t)$ konvergiert.

Beispiel 7.1 Es folgt aus (7.18) und (7.19), daß die Approximation (7.16) die CFL-Bedingung für das Problem

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0, \quad c > 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{7.21}$$

nicht erfüllt.

Beispiel 7.2 Es folgt aus (7.19) und (7.20), daß die Approximation (7.17) die CFL-Bedingung für das Problem erfüllt, genau dann, wenn

$$x - ct \in [x - t/\lambda, x]$$

d.h. genau dann, wenn

$$c\lambda \leq 1. \tag{7.22}$$

Diese Bedingung heißt *die CFL-Bedingung für das Differenzenverfahren (7.17) bzgl. des Problems (7.21)*.

Die CFL-Bedingung (7.22) ist nur eine notwendige Bedingung für Konvergenz. Daß diese Bedingung *in diesem Fall* auch hinreichend ist, wird in den nächsten beiden Abschnitten bewiesen.

7.6 Beweis der Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_\infty$

Sei $u^h(x, y)$ die numerische Lösung des Anfangsrandwertproblems (7.1), die mit der Differenzenapproximation (7.17) berechnet worden ist. Wie oben gezeigt worden ist, ist die CFL-Bedingung

$$c\lambda \leq 1$$

eine notwendige Bedingung für Konvergenz. In diesem Abschnitt zeigen wir, daß die CFL-Bedingung in diesem einfachen Fall auch hinreichend ist.

Zuerst werden einige Notationen eingeführt:

$$\begin{aligned} u_{i,j} &:= u(x_i, t_j) && (\text{die exakte Lösung}) \\ e_{i,j} &\equiv e_{i,j}^h := u_{i,j} - u_{i,j}^h && (\text{der Fehler}) \end{aligned}$$

Satz 7.2 Sei $u \in C^2(\overline{G})$ eine Lösung von (7.1), u^h eine mit Hilfe von (7.17) berechnete Approximation und $\lambda c \leq 1$. Dann gilt:

$$|u_{i,j}^h - u_{i,j}| \leq (j\Delta t)M_2(c + \lambda)\Delta x/2,$$

wobei

$$M_2 := \sup_G \max_{p+q=2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^p \partial t^q} \right|.$$

Beweis:

Durch Taylor-Entwicklung folgt mit (7.1):

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} + c \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} = f_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq M-1$$

mit

$$f_{i,j} := \frac{\partial^2 u(x_i, \tau)}{\partial t^2} \cdot \frac{\Delta t}{2} - c \frac{\partial^2 u(\xi, t_j)}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

wobei

$$\tau \in (t_j, t_{j+1}), \quad \xi \in (x_{i-1}, x_i),$$

so daß

$$|f_{i,j}| \leq F := M_2 \cdot (\lambda + c) \cdot \frac{\Delta x}{2}.$$

Die Approximation u^h erfüllt die Differenzengleichung (7.17)

$$\frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h}{\Delta t} + c \frac{u_{i,j}^h - u_{i-1,j}^h}{\Delta x} = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß der Fehler $e_{i,j}^h = e_{i,j}$ ebenfalls eine Differenzengleichung erfüllt:

$$\frac{e_{i,j+1} - e_{i,j}}{\Delta t} + c \frac{e_{i,j} - e_{i-1,j}}{\Delta x} = f_{i,j}.$$

Diese Gleichung wird nun umgestaltet:

$$e_{i,j+1} = (1 - c\lambda)e_{i,j} + c\lambda e_{i-1,j} + f_{i,j}\Delta t, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq M-1.$$

Zusätzlich gilt:

$$e_{i,0} = u_{i,0} - u_{i,0}^h = 0, \quad 1 \leq i \leq N$$

und

$$e_{0,j} = u_{0,j} - u_{0,j}^h = 0 , \quad 1 \leq j \leq M .$$

Sei

$$E_j := \max_{0 \leq i \leq N} |e_{i,j}| .$$

Es folgt

$$E_{j+1} \leq |1 - c\lambda| \cdot E_j + |c\lambda| \cdot E_j + F \Delta t = E_j + F \Delta t ,$$

da $0 < c\lambda \leq 1$.

Es folgt sofort durch Induktion unter Berücksichtigung der Gleichung $E_0 = 0$, daß

$$E_j \leq j F \Delta t .$$

Bemerkung 7.1 Diese Methodik wird oft in der Theorie numerischer Verfahren angewandt, und wir werden später weitere Beispiele in Zusammenhang mit elliptischen und parabolischen Differentialgleichungen kennenlernen.

Es muß allerdings hier erwähnt werden, daß diese Methodik für hyperbolische Differentialgleichungen wenig Anwendung findet. Der Grund ist, daß die Maximumnorm für hyperbolische Differentialgleichungen ungeeignet ist.

7.7 Zusammenfassung einfacher Methoden

7.7.1 Zeitvorwärts und Raumvorwärts

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + c \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} = 0$$

oder

$$u_{i,j+1} = (1 + c\lambda)u_{i,j} - c\lambda u_{i+1,j}$$

7.7.2 Zeitvorwärts und Raumrückwärts

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + c \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} = 0$$

oder

$$u_{i,j+1} = (1 - c\lambda)u_{i,j} + c\lambda u_{i-1,j}$$

7.7.3 Zeitvorwärts und räumlich zentrierte

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + c \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = 0$$

oder

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{c\lambda}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})$$

7.7.4 Lax-Friedrichs

$$\frac{u_{i,j+1} - \frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j})}{k} + c \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = 0$$

7.7.5 Leap-frog oder Bockspringen

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + c \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = 0$$

7.8 Beweis der Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|_2$ (Energie-Methode)

Dieser Abschnitt könnte noch verbessert werden. Es wäre vielleicht besser, periodische Anfangswerte zu betrachten.

Wir betrachten:

Problem 2:

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

mit $f \in C^2(-\infty, +\infty)$ und

$$f^{(r)} \in L_2(-\infty, \infty) \text{ für } 0 \leq r \leq 2.$$

Wir möchten beweisen, daß die Approximationen u^h , die mit dem Differenzenverfahren (7.17) berechnet werden, gegen eine Lösung u konvergieren. Die Existenz von u wird nicht vorausgesetzt, so daß wir einen konstruktiven Existenzbeweis erhalten. (Allerdings wird u als Limes einer nicht genau angegebenen Teilfolge u^{h_i} definiert.)

Diese Beweismethode wurde zuerst durch Courant, Friedrichs und Lewy [1928] angewandt. Siehe auch Ladyzhenskaya [1985] und Epstein [1962].

7.8.1 Notation

In diesem Abschnitt benutzen wir die folgende Notation:

$$\begin{aligned}
 X &:= \ell_2 \\
 f_h &:= \{f(ih) : i \in \mathbb{Z}\} \in X \\
 u_j^h &:= \{u_{i,j}^h : i \in \mathbb{Z}\} \\
 \Delta_x u_j^h &= \left\{ \left(\frac{u_{i+1,j}^h - u_{i,j}^h}{h} \right) : i \in \mathbb{Z} \right\} \\
 \Delta_x^2 u_j^h &= \left\{ \left(\frac{u_{i+2,j}^h - 2u_{i+1,j}^h + u_{i,j}^h}{h^2} \right) : i \in \mathbb{Z} \right\} \\
 \Delta_t u_j^h &= \left\{ \left(\frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h}{k} \right) : i \in \mathbb{Z} \right\}
 \end{aligned}$$

ℓ_2 sei der Vektorraum aller reellen Folgen

$$y = \{y_i\} = \{y_i : i = 0, 1, 2, \dots\}$$

mit

$$\|y\|_2 := \left[\sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^2 \right]^{1/2} < \infty.$$

$L_2(0, \infty)$ sei der Vektorraum aller reellen Funktionen $f(x)$, $x \geq 0$, mit

$$\|f\|_2 := \left[\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} < 0.$$

7.8.2 Die Energienorm

Sei $u(x, t)$ eine glatte Funktion, die Problem 2 löst und wofür

$$u^{(r)}(0, t) \in L_2(-\infty, \infty), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} 2uu_t dx \\
 &= -2c \int_{-\infty}^{\infty} uu_x dx \\
 &= \text{Limes}_{A \rightarrow \infty} \left[-c(u(x, t))^2 \right]_{-A}^{+A} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Begründung:

Folglich gilt:

$$\|u(\cdot, t)\|_2^2 = \|u(\cdot, 0)\|_2^2.$$

D.h. die Norm $\|u(\cdot, t)\|_2$ ist konstant.

Dieses Ergebnis führt dazu, daß man versucht zu zeigen, daß die diskrete Energienorm

$$\|u^h\|_2$$

ebenfalls erhalten bleibt.

7.8.3 Der Existenz- und Konvergenzbeweis

Satz 7.3 Sei $f \in L_2(-\infty, +\infty)$, $f_h \in X$, $c > 0$, und u^h durch (7.17) definiert. Seien M_0, M_1, M_2 Konstanten, wofür

$$\begin{aligned} h\|f_h\|_2^2 &\leq M_0 \\ h\|\Delta_x f_h\|_2^2 &\leq M_1 \\ h\|\Delta_x^2 f_h\|_2^2 &\leq M_2. \end{aligned}$$

Dann existiert eine Folge $\{h_n\}$, $h_0 > h_1 > h_2, \dots$ und eine Funktion u , so daß

$$u^{h_n} \longrightarrow u$$

und u eine Lösung des Problems 2 ist.

Beweis: (Skizze)

Die Grundidee ist, die sequentielle Kompaktheit der Folgen u^h , $\Delta_x u^h$ usw. zu zeigen. Ist diese vorhanden, dann existieren konvergente Teilfolgen u^{h_i} , $\Delta_x u^{h_i}$ und Funktionen u , u_x usw. mit

$$\begin{aligned} u_{h_i}^{h_i} &\longrightarrow u, \\ \Delta_x u_{h_i}^{h_i} &\longrightarrow u_x. \end{aligned}$$

Zusätzlich gilt:

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x} u$$

usw.

Der Beweis, daß die Folgen sequentiell kompakt sind, wird mit Hilfe des Satzes von Arzela-Ascoli und der unten angegebenen Hilfssätze durchgeführt.

Der Satz von Arzela-Ascoli, der unten angegeben wird, ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Bolzano-Weierstraß:

Satz 7.4 (Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte Folge reeller Zahlen enthält eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: Siehe Forster, Analysis I, S. 31.

Definition 7.1 *Sei A eine Teilmenge eines topologischen Vektorraumes X . A heißt sequentiell kompakt, falls jede Folge aus A eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in X enthält. (Siehe Dunford und Schwartz, I, S. 21.)*

Definition 7.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine Familie F stetiger Funktionen auf Ω heißt gleichgradig stetig, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für jedes ϕ in F und für je zwei Punkte x_1 und x_2 aus Ω stets*

$$\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| < \epsilon$$

gilt.

Satz 7.5 ((Arzela-Ascoli)) *Sei Ω eine beschränkte Teilmenge von \mathbb{R}^n . Eine Teilmenge $A \subset C(\overline{\Omega})$ ist genau dann sequentiell kompakt, falls:*

1. *Es existiert $M \in \mathbb{R}$ mit*

$$\|\phi\|_\infty \leq M, \text{ für alle } \phi \in A.$$

2. *A ist gleichgradig stetig.*

(Siehe Adams, S. 10.)

Hilfssatz 1:

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 7.3. Dann gibt es Konstanten M_0, M_1 und M_2 , so daß

- a) $h\|u_j^h\|_2^2 \leq M_0,$
- b) $h\|\Delta_x u_j^h\|_2^2 \leq M_1,$
- c) $h\|\Delta_x^2 u_j^h\|_2^2 \leq M_2,$
- d) $h\|\Delta_t u_j^h\|_2^2 \leq M_3$

Beweis von a):

Für $v = \{v_i\} \in X$ sei T der Verschiebungsoperator, $Tv := \{v_{i+1}\}$.

Nach Voraussetzung ist $f_h \in X$, so daß $u_0^h = f_h \in X$. Aus der Gleichung

$$u_{j+1}^h = (1 - c\lambda)u_j^h + c\lambda T^{-1}u_j^h$$

folgt sofort, daß $u_j^h \in X$ für alle j und

$$\|u_{j+1}^h\|_2 \leq (1 - c\lambda)\|u_j^h\|_2 + c\lambda\|T^{-1}u_j^h\|_2 = \|u_j^h\|_2 .$$

Zusammenfassend gilt:

$$h\|u_j^h\|_2^2 \leq h\|f_h\|_2^2 \leq M_0 \quad \text{für alle } j .$$

Beweis von b):

Sei nun

$$\begin{aligned} v_j^h &:= \Delta_x u_j^h , \\ &= \left\{ \left(\frac{u_{i+1,j}^h - u_{i,j}^h}{h} \right) \right\} . \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$v_0^h = \Delta_x f_h$$

und

$$v_{j+1}^h = (1 - c\lambda)v_j^h + c\lambda v_{j-1}^h .$$

Wie in a) kann bewiesen werden, daß

$$h\|v_j^h\|_2 \leq h\|\Delta_x f_h\|_2^2 \leq M_1 .$$

Beweis von c): Wie a) und b).

Beweis von d):

Das Differenzenverfahren lautet:

$$\Delta_t u_{i,j}^h = -c \Delta_x u_{i,j}^h$$

und somit:

$$h\|\Delta_t u_j^h\|_2^2 = hc^2\|\Delta_x u_j^h\|_2^2 \leq c^2 M_1 .$$

Hilfssatz 2:

Sei w^h Gitterfunktionen, $w^h \in X$ mit $h\|\Delta_x w^h\|_2^2 \leq M$.

Sei \tilde{w}^h die Erweiterung von w^h durch lineare Interpolation.

Dann gibt es eine Funktion $w \in X$ und eine Teilfolge h_r , so daß

$$\tilde{w}^{h_r} \rightarrow w \text{ für } r \rightarrow \infty .$$

Beweis:

Sei $x, y \in \mathbb{R}$, so daß x und y Gitterpunkte sind für genügend klein h . Sei

$$x = rh , \quad y = sh , \quad s > r .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |w^h(y) - w^h(x)| &= \left| \sum_{j=r}^{s-1} h[\Delta_x w^h(jh)] \right| \\ &\leq h \left[\sum_{j=r}^{s-1} |\Delta_x w^h(jh)|^2 \right]^{1/2} (s-r)^{1/2} \\ &\leq [h\|\Delta_x w^h\|_2^2]^{1/2} (hs-hr)^{1/2} \\ &\leq M|y-x|^{1/2} . \end{aligned}$$

D.h. die Funktionen \tilde{w}^h sind gleichgradig stetig. Man kann dann den Satz von Arzela-Ascoli anwenden.

7.9 Das Lax-Wendroff-Verfahren

In diesem Abschnitt beschreiben wir das Lax-Wendroff-Verfahren, das später in verallgemeinerter Form diskutiert wird.

Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$u_t + cu_x = 0 , \quad t > 0 , \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{7.23}$$

$$u(x, 0) = f(x) , \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{7.24}$$

$$G := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \tag{7.25}$$

Die Taylorentwicklung von u am Punkt (x_i, t_j) ist:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{i,j} + O(\Delta t^3). \quad (*)$$

Es folgt aus der Differentialgleichung, daß

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -c \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \\ &= -c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ &= -c \frac{\partial}{\partial x} \left(-c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Wenn die Terme $\frac{\partial u}{\partial t}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ in der Taylorentwicklung $(*)$ durch $-c \frac{\partial u}{\partial x}$ bzw. $c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ersetzt werden, ergibt sich:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \Delta t c \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta t)^2}{2} c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} + O(\Delta t^3).$$

Zuletzt werden die partiellen Ableitungen nach x approximiert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= u_{i,j} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \cdot (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \\ &\quad + \frac{c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \\ &\quad + O(\Delta t^3 + \Delta t \Delta x^2 + \Delta t^2 \Delta x^2) \end{aligned}$$

Das Lax-Wendroff-Verfahren entsteht, wenn der Term $O(\Delta x^3 + \Delta t \Delta x^2)$ vernachlässigt wird:

$$u_{i,j+1}^h = \frac{c\lambda}{2} \cdot (1 + c\lambda) \cdot u_{i-1,j}^h + (1 - c^2 \lambda^2) \cdot u_{i,j}^h - \frac{c\lambda}{2} (1 - c\lambda) \cdot u_{i+1,j}^h$$

Das Molekül wird in Abbildung 7.7 dargestellt:

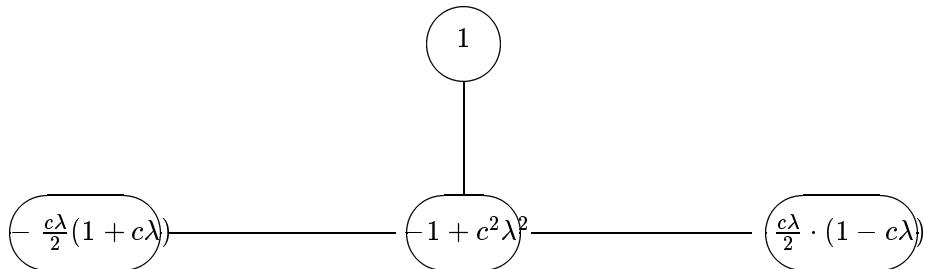


Abbildung 7.7: Das Molekül des Lax-Wendroff-Verfahrens

Bemerkung 7.2 1. Das Lax-Wendroff-Verfahren ist für $|c\lambda| \leq 1$ konvergent, d.h. die CFL-Bedingung ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. (Diese Behauptung wird später bewiesen.)

2. Das Lax-Wendroff-Verfahren hat die Ordnung 2:

$$e^h = O(h^2 + k^2).$$

3. Wenn die Lösung innerhalb des Streifens $a \leq x \leq b$ gesucht wird, muß $u(b, t)$ auch vorgeschrieben werden, obwohl dies für das analytische Problem nicht nötig ist.

Literaturverzeichnis

- [1] Adams, R. A.: Sobolev Spaces. Academic Press, 1975.
- [2] Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, 2. Auflage. Springer 1955.
- [3] Courant, R., Friedrichs, K. O. und Lewy, H.: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. Math. Ann., **100**, 32-74, 1928.
- [4] Dunford, N., Schwartz, J. T.: Linear Operators. Interscience, 1966.
- [5] Epstein, B.: Partial Differential Equations. McGraw-Hill, 1962.
- [6] Forsythe, G.E., Wasow, W.R.: Finite Difference Methods for Partial Differential Equations. New York: John Wiley, 1960.
- [7] Großmann, Ch., Roos, H.-G.: Numerik partieller Differentialgleichungen. Teubner, 1992.
- [8] Kreiss, K.O., Widlund, O.: Difference approximations for initial value problems for partial differential equations. Report No. 7, Dept. of Computer Sciences, Uppsala Univ. Sept. 1967.
- [9] Ladyzhenskaya, O.L.: The Boundary Value Problems of Mathematical Physics. Springer, 1985.
- [10] Leveque, Randall J.: Numerical Methods for Conservation Laws. Birkhäuser, 1992.
- [11] Liebmann, H.: Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und konformer Abbildungen. Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., Math.-phys. Kl. 1918, S. 385-416.
- [12] Quarteroni, A., Valli, A.: Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer, 1974.
- [13] Richardson, L.F.: The Approximate Arithmetical Equations with an Application to the Stresses in a Masonry Dam. Phil. Trans. Roy. Soc., Lond. A Bd. 210 (1911) S. 308-357.

- [14] Richtmyer, R. D., Morton, K. W.: Difference Methods for Initial-value Problems. Wiley, Interscience, 1967.
- [15] Runge, C.: Über eine Methode, die partielle Differentialgleichung $\Delta u = \text{Constans}$ numerisch zu integrieren. Z. Math. u. Phys. Bd. 56 (1908) S. 225-232.
- [16] Southwell, R.V.: Relaxation Methods in Engineering Science. Oxford, 1940.
- [17] Southwell, R.V.: Relaxation Methods in Theoretical Physics. Bd. I, II. Oxford, 1946 und 1956.
- [18] Strikwerda, J. C.: Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations. Wadsworth and Brooks / Cole, 1989.
- [19] Thom, A., Apelt, C.J.: Field Computations in Engineering and Physics. London, Van Nostrand 1961.

Kapitel 8

Die Wärmeleitungsgleichung

8.1 Einführung

Die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad (8.1)$$

heißt *Wärmeleitungsgleichung*.

Diese Gleichung wurde in Absatz 3.5 hergeleitet. In Absatz 3.6 wurden die vielen verwandten Gleichungen kurz erwähnt.

Wir betrachten einige einfache analytische Lösungsverfahren und Eigenschaften. Differenzenverfahren zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung werden später behandelt.

Literatur:

Cannon, J.R.: The One-Dimensional Heat Equation. Addison Wesley, 1984.

Carslaw, H.S., Jaeger, J.C.: Conduction of Heat in Solids. Oxford: Clarendon Press, 1959.

Crank, J.: The Mathematics of Diffusion, 2.ed. Oxford: Clarendon Press, 1975.

Friedman, A.: Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice-Hall, 1964.

Grigull, U., Sondner, H.: Wärmeleitung. Berlin: Springer, 1979. (in der Inst.Bibl.)

Jacobs, M.H.: Diffusion Processes. Berlin: Springer, 1967.

Widder, D.V.: The Heat Equation. Academic Press, 1975.

8.2 Analytische Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten einige Lösungsmethoden für die Wärmeleitungsgleichung. Unser Ziel ist, analytische Lösungen für Modellprobleme zu finden, mit denen wir später numerische Ergebnisse vergleichen und ein "Gefühl" für die Wärmeleitungsgleichung entwickeln können.

8.2.1 Die Methode der Trennung der Veränderlichen

Man macht den Ansatz, daß die Lösung der eindimensionellen Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx} \quad (8.2)$$

als ein Produkt von zwei Funktionen $X(x)$ und $T(t)$ darstellbar ist, wobei X eine nur von x und T eine nur von t abhängige Funktion ist:

$$u(x, t) = X(x)T(t) . \quad (8.3)$$

Setzen wir (8.3) in die Gleichung (8.2) ein und dividieren durch X und T , dann erhalten wir:

$$\frac{\frac{d^2 X}{dx^2}}{X} = \frac{\frac{dT}{dt}}{T} = \lambda , \quad (8.4)$$

wobei λ weder von x noch von t abhängig ist und deshalb eine Konstante ist.

Zur Bestimmung von X und T liegen deshalb zwei gewöhnliche Differentialgleichungen vor:

$$\begin{aligned} X'' - \lambda X &= 0 \\ T' - \lambda T &= 0 \end{aligned} \quad (8.5)$$

mit allgemeinen Lösungen

$$X = a \exp(\sqrt{\lambda}x) + b \exp(-\sqrt{\lambda}x) , \quad (8.6)$$

$$T = c \exp(\lambda t) , \quad (8.7)$$

wobei a , b und c beliebige Konstanten sind. Es sollte beachtet werden, daß λ , a , b und c negative oder sogar komplexe Zahlen sein dürfen. Da hier das Produkt aus X und T betrachtet wird, kann o.E. $c = 1$ angenommen werden.

Für jede Konstante λ erhalten wir eine Lösung (8.3), wobei X und T durch (8.6) und (8.7) gegeben sind. Da die Wärmeleitungsgleichung linear ist, ist eine Summe dieser speziellen Lösungen auch eine Lösung der partiellen Differentialgleichung.

Zwei Anwendungen werden jetzt gegeben.

Beispiel 8.1 Gesucht wird die Lösung des folgenden Anfangs-/Randwertproblems:

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t < \infty \quad (8.8)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (8.9)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0. \quad (8.10)$$

Diese Aufgabe entspricht dem folgenden physikalischen Problem:

Ein Stab der Länge π mit konstantem Querschnitt hat zur Zeit $t_0 = 0$ die Temperaturverteilung $\varphi(x)$. Der Stab ist isoliert, so daß der Wärmestrom nur in der x-Richtung stattfindet. Die Endpunkte des Stabes werden für Zeit $t \geq 0$ auf Temperatur 0 gehalten.

Die Lösung wird mit folgendem Reihenansatz gesucht:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n X_n(x) T_n(t), \quad (8.11)$$

wobei C_n Konstanten sind und X_n und T_n für $\lambda = \lambda_n$ durch die Gleichungen (8.7) und (8.8) bestimmt werden. Die Werte von λ_n werden so gewählt, daß die Gleichung (8.10) erfüllt wird, d.h.

$$X_n(0) = X_n(\pi) = 0. \quad (8.12)$$

Das erfordert:

$$\lambda_n = -n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.13)$$

so daß

$$\begin{cases} X_n(x) &= \sin(nx) \\ T_n(t) &= \exp(-n^2 t) \end{cases} \quad (8.14)$$

Setzen wir (8.14) in (8.11) ein, so erhalten wir:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx) \cdot \exp(-n^2 t). \quad (8.15)$$

Die Funktion $u(x, t)$, die durch Gleichung (8.15) definiert ist, erfüllt die Wärmeleitungsgleichung (8.8) und die Randwertbedingungen (8.10) für jede Wahl der Koeffizienten C_n . Damit die Anfangswertbedingung (8.9) erfüllt wird, ist nötig, daß

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx) = \varphi(x), \quad (8.16)$$

d.h. die Koeffizienten C_n sind die Koeffizienten der Fourier-Sinusreihe. Aus der Theorie der Fourier-Reihen erhalten wir:

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (8.17)$$

Beispiel 8.2 Man sucht eine zeitperiodische Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Aus Gleichung (8.7) erkennt man, daß solch eine Lösung erfordert, daß λ imaginär sein muß, d.h. $\lambda = i\omega$, wobei $i = \sqrt{-1}$ und ω eine reelle Konstante ist. Unter Berücksichtigung der Identität $\sqrt{i} = (1+i)\sqrt{2}$ erhalten wir aus den Gleichungen (8.6) und (8.7)

$$u(x, t) = a \exp \left[x \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2}} + i(x\sqrt{\frac{\omega}{2}} + \omega t) \right] + b \exp \left[-x\sqrt{\frac{\omega}{2}} + i(-x\sqrt{\frac{\omega}{2}} + \omega t) \right]. \quad (8.18)$$

Wenn gefordert wird, daß $\omega > 0$ und daß u für positive x beschränkt sein sollte, gilt $a = 0$. Die Funktion u in Gleichung (8.18) ist eine komplexwertige Funktion. Da die partielle Differentialgleichung eine reelle Gleichung ist, sind beide, die reellen und komplexen Teile von u , Lösungen der Wärmeleitungsgleichung. Wenn wir nur den reellen Teil von u nehmen, dann erhalten wir folgende periodische Lösung:

$$u(x, t) = b \exp \left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2}} \right) \cos \left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2}} + \omega t \right). \quad (8.19)$$

Diese Lösung kann benutzt werden, um die Temperaturschwankungen in der Erde infolge der täglichen und jährlichen Temperaturschwankungen an der Erdoberfläche zu analysieren:

Tiefe $x(m)$	Amplitude $A(x)(^{\circ}\text{C.})$
0	19.5
1	11.5
2	6.8
3	4.2
4	2.6

Tabelle 8.1:

Beispiel 8.3 (Tychonoff, Samarskii, S. 236) Im folgenden soll als Anwendung der Wärmeleitungsgleichung die Ausbreitung von Temperaturwellen im Erdboden betrachtet werden. Die Temperatur der Erdoberfläche ändert sich mit einer täglichen und einer jährlichen Periode. Diese Temperaturschwankungen breiten sich von der Erdoberfläche ins Erdinnere aus. Setzt man den Erdboden als homogen voraus, so ist ein einfaches Modell durch folgendes Randwertproblem der Wärmeleitungsgleichung gegeben:
Gesucht ist eine beschränkte Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad -\infty < t, \quad (8.20)$$

mit der Randbedingung (an der Erdoberfläche)

$$u(0, t) = A \cos \omega t. \quad (8.21)$$

Hierbei beschreibt ω die Periode der Temperaturschwankungen und a^2 ist eine Konstante für die Temperaturleitfähigkeit des Bodens. Die Einheit für x sei ein Meter und für t ein Tag.

Man leitet mit Hilfe eines Separationsansatzes folgende Darstellung der Lösung her (siehe (8.19)):

$$u(x, t) = A \exp \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x \right) \cos \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x \right). \quad (8.22)$$

Die Amplitude der Temperaturschwankungen wird also durch die Funktion

$$A(x) := A \exp \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x \right) \quad (8.23)$$

beschrieben. In einer Beobachtungsstation in der ehemaligen UdSSR wurden die jährlichen Temperaturschwankungen gemessen. Die Amplitude betrug an der Erdoberfläche $19,5^{\circ}\text{C}$. Weiter wurden folgende Werte gemessen (siehe Tabelle 8.1):

Auf Grund dieser Werte kann man die Temperaturleitfähigkeit des Erdbodens bestimmen:

$$\ln \frac{A(x)}{A} = -\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x \quad (8.24)$$

Sei

$$\alpha = -\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} .$$

Da die Periode einem Jahr entspricht, gilt

$$\omega = 2\pi/365 .$$

Der Koeffizient α kann aus den Daten in der Tabelle mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden. Als Ergebnis erhält man:

$$\alpha = 4,0 \times 10^{-3}$$

Da

$$a^2 = \frac{\omega}{2\alpha^2} \quad (8.25)$$

folgt

$$a^2 = 4,1 \times 10^{-3} \text{ cm}^3/\text{sec.} \quad (8.26)$$

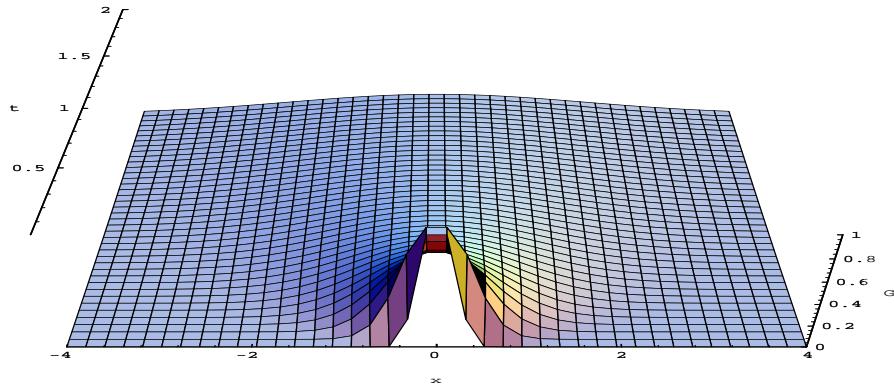
Aus der Identität

$$\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x = \omega \left(t - \frac{x}{\sqrt{2a^2\omega}} \right)$$

folgt, daß in der Tiefe x die Jahresschwankungen um $\frac{x}{\sqrt{2a^2\omega}}$ verspätet sind.

Z.B. wird die Maximaltemperatur in 4 m Tiefe etw 4 Monate später als auf der Erdoberfläche erreicht.

Die Methode der Trennung der Veränderlichen und insbesondere die Lösung der Wärmeleitungsgleichung durch Fourier-Reihen ist historisch von großer Bedeutung. Es sollte aber bemerkt werden, daß die Methode der LAPLACEschen Transformation, die wir später besprechen, heute viel öfter in der Praxis benutzt wird, weil es analytische Lösungen zu gleichen Problemen mit viel weniger Aufwand als die Fourier-Methode geben kann.

Abbildung 8.1: $G(x, 0, t)$ für $-4 \leq x \leq 4$, $0.01 \leq t \leq 2$

8.2.2 Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten jetzt das Anfangswertproblem

$$u_t = u_{xx} \quad (8.27)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (8.28)$$

Die Funktion

$$G(x, \xi, t) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp[-(x - \xi)^2 / 4t] \quad (8.29)$$

wird die *Fundamentallösung* der Wärmeleitungsgleichung genannt. Sie ist auch als die *Greensche Funktion der unendlichen Geraden* bekannt. Die folgenden Eigenschaften von G lassen sich leicht beweisen:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x, \xi, t) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, \xi, t) \quad (8.30)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-s^2) ds = 1 \quad (8.31)$$

Die Funktion G wird in Abbildung 8.1 grafisch dargestellt. Später werden wir G mit Hilfe der Fourier-Transformation herleiten.

Unter Berücksichtigung von Gleichung (8.31) läßt sich erkennen, daß $G(x, \xi, t)$ das folgende physikalische Problem löst: Ein unendlich langer Stab befindet sich am Zeitpunkt $t = 0$ in folgendem Zustand: An der Stelle $x = \xi$ ist die Temperatur unendlich. Bei allen übrigen Punkten $x \neq \xi$ ist die Temperatur 0. Alle Wärme ist an der Stelle $x = \xi$ konzentriert, und zwar in der Höhe von einer Einheit.

Bemerkung 8.1 Die Funktion $G(x, \xi, t)$ erfüllt die Randbedingung

$$G(x, \xi, 0) = \delta(x - \xi) ,$$

wo $\delta(x)$ die Diracsche Deltafunktion, eine Distribution, ist. Eine Distribution ist eine verallgemeinerte Funktion. Mehr darüber z.B. in: Schwarz, L.: Theorie des Distributions. Paris: Hermann, 1973.

Die eben beschriebenen Anfangswertprobleme für G sind natürlich physikalisch unrealistisch. Sie lassen sich dadurch approximieren, daß sich zur Anfangszeit $t = 0$ eine Einheit von Wärme in einer kleinen Umgebung von $x = \xi$ befindet.

Satz 8.1 Sei $f \in C(-\infty, +\infty)$ mit

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty .$$

Dann existiert das Integral

$$u(x, t) := \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi \quad (8.32)$$

und stellt eine Lösung $u(x, t)$ des Anfangswertproblems (8.27), (8.28) dar.

Beweis (Skizze):

Der Beweis beruht auf folgenden Bemerkungen:

1. Die Tatsache, daß G ein negatives Exponential enthält, bedeutet, daß das Integral in (8.32) gleichmäßig konvergiert und deshalb der Tausch von Differentiation und Integration gerechtfertigt ist.
2. Das Verhalten von G für kleine t , das in Abbildung 8.1 gezeigt wird, nämlich daß G nur in der unmittelbaren Umgebung von $x = \xi$ groß ist, impliziert, daß $u(x, t)$ gegen $f(x)$ strebt für t gegen 0.

Durch Benutzung dieser beiden Bemerkungen läßt es sich streng beweisen, daß $u(x, t)$, wie in Gleichung (8.32) angegeben, das Anfangswertproblem (8.27) und (8.28) löst.

Bemerkung 8.2 Es folgt aus Gleichung (8.32), daß die Anfangsdaten geglättet werden. Diese Eigenschaft wird bei Mehrgitterverfahren (Gauß-Seidel-Verfahren) und bei der Bildverarbeitung benutzt.

Literatur:

Rudin, W.: Real and Complex Analysis. McGraw Hill, 1983.

8.3 Eigenschaften der Wärmeleitungsgleichung

8.3.1 Der Abhängigkeitsbereich

Die Lösung (8.32) läßt eine interessante Eigenschaft der Wärmeleitungsgleichung beweisen. Wir betrachten den speziellen Fall, wo der Träger von f beschränkt ist, z.B.

$$f(x) = 0 \quad \text{für } |x| > 1 .$$

Zur Anfangszeit $t = 0$ ist die Wärme auf dem Intervall $(-1, +1)$ konzentriert. Aber es folgt aus Gleichung (8.32), daß die Lösung $u(x, t)$ für jeden positiven Wert von t überall positiv ist. Das bedeutet, daß sich die Wärme mit unendlicher Geschwindigkeit fortpflanzt. Dies ist natürlich physikalisch unmöglich. Es bedeutet, daß mindestens in dieser Hinsicht die Wärmeleitungsgleichung der physikalischen Wahrheit nicht entspricht.

Bemerkung 8.3 Es ist z.B. experimentell beobachtet worden (Bertman + Sandifuco, Scientific American [1970]), daß in gefrorenem Helium Wärmewellen entstehen können. Eine Beschreibung durch eine Wellengleichung wäre hier also angemessener. In den meisten Fällen ist die Wärmeleitungsgleichung aber ein gutes Modell für Wärmeverteilungsprobleme.

Für das Anfangswertproblem (8.27), (8.28) ist der Abhängigkeitsbereich der Lösung u im Punkt (x, t) die ganz reelle Achse \mathbb{R} :

$$AB(u; (x, t)) = \mathbb{R} .$$

Diese Eigenschaft der Wärmeleitungsgleichung hat sofort Konsequenzen für Differenzenverfahren. Wird nämlich die Gleichung (8.27) durch die klassische explizite Differenzengleichung

$$D_{t+} u^h(x_i, t_j) = D_{x-} D_{x+} u^h(x_i, t_j) ,$$

d.h.

$$(*) \quad \frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h}{\Delta t} = \frac{u_{i+1,j}^h - 2u_{i,j}^h + u_{i-1,j}^h}{(\Delta x)^2}$$

approximiert, dann folgt sofort aus der CFL-Bedingung, daß die Approximationen u^h nicht gegen u konvergieren können, falls

$$\Delta t = \lambda \Delta x$$

gilt.

Für die Differenzengleichung (*) wird deshalb immer vorausgesetzt, daß

$$\Delta t = \lambda (\Delta x)^2$$

gilt.

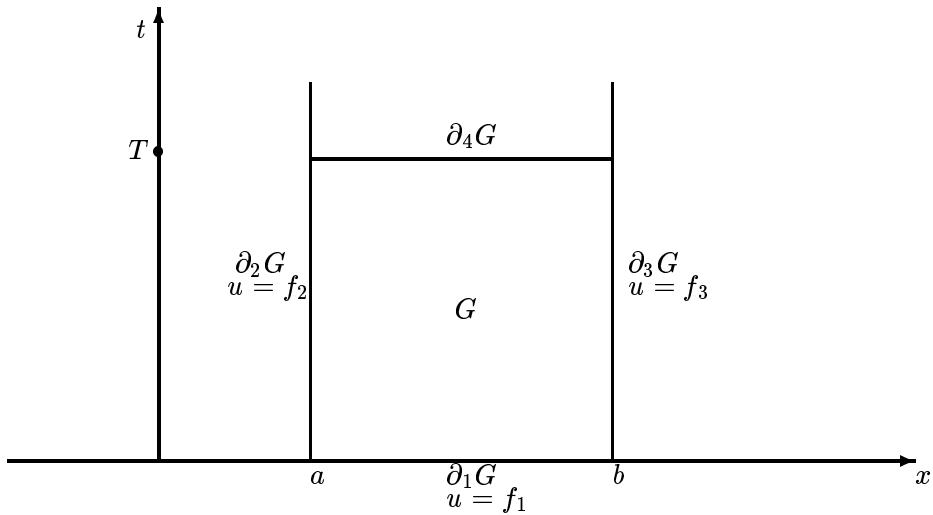


Abbildung 8.2: Das Anfangswert-Randwertproblem in einem Streifen

Bemerkung 8.4 Für die Wärmeleitungsgleichung laufen - wenn man will - die "Charakteristiken" parallel zur x-Achse.

8.3.2 Das Maximumprinzip

Satz 8.2 Sei

$$\begin{aligned}
 G &:= (a, b) \times [0, T] \\
 \partial_1 G &:= (a, b) \times \{0\} \\
 \partial_2 G &:= \{a\} \times [0, T] \\
 \partial_3 G &:= \{b\} \times [0, T] \\
 \partial_4 G &:= (a, b) \times \{T\}.
 \end{aligned}$$

(Siehe Abbildung 8.2)

Eine in \bar{G} definierte und stetige Funktion $u(x, t)$, die in $G \cup \partial_4 G$ zweimal stetig differenzierbar ist und die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}$$

erfüllt, nimmt ihr Maximum auf $R := \partial_1 G \cup \partial_2 G \cup \partial_3 G$ an.

Beweis:

Die Funktion u ist in \bar{G} stetig. Sei

$$M := \max_{\bar{G}} u(x, t).$$

Wir nehmen jetzt an, daß für ein $\epsilon > 0$

$$(*) \quad \max_R u(x, t) \leq M - \epsilon ,$$

und zeigen, daß ein Widerspruch entsteht.

Gilt $(*)$, dann folgt, daß es einen Punkt (x_0, y_0) gibt mit

$$u(x_0, t_0) = M , \quad (x_0, t_0) \in G \cup \partial_4 G .$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} u_t(x_0, t_0) &\geq 0 \\ u_x(x_0, t_0) &= 0 \\ u_{xx}(x_0, t_0) &\leq 0 . \end{aligned}$$

Sei nun v die Hilfsfunktion

$$v(x, t) := u(x, t) + k(t_0 - t) ,$$

wobei k eine positive Konstante ist. Offenbar ist dann

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M$$

und

$$k(t_0 - t) \leq kT .$$

Wir wählen $k > 0$ nun so, daß $kT < \epsilon/2$. Dann gilt

$$\max_R v \leq M - \epsilon/2 .$$

Da v eine stetige Funktion ist, gibt es einen Punkt (x_1, t_1) , in dem sie ihr Maximum annimmt. Sicher gilt dann

$$v(x_1, t_1) \geq v(x_0, t_0) = M ,$$

so daß

$$(x_1, t_1) \in G \cup \partial_4 G .$$

Es gilt auch:

$$\begin{aligned} v_t(x_1, t_1) &= u_t(x_1, t_1) - k \geq 0 \\ v_{xx}(x_1, t_1) &= u_{xx}(x_1, t_1) \leq 0 . \end{aligned}$$

Die Wärmeleitungsgleichung wird deshalb im Punkt (x_1, t_1) nicht erfüllt. Damit ist der gewünschte Widerspruch gefunden.

Bemerkung 8.5 Das Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung ist im Einklang mit unseren alltäglichen Erfahrungen mit Wärmetransport.

Bemerkung 8.6 Es folgt sofort aus dem Maximumprinzip, daß das in Abbildung 8.2 geschilderte Problem höchstens eine Lösung u besitzt mit

$$u \in C(\bar{G}) \cap C^{(2)}(G \cup \partial_4 G) .$$

Bemerkung 8.7 Das Maximumprinzip läßt sich in mehrerer Hinsicht verallgemeinern. Siehe z.B. Protter, M., Weinberger, H.F.: Maximum Principles in Differential Equations. Prentice-Hall, 1967.

Satz 8.3 (Maximumprinzip für die inhomogene Wärmeleitungsgleichung) *u sei eine Lösung des folgenden Problems:*

$$u_t = u_{xx} + f(x, t) , \quad a \leq x \leq b , \quad 0 \leq t \leq T , \quad (8.33)$$

wobei $u \in C^2((a, b) \times (0, T)) \cap C([a, b] \times [0, T])$. Dann gilt:

$$u(x, t) \leq m + et , \quad \text{für } a \leq x \leq b , \quad 0 \leq t \leq T , \quad (8.34)$$

wobei

$$\begin{aligned} e &:= \max_{\bar{G}} |f(x, t)| \\ m &:= \max \left\{ \max_{a \leq x \leq b} u(x, 0) , \max_{0 \leq t \leq T} u(a, t) , \max_{0 \leq t \leq T} u(b, t) \right\} \\ G &:= (a, b) \times (0, T) . \end{aligned}$$

Beweis:

Falls (8.34) nicht gilt, dann gibt es $(x_0, t_0) \in \bar{G}$ mit

$$u(x_0, t_0) = M + et_0 , \quad M > m . \quad (8.35)$$

Wir beweisen, daß dies zu einem Widerspruch führt.

v sei die Hilfsfunktion

$$v(x, t) := u(x, t) - et + \frac{M - m}{4(b - a)^2} (x - x_0)^2 . \quad (8.36)$$

Da v stetig ist und aus (8.35) und (8.36) $v(x_0, t_0) = M$, gibt es $(x_1, t_1) \in \bar{G}$ mit

$$v(x_1, t_1) = \max_{\bar{G}} v(x, t) \geq M . \quad (8.37)$$

Aber

$$v(a, t) = u(a, t) - et + \frac{M-m}{4(b-a)^2} (a-x_0)^2 \leq m(1-\Theta) + M\Theta - et ,$$

wobei

$$\Theta = \frac{(a-x_0)^2}{4(b-a)^2} \in \left[0, \frac{1}{4}\right] ,$$

also

$$v(a, t) < M - et < M , \quad \text{für } 0 \leq t \leq T . \quad (8.38)$$

Auf gleiche Weise folgt:

$$v(b, t) < M \quad \text{für } 0 \leq t \leq T , \quad (8.39)$$

$$v(x, 0) < M \quad \text{für } a \leq x \leq b . \quad (8.40)$$

Aus (8.37) - (8.40) folgt, daß

$$(x_1, t_1) \in (a, b) \times (0, T] .$$

Da v in (x_1, t_1) das Maximum annimmt, gilt

$$\begin{aligned} v_t(x_1, t_1) &= 0 , \quad \text{falls } t_1 < T , \\ v_t(x_1, t_1) &\geq 0 , \quad \text{falls } t_1 = T , \\ v_{xx}(x_1, t_1) &\leq 0 , \end{aligned}$$

so daß

$$[v_t - v_{xx}](x_1, t_1) \geq 0 . \quad (8.41)$$

Aber, aus (8.36),

$$\begin{aligned} v_t(x_1, t_1) &= u_t(x_1, t_1) - e , \\ v_{xx}(x_1, t_1) &= u_{xx}(x_1, t_1) + \frac{M-m}{2(b-a)^2} , \end{aligned}$$

so daß, mit Hilfe von (8.33),

$$\begin{aligned}
[v_t - v_{xx}](x_1, t_1) &= [u_t - u_{xx}](x_1, t_1) - e - \frac{M-m}{2(b-a)^2}, \\
&= f(x_1, t_1) - e - \frac{M-m}{2(b-a)^2}, \\
&\leq -\frac{M-m}{2(b-a)^2} \\
&< 0.
\end{aligned} \tag{8.42}$$

Die Gleichungen (8.41) und (8.42) enthalten den gewünschten Widerspruch. Daraus folgt, daß (8.34) gilt.

8.4 Existenz und Eindeutigkeit

Wir betrachten hier nur ein einziges typisches Problem:

$$u_t = u_{xx}, \quad (x, t) \in G := (a, b) \times (0, T). \tag{8.43}$$

$$\begin{aligned}
u(x, 0) &= f_1(x), \quad x \in (a, b), \\
u(a, t) &= f_2(t), \quad t \in (0, T), \\
u(b, t) &= f_3(t), \quad t \in (0, T).
\end{aligned} \tag{8.44}$$

Satz 8.4 (Cannon, Satz 6.3.1, S. 62) Seien f_k , $1 \leq k \leq 3$, stetige Funktionen auf $[a, b]$ bzw. $[0, T]$. Die Verträglichkeitsbedingungen

$$\begin{aligned}
f_1(a) &= f_2(0), \\
f_1(b) &= f_3(0),
\end{aligned}$$

seien erfüllt.

Dann gibt es genau eine Funktion $u(x, t)$ mit:

- a) $u \in C(\bar{G})$.
- b) $u_t \in C(G \cup \partial_4 G)$.
- c) $u_{xx} \in C(G \cup \partial_4 G)$.
- d) Die Anfangs-Randwertbedingung (8.44) wird erfüllt.

Bemerkung 8.8 Cannon formuliert und beweist den Satz für Funktionen f_k , die nur stückweise stetig sind und die Verträglichkeitsbedingung deshalb möglicherweise nicht erfüllen.

Bemerkung 8.9 Ladyzenskaja, Solonnikov und Uralceva (Satz 5.1, S. 320) beweisen einen ähnlichen Satz für Lösungen aus Sobolewschen Räumen $H^\ell(G)$ unter der Voraussetzung, daß entsprechende Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind.

Satz 8.5 Seien u und v Lösungen des Anfangswert-Randwertproblems (8.43), (8.44) mit Daten f_1, f_2, f_3 bzw. g_1, g_2, g_3 .

Dann gilt:

$$\|u - v\|_{\infty, \bar{G}} \leq \max_k \|f_k - g_k\|_{\infty, \overline{\partial_k G}} .$$

Beweis: Maximumprinzip.

Satz 8.6 Das Problem (8.43), (8.44) ist sachgemäßgestellt.

Bemerkung 8.10 Das Rückwärtsproblem:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad a < x < b, \quad 0 > t > -T \\ u(x, 0) &= f_1(a), \quad a \leq x \leq b \\ u(a, t) &= f_2(t), \quad t \in (-T, 0) \\ u(b, t) &= f_3(t), \quad t \in (-T, 0) \end{aligned}$$

ist *nicht* sachgemäßgestellt.

Literatur:

Cannon, J.R.: The One-Dimensional Heat Equation. Addison-Wesley, 1984.

Friedman, A.: Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice-Hall, 1964.

Ladyženskaja, O.A, Solonnikov, V.A. und Uralćeva, N.N.: Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. American Mathematical Society, 1968.

Kapitel 9

Numerische Lösung der ein-dimensionalen Wärmeleitungsgleichung durch Differenzenverfahren

9.1 Einführung

Um die Grundideen ohne unnötige Komplikationen zu erklären, betrachten wir das folgende Problem:

Problem 1

$$u_t = cu_{xx} \quad , \quad 0 < x < 1 , \quad 0 < t < T \quad (9.1)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 , \quad t > 0 \quad (9.2)$$

$$u(x, 0) = 1 - |1 - 2x| , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (9.3)$$

mit Lösung (Carslaw, Jaeger, S. 97, Gleichung (14)):

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi(x - \frac{1}{2})}{2} \\ & \exp[-c(2n+1)^2\pi^2t/4] . \end{aligned} \quad (9.4)$$

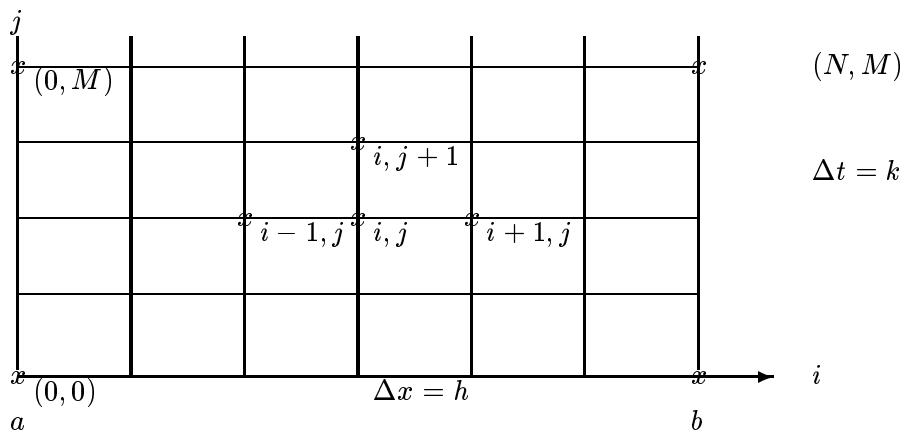
Dieses Problem wird oft als Modellproblem benutzt, d.h., um die Effizienz von verschiedenen numerischen Methoden zu vergleichen, werden sie zur Lösung des Problems herangezogen.

Zur numerischen Lösung des Problems 1 wird, wie schon in Kapitel 7 für die Gleichung

$$u_t + cu_x = 0$$

geschildert, ein regelmäßiges $(N + 2) \times (M + 1)$ Gitter auf

$$G := (a, b) \times (0, T)$$

Abbildung 9.1: Das Gitter $G^{h,k}$

in üblicher Weise gelegt:

$$\begin{aligned} h &= \Delta x := \frac{b-a}{(N+1)} , \\ k &= \Delta t := \frac{T}{M} , \\ x_i &= a + ih , \quad 0 \leq i \leq N+1 , \\ t_j &= jk , \quad 0 \leq j \leq M . \end{aligned} \tag{9.5}$$

Das Gitter wird in Abbildung 9.1 dargestellt.

Die exakte Lösung $u(x, t)$ des Problems wird auf den Gitterpunkten durch eine Approximation $u^{h,k}$ angenähert:

$$u_{i,j} = u(x_i, t_j) \doteq u^{h,k}(x_i, t_j) =: u_{i,j}^{h,k} \tag{9.6}$$

Die Werte

$$\begin{aligned} u_{i,0}^{h,k} &:= u(x_i, 0) = 0 , \quad 0 \leq i \leq N+1 \\ u_{0,j}^{h,k} &:= u(a, t_j) = 0 , \quad 0 \leq j \leq M \\ u_{N+1,j}^{h,k} &= u(b, t_j) = 0 , \quad 0 \leq j \leq M \end{aligned} \tag{9.7}$$

liegen vor. Ein Differenzenverfahren besteht aus einer Formel, die es ermöglicht, die übrigen Werte von $u_{i,j}^{h,k}$ zu berechnen. $u^{h,k}$ wird als Lösung eines linearen Gleichungssystems gewonnen. Es gibt keine allgemeinen Vorschriften für die Konstruktion dieses Gleichungssystems. Wir werden verschiedene Beispiele betrachten. Es gibt aber einige Faustregeln:

1. Es sollte so viele Gleichungen wie Unbekannte geben, d.h. so viele Gleichungen wie Gitterpunkte. Es ist üblich, jede Gleichung einem Gitterpunkt zuzuordnen, und diese Gleichung sollte entweder die Differentialgleichung oder - wenn zutreffend - die Anfangswertbedingung oder Randwertbedingung am Gitterpunkt approximieren. Wir sprechen von der Gleichung an einem Gitterpunkt.

2. Die Differenzengleichung an einem Gitterpunkt sollte nur die Werte von u^h am Gitterpunkt selbst und naheliegende Gitterpunkte verwenden. Dies entspricht der Tatsache, daß eine partielle Differentialgleichung die partielle Ableitung an einer Stelle enthält. Dies ist eine lokale und nicht globale Bedingung. Um festzustellen, ob eine Funktion u eine partielle Differentialgleichung an einer Stelle erfüllt, genügt es, die Werte von u in einer Nachbarschaft dieser Stelle zu kennen. Es ist deshalb sinnvoll, daß sich diese Eigenschaft in den Differenzengleichungen widerzuspiegelt. Eine sehr wichtige Konsequenz ist, daß die Matrix der Differenzengleichungen schwach besetzt ist.
3. Die exakte Lösung u sollte die Differenzengleichungen bis auf einen kleinen Fehler, den sog. lokalen Fehler, erfüllen, d.h. die Differenzengleichungen sollen *konsistent* sein. Um die Konsistenz einer Differenzengleichung an einem Gitterpunkt zu prüfen, ist es möglich, die Lösung u in eine Taylor-Reihe um den Gitterpunkt zu entwickeln, da - wie in 2) vorgeschrieben - die Differenzengleichung nur die Werte von u in den Nachbarpunkten des Gitterpunktes enthält.

9.2 Approximation von Ableitungen durch Differenzen

Sei $v \in C^4(G)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x)}{\partial x} &= \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} + O(h^2), \\ &= D_{+x}v(x) + O(h). \end{aligned} \tag{9.8}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x)}{\partial x} &= \frac{v(x+h) - v(x-h)}{2h} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 v(x)}{\partial x^3} + O(h^4) \\ &= D_{0x}v(x) + O(h^2). \end{aligned} \tag{9.9}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} &= \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 v(x)}{\partial x^4} + O(h^4) \\ &= D_{+x}D_{-x}v(x) + O(h^2). \end{aligned} \tag{9.10}$$

9.3 Das klassische explizite Differenzenverfahren

Für das Modellproblem (Problem 1) sind die Werte von u an den unteren und seitlichen Rändern des Gebiets durch die Gleichungen (9.2) und (9.3) vorgeschrieben. Für die betroffenen Gitterpunkte erhalten wir sofort die Differenzengleichungen (9.7):

$$\begin{aligned} u_{0,j}^{h,k} &= 0, \quad 0 < j \leq M \\ u_{N+1,j}^{h,k} &= 0, \quad 0 < j \leq M \end{aligned} \tag{9.11}$$

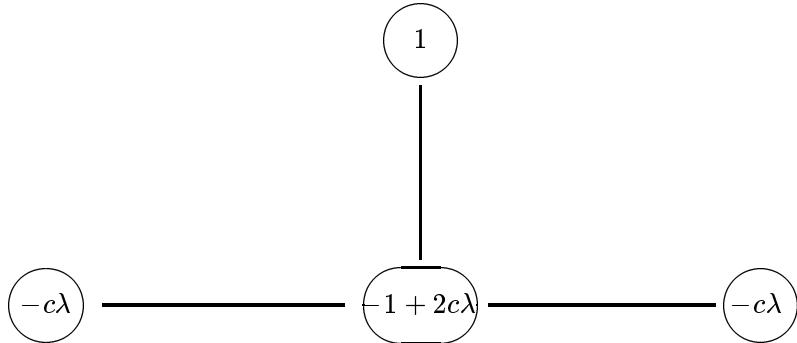


Abbildung 9.2: Das klassische Differenzenverfahren

$$u_{i,0}^{h,k} = \frac{\frac{b-a}{2} - \left| \frac{a+b}{2} - x_i \right|}{\frac{b-a}{2}} , \quad 0 \leq i \leq N+1 . \quad (9.12)$$

Für die übrigen Gitterpunkte, die “inneren” Gitterpunkte, brauchen wir Differenzengleichungen, welche die partielle Differentialgleichung (9.1) approximieren. Der Punkt (i, j) sei “innerer” Gitterpunkt - siehe Abbildung 9.1.

Beispiel 9.1 (Das klassische Differenzenverfahren) Wir approximieren die partielle Differentialgleichung (9.1) durch

$$D_{+t} u^{h,k}(x_i, t_j) = c D_{+x} D_{-x} u^{h,k}(x_i, t_j) , \quad (9.13)$$

d.h.

$$\frac{u_{i,j+1}^{h,k} - u_{i,j}^{h,k}}{k} = c \cdot \frac{u_{i+1,j}^{h,k} - 2u_{i,j}^{h,k} + u_{i-1,j}^{h,k}}{h^2} , \quad 0 < i \leq N , \quad 0 < j < M . \quad (9.14)$$

Die Differenzengleichung (9.14) lässt sich folgendermaßen umschreiben:

$$u_{i,j+1}^{h,k} = u_{i,j}^{h,k} + \frac{ck}{h^2} (u_{i+1,j}^{h,k} - 2u_{i,j}^{h,k} + u_{i-1,j}^{h,k}) , \quad 0 < i \leq N , \quad 0 < j \leq M . \quad (9.15)$$

Das System von Differenzengleichungen besteht aus den Gleichungen (9.11), (9.12) und (9.15), wobei jedem Gitterpunkt eine Differenzengleichung zugeordnet ist. Es ist sofort erkennbar, daß alle Werte von $u_{i,j}^{h,k}$ rekursiv berechnet werden können. Das Molekül wird in Abbildung 9.2 dargestellt, wo vorausgesetzt ist, daß

$$k = \lambda h^2 . \quad (9.16)$$

Die Gleichung (9.16) kann mit Hilfe der CFL-Bedingung begründet werden. Es folgt nämlich aus Absatz 8.4.1, daß der Abhängigkeitsbereich der Lösung u durch

$$AB(u; (x, t)) = (a, b)$$

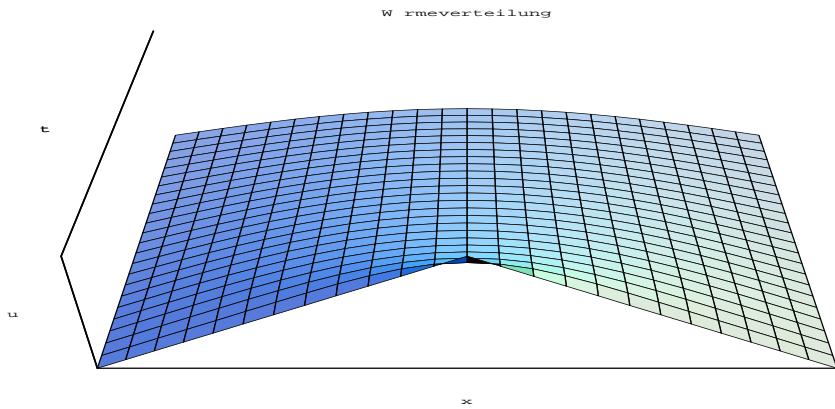


Abbildung 9.3: Numerische Lösung für $\lambda = \frac{5}{11}$

gegeben wird. Genau wie in Absatz 7.5 folgt, daß der Abhängigkeitsbereich der Approximation $u^{h,k}$ durch

$$AB(u^{h,k}; (x, t)) = (a, b) \cap \left(x - \frac{th}{k}, x + \frac{th}{k}\right)$$

gegeben wird. Damit die CFL-Bedingung erfüllt wird, ist es deshalb erforderlich, daß

$$\lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{h}{k} = \infty . \quad (9.17)$$

9.4 Stabilität und Konvergenz für das klassische explizite Differenzenverfahren

Die Lösung des Problems 1 mit $a = 0$, $b = \pi$, $c = 1$ und

$$\lambda = \frac{5}{11} \quad \text{bzw.} \quad \lambda = \frac{5}{9}$$

wird in den Abbildungen 9.3 und 9.4 dargestellt. Es ist sofort erkennbar, daß die Ergebnisse für $\lambda = \frac{5}{11}$ befriedigend, die für $\lambda = \frac{5}{9}$ recht unbefriedigend sind.

Die numerischen Ergebnisse des klassischen expliziten Differenzenverfahrens für die Wärmeleitungsgleichung, die in Abbildung 9.4 dargestellt sind, zeigen, daß die numerische Stabilität von Differenzenverfahren betrachtet werden muß. Es ist oft schwierig, die Stabilität eines Differenzenverfahrens zu untersuchen. Im jetzigen Fall ist es ausnahmsweise einfach, einen Beweis von Stabilität und Konvergenz anzugeben.

Satz 9.1 *u sei die Lösung des Modellproblems*

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} , \quad -1 < x < 1 , \quad 0 < t \leq T , \\ u(-1, t) &= u(+1, t) = 0 , \quad 0 < t \leq T , \\ u(x, 0) &= \varphi(x) \end{aligned}$$

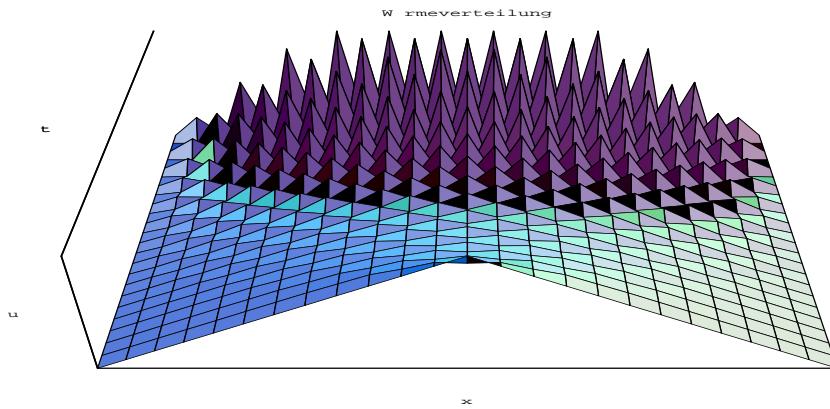


Abbildung 9.4: Numerische Lösung für $\lambda = \frac{5}{9}$

mit $u \in C^4([-1, +1] \times [0, T])$. $u_{i,j}^h$ sei die Lösung des klassischen expliziten Differenzenverfahrens mit $\Delta t = \lambda(\Delta x)^2$ und $\lambda \leq \frac{1}{2}$. Dann gilt:

$$|u_{i,j}^h - u_{i,j}| \leq T \left[\frac{\Delta t}{2} M_2 + \frac{(\Delta x)^2}{12} M_4 \right], \quad 0 \leq i \leq N, \quad 0 \leq j \leq M,$$

wobei

$$M_p := \max_{r+s=p} \max_{(x,t) \in \overline{G}} \left| \frac{\partial^p u(x,t)}{\partial x^r \partial t^s} \right|.$$

Beweis:

Der globale Fehler wird mit $e_{i,j}$ bezeichnet:

$$e_{i,j} := u_{i,j} - u_{i,j}^h, \quad 0 \leq i \leq N, \quad 0 \leq j \leq M.$$

Aus den Gleichungen (9.8) - (9.16) folgt:

$$\frac{e_{i,j+1} - e_{i,j}}{k} - \left[\frac{e_{i+1,j} - 2e_{i,j} + e_{i-1,j}}{h^2} \right] = \tau_{i,j}^h, \quad (9.18)$$

für $1 \leq i \leq N, \quad 0 < j \leq M,$

wobei

$$|\tau_{i,j}^h| \leq K := \frac{\Delta t}{2} M_2 + \frac{(\Delta x)^2}{12} M_4 \quad (9.19)$$

und

$$\begin{aligned} e_{0,j} &= 0, \quad 0 < j \leq M \\ e_{N+1,j} &= 0, \quad 0 < j \leq M \end{aligned} \quad (9.20)$$

$$e_{i,0} = 0, \quad 0 \leq i \leq N+1. \quad (9.21)$$

Sei

$$E_j := \max_{0 \leq i \leq N} |e_{i,j}| . \quad (9.22)$$

Unter Berücksichtigung von (9.20) und (9.21) gilt:

$$E_j = \max_{0 < i < N} |e_{i,j}| , \quad (9.23)$$

$$E_0 = 0 . \quad (9.24)$$

Aus (9.18), (9.19) folgt:

$$\begin{aligned} |e_{i,j+1}| &= |e_{i,j} + \lambda e_{i+1,j} - 2\lambda e_{i,j} + \lambda e_{i-1,j} + k\tau_{i,j}^h| , \\ &\leq |1 - 2\lambda| |e_{i,j}| + \lambda |e_{i+1,j}| + \lambda |e_{i-1,j}| + K\Delta t , \\ &\leq [|1 - 2\lambda| + 2\lambda] E_j + K\Delta t . \end{aligned} \quad (9.25)$$

Da $\lambda \leq \frac{1}{2}$, folgt

$$|1 - 2\lambda| = 1 - 2\lambda \quad (9.26)$$

und deshalb, aus (9.23) und (9.24),

$$E_{j+1} = \max_{1 < i < N} |e_{i,j+1}| \leq E_j + K\Delta t . \quad (9.27)$$

Durch Induktion und mit Hilfe von (9.24):

$$E_j \leq jK\Delta t \leq KT , \quad 0 \leq j \leq M . \quad (9.28)$$

Der kritische Schritt im Beweis von Satz 9.1 ist in den Gleichungen (9.27) und (9.28) enthalten. Es ist oft der Fall, daß die Eigenschaften von partiellen Differentialgleichungen sich in den Eigenschaften von Differenzen-Approximationen oder Finiten-Elementen-Approximationen widerspiegeln. Im jetzigen Fall ist es das Maximumprinzip für die inhomogene Wärmeleitungsgleichung.

Bemerkung 9.1 Satz 9.1 zeigt, daß das klassische explizite Differenzenverfahren stabil ist, falls $\lambda \leq 1/2$. Daß diese Bedingung auch notwendig ist, wird erst später bewiesen.

9.5 Implizite Differenzenverfahren - Einführung

In den vorherigen Absätzen ist bewiesen worden, daß das klassische explizite Differenzenverfahren für die Wärmeleitungsgleichung nur dann konvergieren kann, wenn

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \longrightarrow \infty , \quad \text{für } \Delta x \longrightarrow 0 .$$

In der Tat ist das klassische Differenzenverfahren nur dann konvergent, wenn

$$\Delta t = \lambda(\Delta x)^2 , \quad \lambda \leq \frac{1}{2} . \quad (9.29)$$

Diese Konvergenzbedingung ist ziemlich einschränkend. Sie bedeutet, daß wir für kleines Δx , um eine höhere Genauigkeit zu erreichen, den Zeitschritt Δt sehr klein wählen müssen. Infolgedessen braucht man in diesem Fall einen sehr hohen Rechenaufwand, und weil man so viele Zeitschritte benutzen muß, treten zusätzlich viel mehr Rundungsfehler auf. Es lohnt sich deshalb, nach numerischen Methoden zu suchen, bei denen die Konvergenzbedingungen nicht so einschränkend wie (9.29) sind.

Ähnliche Probleme treten bei der numerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen auf. Wir betrachten diesen Fall zuerst. Als Modellproblem nehmen wir die skalare lineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u'(t) &= -\alpha u(t) , \quad t > 0 \\ u(0) &= 1 , \end{aligned} \quad (9.30)$$

wobei α eine positive Konstante ist. Die Lösung dieses Anfangswertproblems ist

$$u(t) = \exp(-\alpha t) . \quad (9.31)$$

Um das Anfangswertproblem (9.30) zu lösen, benutzen wir eine Schrittweite $h = \Delta t$ und setzen $t_j = j\Delta t$. Drei bekannte numerische Methoden für gewöhnliche Differentialgleichungen sind das *Eulersche Verfahren*, das *Volle Implizite Verfahren* und die *Trapezregel*. Sie werden in den Gleichungen (9.32) - (9.34) aufgezeigt.

$$\frac{u_{j+1}^h - u_j^h}{\Delta t} = -\alpha u_j^h , \quad (\text{Euler}) \quad (9.32)$$

$$\frac{u_{j+1}^h - u_j^h}{\Delta t} = -\alpha u_{j+1}^h , \quad (\text{Volle Implizite}) \quad (9.33)$$

$$\frac{u_{j+1}^h - u_j^h}{\Delta t} = -\frac{\alpha}{2} [u_{j+1}^h + u_j^h] , \quad (\text{Trapezregel}) \quad (9.34)$$

Das Eulersche Verfahren ist ein explizites Verfahren. Das Volle Implizite Verfahren und die Trapezregel sind implizite Verfahren. Da aber die Differentialgleichung (9.30) linear ist, ist es in diesem speziellen Fall möglich, die numerischen Lösungen explizit zu berechnen. Die numerischen Lösungen für alle drei Verfahren werden in den Gleichungen (9.35) - (9.37) gegeben.

Methode	Positive numerische Lösungen	Beschränkte numerische Lösungen
Euler	$\Delta t \leq 1/\alpha$	$\Delta t \leq 2/\alpha$
Volle Implizite	alle Δt	alle Δt
Trapezregel	$\Delta t \leq 2/\alpha$	alle Δt

Tabelle 9.1: Stabilitätsbedingungen für $u'(t) = -\alpha u(t)$

$$u_j^h = (1 - \alpha \Delta t)^j \quad (\text{Euler}) \quad (9.35)$$

$$u_j^h = \left(\frac{1}{1 + \alpha \Delta t} \right)^j \quad (\text{Volle Implizite}) \quad (9.36)$$

$$u_j^h = \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\alpha \Delta t}{1 + \frac{1}{2}\alpha \Delta t} \right)^j \quad (\text{Trapezregel}) \quad (9.37)$$

Die exakte Lösung von (9.30) ist positiv und monoton fallend, weil α positiv ist (siehe Gleichung (9.31)).

Aus den Gleichungen (9.35) - (9.37) ist leicht festzustellen, für welche Werte von Δt die numerischen Lösungen positiv bzw. beschränkt sind. Die Ergebnisse werden in Tabelle 9.1 aufgeführt.

Die Ergebnisse in Tabelle 9.1 unterstützen eine bekannte Faustregel, nämlich: je impliziter ein numerisches Verfahren für Anfangswertaufgaben ist, umso stabiler ist das Verfahren.

Wir werden die vorherigen Überlegungen jetzt auf die numerischen Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung übertragen.

Es gibt eine deutliche Ähnlichkeit zwischen dem Anfangswertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung (9.30) und einer Anfangswertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} u_t &= cu_{xx} \\ u(x, 0) &= f(x). \end{aligned} \quad (9.38)$$

In Gleichung (9.30) steht eine Funktion von u auf der rechten Seite der Gleichung. In Gleichung (9.38) dagegen steht ein Differentialoperator auf der rechten Seite der Gleichung. Dieser Differentialoperator muß deshalb ausgewertet werden und dies geschieht durch Differenzen in der Ortsvariablen x . Durch diese Überlegungen wird der Zusammenhang zwischen den drei numerischen Verfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen

in den Gleichungen (9.32) - (9.34) und den folgenden drei Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung klar.

$$\frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h}{\Delta t} = c \left(\frac{u_{i+1,j}^h - 2u_{i,j}^h + u_{i-1,j}^h}{(\Delta x)^2} \right) \quad (\text{Klassische Explizite}) \quad (9.39)$$

$$\frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h}{\Delta t} = c \left(\frac{u_{i+1,j+1}^h - 2u_{i,j+1}^h + u_{i-1,j+1}^h}{(\Delta x)^2} \right) \quad (\text{Volle Implizite}) \quad (9.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h}{\Delta t} &= \frac{1}{2}c \left(\frac{u_{i+1,j+1}^h - 2u_{i,j+1}^h + u_{i-1,j+1}^h}{(\Delta x)^2} \right) \\ &+ \frac{1}{2}c \left(\frac{u_{i+1,j}^h - 2u_{i,j}^h + u_{i-1,j}^h}{(\Delta x)^2} \right) \quad (\text{Crank-Nicolson}) \end{aligned} \quad (9.41)$$

Das volle Implizite Verfahren (9.40) und das Crank-Nicolson-Verfahren (9.41) sind implizite Verfahren. Die Werte der numerischen Lösung am Zeitpunkt $(j+1)\Delta t$ können nicht einzeln berechnet werden. Stattdessen müssen alle Werte gleichzeitig berechnet werden, indem ein lineares Gleichungssystem gelöst wird. Wie das geschieht und welcher Rechenaufwand nötig ist, werden wir in Kürze besprechen.

Weil das Volle Implizite Verfahren und das Crank-Nicolson-Verfahren implizit sind, ist der Abhängigkeitsbereich von $u_{i,j}^h$ die ganze Achse. Das bedeutet, daß die CFL-Bedingung erfüllt ist und daß man hoffen darf, daß die beiden Verfahren für alle Werte von Δt und Δx stabil sind. Genauere Berechnungen, die wir später durchführen werden, zeigen, daß diese Hoffnung berechtigt ist. In diesem Zusammenhang siehe auch Tabelle 9.1.

Wir beschreiben jetzt, wie das Volle Implizite Verfahren und das Crank-Nicolson-Verfahren für das Modellproblem Problem 1 numerisch implementiert werden.

Die Differenzengleichungen haben folgende Gestalt: Die numerische Lösung für innere Gitterpunkte am Zeitpunkt j bildet einen N-Vektor \mathbf{u}_j^h :

$$\mathbf{u}_j^h := (u_{1,j}^h, \dots, u_{N,j}^h)^T \in \mathbb{R}^N. \quad (9.42)$$

A sei die $N \times N$ -Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & O \\ & & \ddots & & \\ O & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (9.43)$$

Das Volle Implizite Verfahren läßt sich dann folgendermaßen beschreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{j+1}^h &= \mathbf{u}_j^h - c\lambda A \mathbf{u}_{j+1}^h + \mathbf{b}_{j+1} \\ \mathbf{b}_j &:= \lambda(u_{0,j}^h, 0, 0, \dots, 0, u_{N+1,j}^h) \in \mathbb{R}^N \quad (\text{Volle Implizite}) \end{aligned} \quad (9.44)$$

Um die Lösung am Zeitpunkt $(j+1)\Delta t$ zu berechnen, muß folgendes Gleichungssystem gelöst werden:

$$(I + c\lambda A) \mathbf{u}_{j+1}^h = \mathbf{u}_j^h + \mathbf{b}_{j+1} \quad (\text{Volle Implizite}) \quad (9.45)$$

Für das Crank-Nicolson-Verfahren entstehen ähnliche Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{j+1}^h &= \mathbf{u}_j^h - \frac{c\lambda}{2} A \mathbf{u}_{j-1}^h \\ &\quad - \frac{c\lambda}{2} A \mathbf{u}_j^h + (\mathbf{b}_j + \mathbf{b}_{j+1})/2 \quad (\text{Crank-Nicolson}) \end{aligned} \quad (9.46)$$

$$(I + \frac{c\lambda}{2} A) \mathbf{u}_{j+1}^h = (I - \frac{c\lambda}{2} A) \mathbf{u}_j^h + (\mathbf{b}_j + \mathbf{b}_{j+1})/2 \quad (9.47)$$

Die Lösung der Gleichungen (9.45) bzw. (9.47) erfordert die Lösung eines Systems von N linearen Gleichungen. Dies ist aber sehr leicht, weil die zugehörigen Matrizen $(I + c\lambda A)$ bzw. $(I + \frac{c\lambda}{2} A)$ tridiagonale Matrizen sind. Sie sind auch irreduzibel diagonal dominant, d.h. in jeder Zeile ist der absolute Betrag des Diagonalelements nicht kleiner als die Summe der absoluten Beträge der nicht-diagonalen Elemente, und für mindestens eine Zeile ist diese Ungleichung streng. Es folgt hieraus, daß die betroffenen Matrizen nicht singulär und sogar positiv definit sind, so daß die Gleichungen durch das LR-Verfahren ohne Pivotsuche gelöst werden können.

Zur Vollständigkeit geben wir die bekannten Algorithmen für die Lösung eines N -Tridiagonalsystems $Tx = b$ an mit der Bemerkung, daß dieses Verfahren nur $\mathcal{O}(N)$ numerische Berechnungen erfordert. Dies bedeutet, daß das Volle Implizite Verfahren und das Crank-Nicolson-Verfahren ohne großen numerischen Aufwand durchführbar sind.

$$T\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (9.48)$$

$$T := \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & & & \\ d_2 & e_2 & f_2 & & O \\ & & \ddots & & \\ O & & & e_{N-1} & f_{N-1} \\ & & & d_N & e_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &:= (b_1, \dots, b_N)^T \in \mathbb{R}^N \\ \mathbf{x} &:= (x_1, \dots, x_N)^T \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

$$u_1 := e_1$$

$$\left. \begin{aligned} m_i &:= d_i/u_{i-1} \\ u_i &:= e_i - m_i f_{i-1} \end{aligned} \right\} i = 2, \dots, N \quad (9.49)$$

$$\begin{aligned} x_1 &:= b_1 \\ x_i &:= b_i - m_i x_{i-1} \quad i = 2, \dots, N \\ x_N &:= b_N/u_N \\ x_i &:= (x_i - f_i x_{i+1})/u_i, \quad i = N-1, \dots, 1. \end{aligned}$$

9.6 Ordnung und Stabilität

Der lokale Fehler des Crank-Nicolson-Verfahrens lässt sich folgermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} \tau_{i,j}^h &= D_{0t}^{k/2} u(x_i, t_{j+1/2}) - \frac{c}{2} D_{+x} D_{-x} u(x_i, t_j - \frac{c}{2}) D_{+x} D_{-x} u(x_i, t_{j+1}) \\ &= u_t \left(x_i, t_j + \frac{k}{2} \right) + O(k^2) - \frac{c}{2} u_{xx}(x_i, t_j) - \frac{c}{2} u_{xx}(x_i, t_j + k) \\ &\quad + O(h^2) \\ &= u_t \left(x_i, t_j + \frac{k}{2} \right) - c u_{xx} \left(x_i, t_j + \frac{k}{2} \right) + O(k^2) + O(h^2) \end{aligned} \quad (9.50)$$

wobei alle partiellen Ableitungen am Punkt $(x_i, t_{j+1/2})$ ausgewertet werden.

Es folgt aus (9.50), daß das Crank-Nicolson-Verfahren die Ordnung 2 hat, was ein großer Vorteil gegenüber dem vollen impliziten bzw. expliziten Verfahren ist, die jeweils nur die Ordnung 1 haben.

Die Ordnung und Stabilitätsgrenzen für die drei besprochenen Methoden werden in Tabelle 9.2 aufgelistet. Die Berechnung der Stabilitätsgrenzen erfolgt später.

Bezeichnung	Fehler	Stabilitätsbedingung
Klassische Explizite	$O(\Delta t + \Delta x^2)$	$\lambda c \leq \frac{1}{2}$
Volle Implizite	$O(\Delta t + \Delta x^2)$	—
Crank-Nicolson	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$	—

Tabelle 9.2: Vergleich der drei Methoden

Beispiel 9.2 Als Beispiel betrachten wir ein Problem, das schon in der ursprünglichen Arbeit über die Crank-Nicolson Methode (Crank und Nicolson [1947]) benutzt wurde.

Das mathematische Problem ist wie folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q \frac{\partial v}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (9.51)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\kappa v e^{-a/u} \quad (9.52)$$

mit Anfangsbedingung:

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (9.53)$$

$$v(x, 0) = f_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (9.54)$$

und Randbedingungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = H(u(0, t)), \quad t \geq 0 \quad (9.55)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (9.56)$$

a, k und q sind bekannte Konstanten und f_1, f_2 und H sind bekannte Funktionen.

Diese Gleichungen modellieren das Brennen einer Holzplatte, die auf beiden Seiten Flammen unterworfen ist (siehe Abbildung 9.5).

Die Maße der Platte in y - und z -Richtung sind so groß, daß das Problem als eindimensional betrachtet werden kann.

In den Gleichungen (9.51) - (9.56) bezeichnet $u(x, t)$ die Temperatur des Holzes und $v(x, t)$ das prozentuale Gewicht der flüchtigen Chemikalien im Holz. Die Gleichung (9.51) ist die Wärmeleitungsgleichung mit einem Term $-q \frac{\partial v}{\partial t}$, der die Wärme angibt, die durch das Brennen der freigesetzten Chemikalien erzeugt wird. Nach Vollendung des Prozesses ist $v = 0$, und das Holz ist verkohlt.

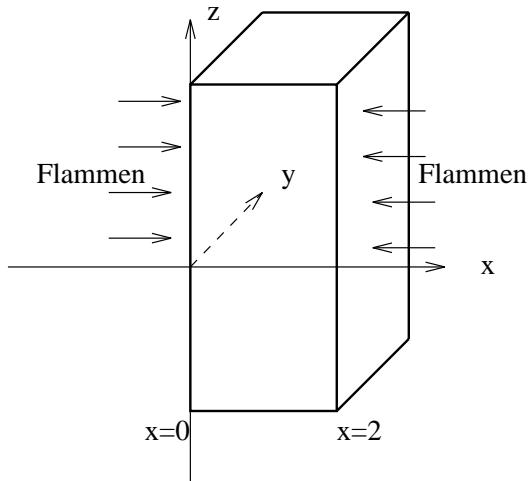


Abbildung 9.5: Eine brennende Holzplatte

	Problem I	Problem II
a	22.500	16.580
q	532	261
κ	7.23×10^{17}	1.62×10^{11}
$H_1(u)$	$0.90(u_0 - 1400)$	$1.1(u_0 - 1400) + 0.253\{(u_0/100)^4 - 1920\}$

Tabelle 9.3: Parameter für die zwei Probleme

Zwei Sätze von Parametern wurden benutzt (siehe Tabelle 9.3).

In den Gleichungen (9.51) und (9.52) bezeichnet t nicht die reelle Zeit, da eine Transformation durchgeführt worden ist mit dem Ziel, die Koeffizienten des Termes u_{xx} gleich 1 zu setzen. Der Zusammenhang zwischen der reellen Zeit t_R und t ist (Bamford et al. [1946], S. 179):

$$t_R = \frac{\ell^2 c \rho}{K} t$$

mit

$$\begin{aligned} 2\ell &= \text{Stärke des Brettes (cm)} \\ K &= 2.9 \times 10^{-4} \\ c &= 0.55 \\ \rho &= 0.60 , \end{aligned}$$

so daß

$$t_R = \frac{11}{9} 10^3 t \quad (9.57)$$

Um das Problem zu diskritisieren, betrachten wir zuerst das Problem

$$u_t = cu_{xx} + g(u), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t < T \quad (9.58)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (9.59)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \alpha \quad (9.60)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = \beta \quad (9.61)$$

Das übliche Gitter wird eingeführt mit $k = \Delta t$ und $h = \Delta x$. Das Crank-Nicolson Verfahren basiert auf

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} &\doteq \frac{1}{2}cu_{xx}(x_i, t_{j+1}) \\ &+ \frac{1}{2}cu_{xx}(x_i, t_j) + g(x_i, t_{j+1/2}, u) \end{aligned} \quad (9.62)$$

Für $1 \leq i \leq N$ werden $u_{xx}(x_i, t_j)$ und $u_{xx}(x_i, t_{j+1})$ durch die üblichen Differenzen approximiert:

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{h^2} + O(h^2), \quad 1 \leq i < N. \quad (9.63)$$

Für $i = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(x_0, t) + hu_x(x_0, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_0, t) + O(h^3) \\ &= u(x_0, t) + h\alpha + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_0, t) + O(h^3) \end{aligned}$$

so daß

$$u_{xx}(x_0, t) = \frac{2u(x_1, t) - 2u(x_0, t)}{h^2} - \frac{2\alpha}{h} + O(h) \quad (9.64)$$

Ebenfalls gilt:

$$u_{xx}(x_N, t) = \frac{2u(x_{N-1}, t) - 2u(x_N, t)}{h^2} + \frac{2\beta}{h} + O(h) \quad (9.65)$$

Sei nun A die $(N+1) \times (N+1)$ Matrix mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & O \\ & & \ddots & & \\ O & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (9.66)$$

Dann ist die Crank-Nicolson Approximation zu den Gleichungen (9.58) - (9.61):

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{j+1}^h &= \mathbf{u}_j^h - \frac{c\lambda}{2} A \mathbf{u}_{j+1}^h - \frac{c\lambda}{2} A \mathbf{u}_j^h + \\ &+ k \mathbf{g}_{j+1/2} + ch\lambda(\mathbf{b}_j + \mathbf{b}_{j+1})\end{aligned}\quad (9.67)$$

mit

$$\left. \begin{array}{lcl} \mathbf{u}_j^h & = & (u_{0,j}^h, \dots, u_{N,j}^h)^T \\ \lambda & = & k/h^2 \\ \mathbf{g}_{j+1/2} & = & (g_{0,j+1/2}, \dots, g_{N,j+1/2})^T \\ \mathbf{b}_j & = & (-\alpha_j, 0, \dots, 0, \beta_j)^T \end{array} \right\} \quad (9.68)$$

oder

$$\begin{aligned}\left(I + \frac{c\lambda}{2} A \right) \mathbf{u}_{j+1}^h &= \left(I - \frac{c\lambda}{2} A \right) \mathbf{u}_j^h \\ &+ kt \mathbf{g}_{j+1/2} + ch\lambda(\mathbf{b}_j + \mathbf{b}_{j+1})\end{aligned}\quad (9.69)$$

Seien α, β und g von u unabhängig, dann ist (9.67) ein lineares Gleichungssystem für \mathbf{u}_{j+1}^h . Im vorhandenen Fall aber gilt:

$$\begin{aligned}\alpha_j &= H(u(x_0, t_j)) \\ \beta_j &= 0 \\ g_{i,j+1/2} &= -q \frac{\partial v}{\partial t}(x_i, t_{j+1/2})\end{aligned}\quad (9.70)$$

Die Approximation von g wird später ausführlich erklärt.

Dies bedeutet, daß sowohl $\mathbf{g}_{j+1/2}$ als auch $(\mathbf{b}_j + \mathbf{b}_{j+1})$ von \mathbf{u}_{j+1} abhängen. Wir schreiben deshalb die Gleichungen (9.69) in folgender Gestalt:

$$\left(I + \frac{c\lambda}{2} A \right) \mathbf{u}_{j+1}^h = \mathbf{d}_j + \varphi(\mathbf{u}_{j+1}^h, \mathbf{u}_j^h) \quad (9.71)$$

mit

$$\begin{aligned}\varphi(\cdot, \mathbf{u}_j^h) &: \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1} \\ \varphi(\mathbf{u}_{j+1}^h, \mathbf{u}_j^h) &:= k \mathbf{g}_{j+1/2} + c\lambda h \mathbf{b}_j + \mathbf{b}_{j+1} \\ \mathbf{d}_j &:= \left(I - \frac{c\lambda}{2} A \right) \mathbf{u}_j^h\end{aligned}\quad (9.72)$$

Die Gleichung (9.71) ist eine nichtlineare Gleichung für \mathbf{u}_{j+1}^h , die iterativ gelöst werden muß, D.h. es wird eine Folge $\{\mathbf{u}_{j+1}^{h,s}\}$ berechnet mit

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{u}_{j+1}^{h,s} = \mathbf{u}_{j+1}^h \quad (9.73)$$

Zwei Möglichkeiten bieten sich an:

a) Einfache Iteration:

$$\mathbf{u}_{j+1}^{h,0} = \mathbf{u}_j^h$$

$$\left(I + \frac{c\lambda}{2} A \right) \mathbf{u}_j^{h,s+1} = \mathbf{d}_j + \varphi(\mathbf{u}_{j+1}^{h,s}, \mathbf{u}_j^h) \quad (9.74)$$

b) Das Newtonsche Verfahren:

$$\mathbf{u}_{j+1}^{h,0} = \mathbf{u}_j^h$$

$$F'(\mathbf{u}_{j+1}^{h,s})(\mathbf{u}_{j+1}^{h,s+1} - \mathbf{u}_{j+1}^{h,s}) = -F(\mathbf{u}_{j+1}^{h,s}) \quad (9.75)$$

mit

$$F(\mathbf{u}) := \left(I + \frac{c\lambda}{2} A \right) \mathbf{u} - \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u}_j^h) - \mathbf{d}_j \quad (9.76)$$

und

$$F'(\mathbf{u}) = \left(I + \frac{c\lambda}{2} A \right) - \varphi'(\mathbf{u}, \mathbf{u}_j^h) \quad (9.77)$$

(wobei die Jacobimatrix φ' bezüglich des ersten Arguments gebildet wird)

oder

$$\begin{aligned} \left[I + \frac{c\lambda}{2} A - \varphi'(\mathbf{u}_{j+1}^{h,s}, \mathbf{u}_j^h) \right] \mathbf{u}_{j+1}^{h,s+1} &= \mathbf{d}_j + \varphi(\mathbf{u}_{j+1}^{h,s}, \mathbf{u}_j^h) \\ &+ \left[I + \frac{c\lambda}{2} A - \varphi'(\mathbf{u}_{j+1}^{h,s}, \mathbf{u}_j^h) \right] \mathbf{u}_{j+1}^{h,s} \end{aligned}$$

Falls, wie in diesem Fall,

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = (\phi_0(u_0, \mathbf{z}), \dots, \phi_N(u_N, \mathbf{z}))^T \quad (9.78)$$

ist $\varphi'(\mathbf{u}, \mathbf{z})$ eine Diagonalmatrix

$$\varphi'(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = (\phi'_0(u_0, \mathbf{z}), \dots, \phi'_N(u_N, \mathbf{z}))^T \quad (9.79)$$

d.h. $F'(\mathbf{u})$ ist eine tridiagonale Matrix, und die Berechnung von \mathbf{u}_{j+1}^h erfolgt sehr schnell.

Es bleibt noch, die Auswertung von \mathbf{b}_j , \mathbf{b}_{j+1} und $\mathbf{g}_{j+1/2}$ zu besprechen.

Es gilt:

$$\mathbf{b}_j + \mathbf{b}_{j+1} = (-\alpha_j - \alpha_{j+1}, 0, 0, \dots, 0)^T \quad (9.80)$$

mit

$$\alpha_j + \alpha_{j+1} = H(\mathbf{u}_j^h) + H(\mathbf{u}_{j+1}^h) \quad (9.81)$$

In der Arbeit von Crank und Nicolson wird dies durch

$$\alpha_j + \alpha_{j+1} = 2H\left(\frac{\mathbf{u}_j^h + \mathbf{u}_{j+1}^h}{2}\right) \quad (9.82)$$

ersetzt, was wir ebenfalls machen werden. Die Differenz zwischen diesen beiden Ausdrücken ist kleiner als der Abbruchfehler in der Differenzengleichung (9.69).

Zur Berechnung von $\mathbf{g}_{j+1/2}$ benutzt man die Approximation

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_i, t_{j+1/2}) \doteq \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{k} \quad (9.83)$$

Die Koeffizienten κ und a können in der Praxis sehr groß sein. Deshalb wird $v_{i,j+1}$ folgendermaßen approximiert:

Aus

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\kappa v e^{-a/u} \quad (9.84)$$

folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln v = -\kappa e^{-a/u} \quad (9.85)$$

und

$$\begin{aligned} \ln \frac{v_{i,j+1}}{v_{i,j}} &= -\kappa \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{-a/u} dt \\ &\doteq -\kappa k \exp\left(\frac{-2a}{u_{i,j} + u_{i,j+1}}\right) \\ &=: -\kappa k E_{i,j+1} \end{aligned} \quad (9.86)$$

und letztendlich die Approximation

$$v_{i,j+1} = v_{i,j} \exp(-\kappa k E_{i,j+1}). \quad (9.87)$$

Die Approximation (9.87) hat den Vorteil gegenüber anderen Approximationen zur Gleichung (9.84), z.B. der Trapezregel

$$\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{k} = -\frac{\kappa}{2} [v_{i,j} e^{-a/u_{i,j}} + v_{i,j+1} e^{-a/u_{i,j+1}}],$$

daß selbst dann, wenn κ sehr groß ist, $v_{i,j+1}$ noch immer positiv ist.

Literatur:

Bamford, C.H., Crank, J., Malan, D.H.: The combustion of wood. Part I. Proc. Cambridge Philosophical Society 42 (1946), 166-182.

Crank, J., Nicolson, P.: A practical method for numerical evaluation of the solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. Proc. Cambridge Philosophical Society 43 (1947), 50-67.

Kapitel 10

Die eindimensionale Wellengleichung

10.1 Einführung

Die eindimensionale Wellengleichung ist:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 , \quad t > 0 , \quad x \in \mathbb{R}^1 . \quad (10.1)$$

Es gibt viele physikalische Anwendungen, z.B.: Schwingungen einer Saite oder Membran, Akustik, elektromagnetische Wellen. Eine Anwendung der Wellengleichung wurde schon in Absatz 4.5 besprochen. Hier geben wir noch ein klassisches Beispiel.

Beispiel 10.1 [Schwingungen einer Saite]
(Siehe Tychonoff, Samarskii, S. 27.)

Eine Saite der Länge L wird zwischen den Punkten $(0, 0)$ und $(L, 0)$ aufgespannt (Abbildung 10.1).

Die Saite wird aus dem Ruhezustand ausgelenkt und losgelassen, so daß Schwingungen auftreten. Um diesen Prozeß mathematisch zu beschreiben, werden folgende Voraussetzungen gemacht:

1. Die Verschiebung der Saite erfolge in einer Ebene, die (x, u) Ebene. Die Verschiebung ist immer senkrecht zur x -Achse. Dann läßt sich der Schwingungsprozeß durch eine Funktion $u(x, t)$ beschreiben, welche die vertikale Auslenkung der Saite charakterisiert.
2. Die Saite sei ein biegsam-elastischer Faden, d.h., die Spannungen in dem Faden wirken stets in der Richtung der Tangente. Gegenüber Biegungen leistet die Saite keinen Widerstand.

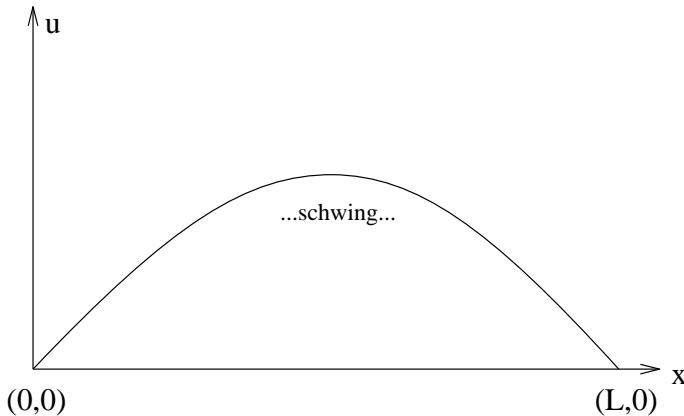


Abbildung 10.1: Eine schwingende Saite

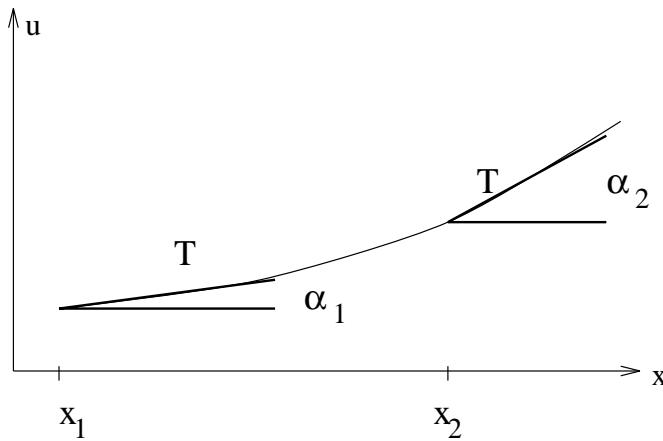


Abbildung 10.2: Die Kräfte, die auf ein Saitenelement wirken

3. Die Größe der Spannung T , welche in der Saite infolge der Elastizität entsteht, kann nach dem Hookeschen Gesetz berechnet werden:

$$T = E \cdot [L(t) - L_0] ,$$

wobei $L(t)$ bzw. L_0 die Länge der Saite zur Zeit t bzw. die Länge der unausgedehnten Saite darstellt und E eine Konstante ist (Young's Modulus).

Es wird vorausgesetzt, daß die Länge sich nur geringfügig ändert, und daß deshalb die Spannung T konstant bleibt, $T \equiv T_0$.

Zur Herleitung der Differentialgleichung betrachtet man ein Saitenelement zwischen $x = x_1$ und $x = x_2$ (Abbildung 10.2):

Für die Projektion der Spannung auf die u -Achse (die wir mit T_u bezeichnen) finden wir

$$T_u(x) = T_0 \sin \alpha \approx T_0 \tan \alpha = T_0 u_x ,$$

wobei α der Winkel zwischen der Tangente an die Kurve $u(x, t)$ und der x -Achse ist.

Zur Herleitung der Gleichung einer transversal schwingenden Saite benutzen wir das zweite Newtonsche Gesetz. Der gesamte lineare Impuls eines Elementes (x_1, x_2) in Richtung der u -Achse ist zunächst gleich

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(\xi, t) \varrho(\xi) d\xi ,$$

wobei ϱ die lineare Dichte der Saite bezeichnet. Wir setzen nun die Änderung der Bewegungsgröße während der Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$ gleich dem Impuls der wirkenden Kräfte, die von den Spannungen $T_0 u_x$ in den Punkten x_1 und x_2 sowie von den äußeren Kräften hervorgerufen werden. Letztere nehmen wir als stetig verteilt an und bezeichnen sie, bezogen auf die Längeneinheit, mit $f(x, t)$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] \varrho(\xi) d\xi \\ &= \int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} f(\xi, \tau) d\xi d\tau , \quad (*) \end{aligned}$$

die Gleichung einer transversal schwingenden Saite in Integralform. Um von dieser Integralgleichung zu einer Differentialgleichung zu gelangen, setzen wir die Existenz und Stetigkeit der zweiten Ableitungen von $u(x, t)$ voraus. Die Gleichung (*) geht dann nach zweimaliger Anwendung des Mittelwertsatzes und dem Grenzübergang $x_2 \rightarrow x_1$, $t_2 \rightarrow t_1$ über in

$$T_0 u_{xx} = \varrho u_{tt} - f(x, t) .$$

Im Fall konstanter Dichte ϱ schreibt man diese Gleichung gewöhnlich in der Gestalt

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(x, t) \quad \left(a = \sqrt{\frac{T_0}{\varrho}} \right) ,$$

wobei

$$F(x, t) := \frac{1}{\varrho} f(x, t)$$

die auf die Masseneinheit bezogene Kraftdichte ist. Wirken keine äußeren Kräfte, so erhalten wir die homogene Gleichung

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{oder} \quad u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (t = ay) ,$$

welche die freien Schwingungen einer Saite beschreibt. Diese Gleichung stellt das einfachste Beispiel einer hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung dar.

Für weitere Überlegungen notieren wir, daß die kinetische Energie T und die potentielle Energie U sich folgendermaßen darstellen lassen:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx , \quad (10.2)$$

$$U(t) = \frac{1}{2} T \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx . \quad (10.3)$$

10.2 Die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung

Die Charakteristiken sind

$$\begin{aligned} x - ct &= \text{const} \\ x + ct &= \text{const} \end{aligned}$$

Führen wir

$$\begin{aligned} \xi &:= x - ct \\ \eta &:= x + ct \end{aligned} \quad (10.4)$$

als neue Veränderliche und

$$v(\xi, \eta) := u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)) = u \left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2c} \right) \quad (10.5)$$

als neue unbekannte Funktion ein, dann folgt:

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + v_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_\xi + v_\eta , \\ u_t &= v_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} + v_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = -cv_\xi + cv_\eta , \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} , \\ u_{tt} &= c^2 \cdot (v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) . \end{aligned}$$

Es gilt:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 v_{\xi\eta} = 0 , \quad (10.6)$$

d.h.

$$v_{\xi\eta} = 0 . \quad (10.7)$$

Es folgt aus (10.7), daß $v(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$ für willkürliche Funktionen F und G , d.h.

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) . \quad (10.8)$$

Umgekehrt stellt für beliebige differenzierbare Funktionen F und G die durch (10.8) definierte Funktion u eine Lösung der Gleichung (10.1) dar. Folglich liefert (10.8) die allgemeine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung.

Das Anfangswertproblem für (10.1) ist:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \quad a \leq x \leq b, \\ u_t(x, 0) &= g(x), \quad a \leq x \leq b. \end{aligned} \quad (10.9)$$

[Z.B. wenn u die transversale Verschiebung einer Saite darstellt, ist f die Anfangsverschiebung und g die Anfangsgeschwindigkeit.]

Aus (10.8) und (10.9) folgt:

$$u(x, 0) = f(x) = F(x) + G(x) \quad (10.10)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = -cF'(x) + cG'(x) \quad (10.11)$$

und

$$f'(x) = F'(x) + G'(x), \quad (10.12)$$

so daß

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{+cf'(x) - g(x)}{2c} \\ G'(x) &= \frac{cf'(x) + g(x)}{2c} \end{aligned} \quad (10.13)$$

also

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds + k_1 \\ G(x) &= \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds + k_2 \end{aligned}$$

Aus (10.10) folgt, daß $k_1 + k_2 = 0$. Schließlich

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds. \quad (10.14)$$

Der Abhängigkeitsbereich von $u(x, t)$ ist das Intervall $(x - ct, x + ct)$.

10.3 Weitere Eigenschaften

Die folgenden Sätze werden z.B. in Smoller, Kapitel 3, bewiesen.

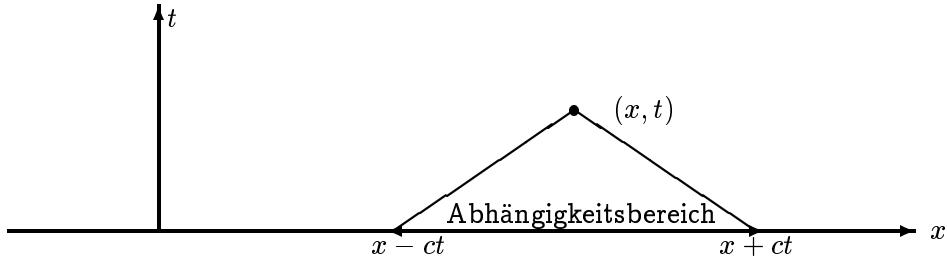


Abbildung 10.3: Der Abhängigkeitsbereich für die eindimensionale Wellengleichung

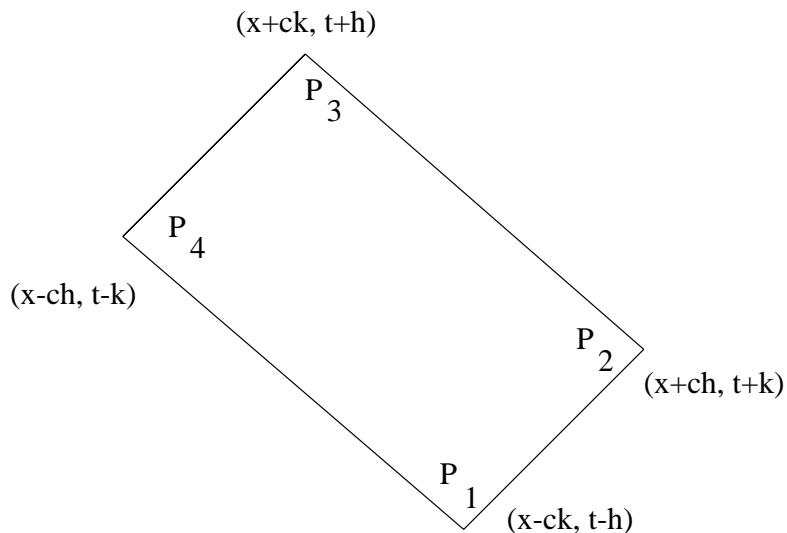


Abbildung 10.4: Ein charakteristisches Rechteck (mit $h > k$).

Satz 10.1 (Smoller, S. 23) Eine Funktion $u \in C^3(\mathbb{R}^2)$ ist eine Lösung der Gleichung

$$u_{tt} = u_{xx}$$

genau dann, wenn u die partielle Differenzengleichung

$$u(x - u, t - h) + u(x + ck, t + h) = u(x + ch, t + k) + u(x - ch, t - k)$$

erfüllt für alle $h, k > 0$. D.h.

$$u(P_1) + u(P_3) = u(P_2) + u(P_4)$$

mit P_1, P_2, P_3, P_4 wie in Abbildung 10.4. Die vier Punkte P_1 bis P_4 bilden ein charakteristisches Rechteck, dessen Seiten Charakteristiken sind.

Beweis:

- a) Sei u eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung. Es gilt:

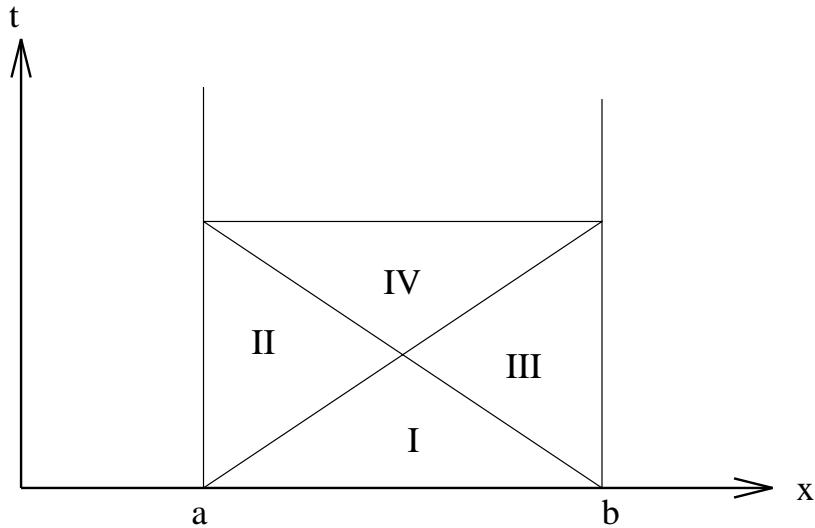


Abbildung 10.5: Lösungsschema für das Anfangs-Randwertproblem der Wellengleichung

$$u(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x} - ct) + G(\mathbf{x} + ct) ,$$

so daß u eine Lösung der partiellen Differenzengleichung ist.

- b) Sei $u \in C^3(\mathbb{R}^2)$ eine Lösung der partiellen Differenzengleichung. Man setzt $h = 0$, addiert $-2u(\mathbf{x}, t)$ zur Differenzengleichung, dividiert durch k^2 und betrachtet den Grenzübergang $k \rightarrow 0$.

Mit Hilfe von Satz 10.1 ist es möglich, das folgende Anfangswert- Randwertproblem zu lösen (siehe Abbildung 10.5).

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} , \quad a < x < b , \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) , \quad u_t(x, 0) = g(x) , \quad a < x < b \\ u(a, t) &= f_1(t) , \quad t > 0 \\ u(b, t) &= f_2(t) , \quad t > 0 \end{aligned}$$

Man berechnet die Lösung in den Gebieten I bis IV in dieser Reihenfolge.

Satz 10.2 (Smoller, S. 22) *Es gibt höchstens eine glatte Lösung für das Problem*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} , \quad a < x < b , \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) , \quad a < x < b \\ u_t(x, 0) &= g(x) , \quad a < x < b \\ u(a, t) &= f_1(t) \vee u_x(a, t) = g_1(t) , \quad t > 0 \\ u(b, t) &= f_2(t) \vee u_x(b, t) = g_2(t) , \quad t > 0 . \end{aligned}$$

Beweis:

Sei u die Differenz zweier glatter Lösungen zu den Anfangs/Randdaten. Dann ist u selber Lösung mit Anfangs/Randdaten = 0.

Man benutzt das Energieintegral

$$I(t) := \frac{1}{2} \int_a^b (c^2 u_x^2 + u_t^2) dx .$$

und differenziert nach t.

Nach einfachen Manipulationen ergibt sich

$$\frac{dI}{dt} = c^2 \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_t) dx = 0 ,$$

woraus die Behauptung wegen $I(0) = 0$ leicht folgt.

Satz 10.3 (Smoller, S. 20) Sei $u \in C^2$ eine Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= \phi(x, t) , \quad x \in \mathbb{R} , \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) , \quad x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) &= g(x) , \quad x \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}[f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_G \int \phi dx dt \end{aligned}$$

wobei das Gebiet G in Abbildung 10.6 dargestellt ist.

Beweis:

Man benutzt den Gaußschen Integralsatz der Ebene

$$\int_G \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} \right) dx dt = \int_{\partial G} P dx + Q dt$$

(siehe z.B. Bronstein + Semendjajew, S. 401) und erhält:

$$\begin{aligned} \int_G \int \phi dx dt &= \int_G \int (u_{tt} - c^2 u_{xx}) dx dt = \int_G \int \left(\frac{\partial}{\partial t} u_t - c^2 \frac{\partial}{\partial x} u_x \right) dx dt \\ &= \int_{\partial G} (-c^2 u_x dt - u_t dx) \end{aligned} \tag{10.15}$$

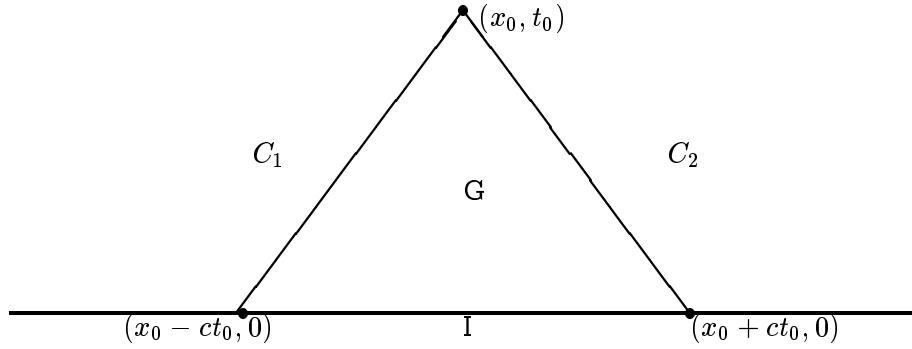


Abbildung 10.6: Die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

Das Randintegral wird nun für jedes der Dreiecksseiten gesondert betrachtet.
Auf I gilt $dt = 0$, so daß

$$\begin{aligned} \int_I -c^2 u_x dt - u_t dx &= - \int_I u_t dx \\ &= - \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} g(\mathbf{x}) dx \end{aligned}$$

Auf C_2 gilt

$$dx = -c dt, \quad dt = -\frac{1}{c} dx,$$

so daß

$$\begin{aligned} \int_{C_2} -c^2 u_x dt - u_t dx &= \int_{C_2} +cu_x dx + cu_t dt \\ &= \int_{C_2} +d(cu) \\ &= cu(x_0, t_0) - cu(x_0 + ct_0, 0) \end{aligned}$$

Ebenfalls gilt

$$\int_{C_1} -c^2 u_x dt - u_t dx = cu(x_0, t_0) - cu(x_0 - ct_0, 0).$$

Einsetzen der drei Teilrandintegrale in (10.15) ergibt die Behauptung.

Literatur

Bers, L., John, F., Schechter, M.: Partial Differential Equations. Interscience, 1964.

Bronstein + Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik.

Smoller, J.: Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, second edition, Springer 1994.

Williams, W.E.: Partial Differential Equations. Oxford, 1980.

Kapitel 11

Charakteristiken

11.1 Einleitung

Für die Advektionsgleichung

$$u_t + cu_x = 0 \quad (11.1)$$

haben die Kurven

$$x - ct = \text{const} \quad (11.2)$$

eine spezielle Bedeutung. Für die Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (11.3)$$

haben die Kurven

$$\left. \begin{array}{l} x - ct = \text{const} \\ x + ct = \text{const} \end{array} \right\} \quad (11.4)$$

auch eine spezielle Bedeutung. Sowohl 11.2 als auch 11.4 sind Beispiele von **Charakteristiken**, die wir jetzt näher untersuchen.

Charakteristiken sind Kurven bzw. Oberflächen, die für eine gegebene Differentialgleichung definiert sind. Sie finden Anwendungen auf bei:

- der Klassifikation von partiellen Differentialgleichungen,
- der Untersuchung der Frage, welche Anfangs- oder Randwertaufgaben sinnvoll gestellt sind,

- der Konstruktion analytischer Lösungen,
- der Fortpflanzung von Unstetigkeiten der Lösungen und
- der Formulierung und dem Beweis von Existenz- und Eindeutigkeitssätzen.

Als Beispiel betrachten wir zuerst die Advektionsgleichung

$$Lu := u_t + cu_x = 0 \quad (11.5)$$

mit $c > 0$:

- **Klassifikation**

Die Advektionsgleichung ist eine hyperbolische Gleichung, da es einen Vektor $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}^2$ gibt mit $\xi \neq 0$ und

$$\tau_x(L, \xi) := \xi_0 + c \xi_1 = 0.$$

- Die Anwendung der Charakteristiken

$$x - ct = \text{const}$$

bei der Theorie der Advektionsgleichung ist schon ausführlich in Kapitel 6 dokumentiert worden.

11.2 Differentialgleichungen höherer Ordnung

Sei

$$\mathbf{L} := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha \quad (11.6)$$

ein linearer Differentialoperator der Ordnung k auf $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Das *Hauptsymbol* in $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n) \in \Omega$ ist definiert als

$$\sigma_{\mathbf{x}}(\mathbf{L}, \xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \xi^\alpha, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (11.7)$$

Ein Vektor $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\xi \neq 0$, heißt *charakteristisch* für \mathbf{L} in \mathbf{x} , falls

$$\sigma_{\mathbf{x}}(\mathbf{L}, \xi) = 0. \quad (11.8)$$

Die Menge aller $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\sigma_x(\mathbf{L}, \xi) = 0$ bezeichnen wir mit $\text{char}_x \mathbf{L}$.

Eine Oberfläche $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ als Nullstellenmenge einer Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : f(\mathbf{x}) = 0\} \quad (11.9)$$

heißt charakteristisch bezüglich \mathbf{L} in \mathbf{x} , falls für den Normalvektor

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|_2} \quad (11.10)$$

gilt:

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) \in \text{char}_x(\mathbf{L}),$$

d. h.

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha (\text{grad } f)^\alpha = 0. \quad (11.11)$$

Sei $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte Oberfläche, $f(\mathbf{x}) = 0$. Sei $\mathbf{p} \in S$. Es ist möglich, neue Koordinaten $\xi_0(\mathbf{x}), \dots, \xi_n(\mathbf{x})$ so einzuführen, daß in einer Umgebung von \mathbf{p} die Oberfläche S durch $\xi_0(\mathbf{x}) = 0$ gegeben wird.

Sei nun u und dessen Ableitungen $D^\beta u$ für $|\beta| \leq k - 1$ auf S in ξ -Koordinaten gegeben (**Cauchy Daten**). Die Ableitungen $D_\xi^{\beta+\gamma} u$ mit $\gamma = (0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ können berechnet werden, da die Punkte $(0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ innerhalb von S liegen.

Sei nun

$$\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n), \quad \text{mit } |\alpha| = k.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_r} &= \sum_{i=0}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_r} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi_0} \cdot \frac{\partial \xi_0}{\partial x_r} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_r} \end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned} D^\alpha u &= \frac{\partial^k u}{\partial x_0^{\alpha_0} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \\ &= \frac{\partial^k u}{\partial \xi_0^k} \cdot \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} \right)^{\alpha_0} \dots \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} + \text{bekannte Terme} \\ &= \frac{\partial^k u}{\partial \xi_0^k} (\text{grad } \xi_0)^\alpha + \text{bekannte Terme} \end{aligned}$$

wobei die bekannten Terme die Ableitungen von u nach $\xi_i, i \neq 0$, der Ordnung k enthalten.

Wir betrachten nun die partielle DGL $Lu = 0$. Es gilt dann:

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha u = \text{bekannte Terme}$$

also

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\mathbf{x}) (\operatorname{grad} \xi_0)^\alpha \cdot \frac{\partial^k u}{\partial \xi_0^k} = \text{bekannte Terme}$$

also

$$\frac{\partial^k u}{\partial \xi_0^k} \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\mathbf{x}) (\operatorname{grad} f)^\alpha = \text{bekannte Terme} \quad (*)$$

Die Bedingung $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \notin \operatorname{char}_{\mathbf{x}}(\mathbf{L})$, d. h. S ist nicht charakteristisch (bzgl. \mathbf{L}). Dies hat zur Folge, daß die Ableitung

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial \xi_0^k} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{p} \in S}$$

berechenbar ist.

Umgekehrt zeigt diese Herleitung, daß es nicht sinnvoll ist, auf Charakteristiken Cauchy-Anfangswerte vorzugeben, da die Gleichung $(*)$ in diesem Fall keine neue Information liefert und statt dessen eine Verträglichkeitsbedingung zwischen den gegebenen Cauchy Daten beinhaltet.

Beispiel 11.1 Für die eindimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

gilt, daß eine Oberfläche (Kurve) $f(x, t) = 0$ in \mathbb{R}^2 charakteristisch ist, genau dann, wenn

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) - c^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0,$$

d. h.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \pm c \frac{\partial f}{\partial x}$$

d. h.

$$f = \phi(x + ct),$$

oder

$$f = \psi(x - ct)$$

mit beliebigen Funktionen ϕ, ψ .

Deshalb - für die eindimensionale Wellengleichung - sind die Charakteristiken (charakteristische Kurven oder Oberflächen):

$$\begin{aligned} x - ct &= \xi \\ x + ct &= \eta \end{aligned} \tag{11.12}$$

mit Konstanten ξ, η .

Wir definieren zuerst Charakteristiken für einzelne Differentialgleichungen. Anschließend werden Charakteristiken für Systeme von Differentialgleichungen behandelt.

11.3 Klassifikation

Das Hauptsymbol $\sigma_x(L, \xi)$ der Operator

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha, \quad x \in \Omega,$$

wird benutzt, um den Operator L zu klassifizieren.

11.3.1 Elliptische Gleichungen

Die einfachste Definition betrifft elliptische Gleichungen. Der Operator L ist elliptisch falls es keine reellen Charakteristiken gibt, d. h.

Definition 11.1 Sei

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}) \partial^\alpha$$

ein Differentialoperator für $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. L heißt elliptisch zu \mathbf{x} , falls für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$ gilt

$$\sigma_x(L, \xi) := \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\mathbf{x}) \xi^\alpha \neq 0 .$$

Beispiel 11.2 Die Laplace-Gleichung in \mathbb{R}^n ist elliptisch, da

$$\begin{aligned} Lu &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \\ \sigma_x(L, \xi) &= \sum_{i=1}^n \xi_i^2. \end{aligned}$$

Beispiel 11.3 Die biharmonische Gleichung in \mathbb{R}^2 ,

$$Lu = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4},$$

ist elliptisch, da

$$\begin{aligned} \sigma_x(L, \xi) &= \xi_1^4 + 2\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4 \\ &= (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2. \end{aligned}$$

Beispiel 11.4 Die Minimal-Oberflächengleichung

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0$$

ist elliptisch, da

$$\begin{aligned} \sigma_x(L, \xi) &= (1 + u_y^2)\xi_1^2 - 2u_xu_y\xi_1\xi_2 + (1 + u_x^2)\xi_2^2, \\ &= \xi_1^2 + \xi_2^2 + (\xi_1u_y - \xi_2u_x)^2 \end{aligned}$$

Es ist manchmal wichtig, die Elliptizitätsbedingung genauer zu klassifizieren. Für Differentialgleichungen der zweiten Ordnung ist die folgende Klassifikation nützlich:

Definition 11.2 Sei

$$L = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(\mathbf{x}) \partial^\alpha$$

ein Differentialoperator zweiter Ordnung für $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. L heißt gleichmäßig elliptisch auf Ω (*uniformly elliptic*), falls eine Konstante $a > 0$ existiert mit

$$a \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(\mathbf{x}) \xi^\alpha \leq \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \xi_i^2$$

für alle $\mathbf{x} \in \Omega$.

Beispiel 11.5 Die Gleichung

$$xu_{xx} + 2u_x = 0$$

ist nicht gleichmäßig elliptisch auf $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}^1$

11.3.2 Parabolische Gleichungen

Soweit mir bekannt ist, sind parabolische Gleichungen nur für Differentialgleichungen zweiter Ordnung definiert.

Definition 11.3 Sei

$$L = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D^\alpha$$

und

$$A = (a_\alpha(x) : |\alpha| = 2)$$

die Matrix der Koeffizienten $a_\alpha(x)$, $|\alpha| = 2$. Dann heißt L parabolisch falls A singulär ist. \square

Beispiel 11.6 Die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - u_{xx} + u_{yy} = 0$$

ist parabolisch, da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

singulär ist.

11.3.3 Hyperbolische Gleichungen

Die Definition von hyperbolischen Gleichungen ist etwas kompliziert, da es mehrere Spezialisierungen gibt. Für $k = 2$ ist die Definition am einfachsten:

Definition 11.4 Sei

$$L = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D^\alpha$$

und

$$A = (a_\alpha(x) : |\alpha| = 2)$$

die Matrix der Koeffizienten $a_\alpha(x)$, $|\alpha| = 2$. Dann heißt hyperbolisch falls alle Eigenwerte von A bis auf einen das gleiche Vorzeichen haben, und ein Eigenwert von A das andere Vorzeichen hat. \square

Beispiel 11.7 Die Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{yy} = 0$$

ist hyperbolisch, da die Menge der Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gleich $\{1, -1, -1\}$ ist. \square

Bemerkung 11.1 Die Gleichung

$$u_{tt}j + u_{xx} - u_{yy} - u_{22} = 0$$

ist weder elliptisch noch parabolisch noch hyperbolisch und heißt ultrahyperbolisch.

Für Gleichungen der Ordnung $k \neq 2$ gilt:

Definition 11.5 Sei

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha$$

heißt streng hyperbolisch in der Richtung \mathbf{n} falls

1. $\sigma_x(L, \mathbf{n}) \neq 0$
2. Alle Wurzeln ω der Gleichung

$$\sigma_x(L, \xi + \omega \mathbf{n}) = 0$$

seien reell und unterschiedlich für jedes ξ , das nicht ein Vielfaches von \mathbf{n} ist.

Bemerkung 11.2 Die Bedingung, daß L streng hyperbolisch ist, impliziert, daß die Lösungen von $Lu = 0$ nur mäßig wachsen. (siehe Renardy and Rogers, S. 43).

11.3.4 Gleichungssysteme

Systeme von Differentialgleichungen treten oft auf. Sie werden allerdings nur selten in der Literatur behandelt. Insbesondere werden Systeme höherer Ordnung kaum in Lehrbüchern behandelt. Einige der wenigen Ausnahmen sind die Bücher von Miranda [1970, S. 275], Courant und Hilbert [1962, S. 577] und Hörmander [1963, S. 267]. Sei

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}) &= (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_N(\mathbf{x}))^T, \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_N(\mathbf{x}))^T\end{aligned}$$

für $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sei \mathcal{M}_{ij} ein Differentialoperator der Ordnung α_{ij} .

Sei

$$s_i \in \mathbb{Z}, \quad t_i \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i \leq N$$

mit

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &\leq s_i + t_j, \\ \mathcal{M}_{ij} &\equiv 0 \text{ falls } s_i + t_j < 0.\end{aligned}$$

Sei $M_{ij}(\mathbf{x}, \xi)$ das charakteristische Polynom von \mathcal{M}_{ij} und

$$\hat{M}_{ij}(\mathbf{x}, \xi) = \begin{cases} M_{ij}(\mathbf{x}, \xi) & , \text{ falls } \alpha_{ij} = s_i + t_j \\ 0 & , \text{ falls } \alpha_{ij} < s_i + t_j \end{cases}$$

Das System

$$\sum_{j=1}^N \mathcal{M}_{ij}(\mathbf{x}) u_j = f_i, \quad 1 \leq i \leq N$$

heißt *elliptisch im Sinne von Douglis und Nirenberg*, falls es möglich ist, s_i und t_j so zu wählen, daß

$$\hat{a}(\mathbf{x}, \xi) := \det(\hat{M}_{ij}(\mathbf{x}, \xi)) \neq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Sei

$$\begin{aligned}a(\mathbf{x}, \xi) &:= \det(M_{ij}(\mathbf{x}, \xi)), \\ r &= \text{Grad } a, \\ R &= \text{Der maximale Grad der } N! \text{ Terme von } a \\ &\quad \text{bei der Entwicklung mit der Leibniz-Regel}\end{aligned}$$

Es ist von Volevich bewiesen worden (Agmon, Douglis, Nirenberg [1964, S. 39]), daß die folgenden Bedingungen für die Elliptizität notwendig und hinreichend sind:

1. $r = R,$
2. $\tilde{a}(\mathbf{x}, \xi) \neq 0$ für alle $\xi \neq 0$, wo bei \tilde{a} der Hauptteil von a , d.h. der Teil vom Grade r , ist.

Beispiel 11.8

$$\begin{aligned} u_x - v_{yy} &= f_1, \\ u_{yy} + u_y + v_{xxx} + v_{xy} &= f_2 \end{aligned}$$

Man setze

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 1, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2.$$

Es folgt:

$$a = \tilde{a} = \hat{a} = \begin{vmatrix} \xi & -\eta^2 \\ \eta^2 & \xi^3 \end{vmatrix} = \xi^4 + \eta^4, \quad r = 4, \quad R = 4.$$

Beispiel 11.9 [Cauchy-Riemann-Gleichungen]

$$\begin{aligned} u_x - v_y &= 0 \\ u_y + v_x &= 0 \end{aligned}$$

Man setze $s_1 = s_2 = 1, t_1 = t_2 = 0$. Es folgt:

$$\hat{a} = \begin{vmatrix} \xi & -\eta \\ \eta & \xi \end{vmatrix} = \xi^2 + \eta^2.$$

$$\begin{aligned} \tilde{a} = a &= \hat{a}, \\ r = R &= 2. \end{aligned}$$

Beispiel 11.10

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Setze

$$u_1 := u_x, \quad u_2 := u_y.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} - u_1 &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} - u_2 &= 0. \end{aligned}$$

Man setze

$$\begin{aligned} s_0 &= 0, \quad s_1 = s_2 = -1, \\ t_0 &= 2, \quad t_1 = t_2 = 1. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\hat{a}(\xi) = \begin{vmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1 & -1 & 0 \\ \xi_2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \xi_1^2 + \xi_2^2$$

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= a = \hat{a}, \\ r &= R = 2. \end{aligned}$$

In der Theorie von Agmon, Douglis und Nirenberg wird weiter vorausgesetzt:

Bedingung L: $\tilde{a}(\mathbf{x}, \xi)$ ist ein Polynom vom Grade $2m$ bezüglich ξ . Sei $\xi, \hat{\xi} \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Das Polynom $q(\tau) := \tilde{a}(\mathbf{x}, \xi + \tau\hat{\xi})$ hat genau n Nullstellen τ mit positivem Imaginärteil.

Bemerkung 11.3 Sei das System elliptisch im Sinne von Douglis und Nirenberg und $n > 2$. Dann ist die Bedingung L erfüllt. (Siehe Agmon, Douglis, Nirenberg [1964, S. 39], Miranda [1970, S. 244].)

Bemerkung 11.4 Sei $n = 2$. Es gebe eine Funktion $\gamma(\mathbf{x})$ und ein $\alpha > 0$ mit

$$Re\{\gamma(\mathbf{x})\hat{a}(\mathbf{x}, \xi)\} \geq \alpha|\xi|^{2r} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0,$$

wobei $2r$ die Ordnung des Differentialoperators \mathcal{M}_{ij} ist. Dann ist die Bedingung L erfüllt (siehe Miranda [1970, S. 245]).

Bemerkung 11.5 Die etwas komplizierte Definition ist erforderlich, da man sonst unerwünschte Ergebnisse erhalten kann.

Beispiel 11.11 Für die Laplace-Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

kann man das äquivalente System

$$\begin{aligned} u_x - v &= 0 \\ u_y - w &= 0 \\ v_x - w_y &= 0 \end{aligned}$$

aufstellen. Würden nur die höchsten Ableitungen betrachtet wäre

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 & 0 \\ \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_0 & \xi_1 \end{pmatrix} = 0. \quad \square.$$

Definition 11.6 Das System

$$\sum_{j=1}^N \mathcal{M}_{ij}(x) u_j = 0$$

heißt streng hyperbolisch in der Richtung \mathbf{n} ... falls (siehe Renardy and Rogers, S. 43 und S. 44).

Literatur

Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L.: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II. Comm. Pure Appl. Math. 17, 35-92(1964).

Douglis, A., Nirenberg, L.: Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 8, 503-538(1955).

Hörmander, L.: Linear Partial Differential Operators. Berlin: Springer, 1963.

Jeffrey, A.: Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves. Pitman, 1976.

Miranda, C.: Partial Differential Equations of Elliptic Type. New York: Springer, 1970.

Renardy, M. ; Rogers, R. C.: An Introduction to Partial Differential Equations. Springer, 1993.

11.4 Existenz und Eindeutigkeit für das Cauchy Problem

Die Grundidee der Definition von nicht charakteristischen Oberflächen, nämlich die Möglichkeit alle weiteren Ableitungen zu berechnen, führt zum berühmten Satz von Cauchy und Kowalewski:

Satz 11.1 (Cauchy-Kowalewski:) Seien $A_\alpha N \times N$ Matrizen und B ein N -Vektor, deren Koeffizienten analytische Funktionen sind. Sei

$$(Lu)(\mathbf{x}) := L = \sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha(\mathbf{x}), D^\alpha u(\mathbf{x}), \quad |\beta| < k$$

Sei $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine analytische nichtcharakteristische Oberfläche. Seien $f_\alpha : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$, $|\alpha| < k$, analytische Funktionen $(\mathbf{x})^\alpha \in S$. Dann existiert eine Funktion $u : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$, als analytische Lösung des Cauchy Problems in einer Umgebung U von $(\mathbf{x})^\alpha$, d. h. u ist analytisch in U und

1. $Lu = B_{in}U$
2. $D^\alpha u = f_\alpha$, $(\mathbf{x}) \in S \cap U$, $|\alpha| < k$

Satz 11.2 (Holmgren) Die Voraussetzungen seien wie in Satz 11.1, mit der Einschränkung, daß $A_\alpha = A_\alpha(\mathbf{x})$, die Matrizen A_α also nicht von partiellen Ableitungen von u abhängen dürfen. Die DGL also linear ist. Dann ist die Lösung u eindeutig in U .

Siehe L. Bers, F. John und M. Schechter [1964, S. 38], Smoller [1983, S. 33].

Kapitel 12

Schwache Lösungen

Ist das Gebiet, auf dem eine Differentialgleichung (DG1) zu lösen ist, "hinreichend glatt" berandet, d.h. $\partial\Omega$ ist von der Klasse C^m für ein $m \in \mathbb{N}$, so gelten bei elliptischen DG1 Regularitätsaussagen der Art, daß bei Vorgabe glatter Daten (z.B. Randwerte) auch die Lösungen gewisse Glattheitseigenschaften erfüllen.

Bei hyperbolischen DG1 ist eine solche Aussage i.allg. falsch. Als Beispiel hierfür betrachten wir den einfachen Fall der *Burgers Gleichung* in zwei Dimensionen:

Sei $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. Wir suchen die Lösung des Anfangswertproblems.

$$\begin{aligned} uu_x + u_t &= 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned} \tag{12.1}$$

Sei $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit den Eigenschaften

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

(Siehe Abbildung 12.1.)

Um das Verhalten der Lösung zu studieren, müssen wir den Verlauf der *Charakteristiken* betrachten. Diese seien hier noch einmal definiert:

Definition 12.1 1. Sei $L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung k auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Das Hauptsymbol (Hauptteil) in $x \in \Omega$ ist definiert als

$$\sigma_x(L, \xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \xi^\alpha \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

2. Ein Vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ heißt charakteristisch für L in x , falls

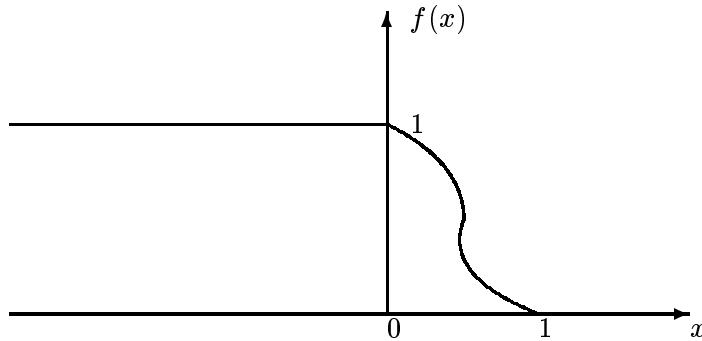


Abbildung 12.1:

$$\sigma_x(L, \xi) = 0$$

Die Menge aller $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\sigma_x(L, \xi) = 0$ bezeichnen wir mit $\text{char}_x(L)$.

Bemerkung 12.1 L heißt elliptisch zu x , falls $\text{char}_x(L) = \{0\}$.

Definition 12.2 Eine Hyperebene S heißt charakteristisch bezüglich L in x , falls für den Normalenvektor $n(x)$ gilt:

$$n(x) \in \text{char}_x(L).$$

S heißt nichtcharakteristisch, falls S an keinem Punkt x charakteristisch ist.

Unsere Gleichung (12.1) ist eine eindimensionale partielle DGL der Form

$$Lu = \sum a_j \partial_j u + bu = f, \quad (12.2)$$

wobei a_j, b und f \mathcal{C}^∞ -Funktionen von x seien. Sei $A = (a_1, \dots, a_n)$ ein Vektorfeld im \mathbb{R}^n . Dann ist

$$\text{char}_x(L) = \{\xi | \langle A(x), \xi \rangle = 0\},$$

d.h. $\text{char}_x(L)$ ist die zu A orthogonale Hyperebene. Eine Hyperebene S ist charakteristisch in x genau dann, wenn $A(x)$ tangential zu S in x ist.

Die Integralkurven des Vektorfeldes $A(x)$ heißen *charakteristische Kurven* der Gleichung (12.2). Sie sind Lösungskurven des folgenden Systems gewöhnlicher DGL:

$$\frac{dx}{dt} = A(x) \Leftrightarrow \frac{dx_j}{dt} = a_j(x), \quad j = 1, \dots, n \quad (12.3)$$

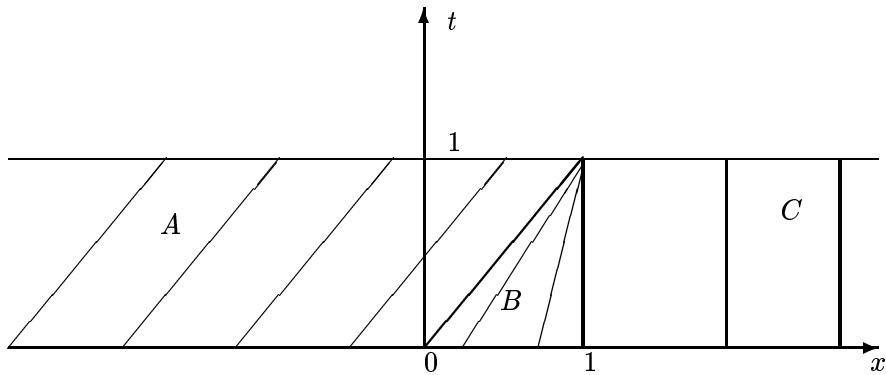


Abbildung 12.2:

Entlang dieser Kurven gilt für die Lösung von (12.2)

$$\frac{du}{dt} = \sum (\partial_j u) \frac{dx_j}{dt} = \sum a_j \partial_j u = f - bu . \quad (12.4)$$

Nehmen wir nun an, S sei nichtcharakteristisch. Dann geht durch jeden Punkt $x_0 \in S$ eine eindeutige Integralkurve von A , nämlich die Lösung von (12.3) mit dem Anfangswert $x(0) = x_0$. Entlang dieser Kurve ist die Lösung der partiellen DGL (12.2) einfache Lösung der gewöhnlichen DGL (12.4) mit dem Anfangswert $u(0) = f(x_0)$.

Somit ist unser Anfangswertproblem reduziert zu einem Anfangswertproblem für gewöhnliche DGL. Dieses Verfahren zur Lösung partieller DGL 1. Ordnung heißt auch *Charakteristikenverfahren*.

Wir bestimmen nun die Charakteristiken unseres Modellproblems. Es gilt:

$$\frac{dx}{ds} = u \quad \frac{dt}{ds} = 1 \quad \frac{du}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{u} \quad (12.5)$$

Die Anfangswerte "pflanzen" sich entlang der Charakteristiken fort. Wir haben also die Situation (siehe Abbildung 12.2):

Im Gebiet A haben die Charakteristiken die Steigung 1, also gilt in A : $u \equiv 1$.

In C haben die Charakteristiken die Steigung ∞ und es gilt: $u \equiv 0$ in C .

In dem Bereich B geht u vom Wert 1 über in den Wert 0, jedoch schrumpft das Intervall, indem der Übergang stattfinden kann, für $t \rightarrow 1$ auf 0 zusammen. In dem Punkt $(1,1)$ ist das Problem überbestimmt, es kann keine stetige Lösung existieren.

In dem Punkt $(1,1)$ entsteht eine *Schockwelle*. Da eine Lösung von (12.1) im klassischen Sinne nicht mehr existieren kann, ist es für weitere Untersuchungen erforderlich, den Lösungsbegriff zu modifizieren. Bei der folgenden Betrachtung der *schwachen Lösung*

wenden wir uns einem einfachen linearen Modellproblem zu:

Sei - wie oben - $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die folgende DGl 1. Ordnung:

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c \quad \text{für } (x, y) \in \Omega \quad (12.6)$$

Mit der Bezeichnung aus Def. 11.1 lässt sich (12.6) auch schreiben als

$$Lu = c \quad \text{mit} \quad Lu = au_x + bu_y \quad (12.7)$$

Wir nehmen im folgenden an, daß u klassische Lösung von (12.7) ist, d.h. u ist stetig differenzierbar.

Für die Definition der schwachen Lösung benötigen wir sog. *Testfunktionen*. Als Testfunktionen wählen wir

$$\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) := \{\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \mid \text{supp } \psi \text{ kompakt}, \text{supp } \psi \subset\subset \Omega\} ,$$

wobei

$$\text{supp } \psi = \{x \in \Omega \mid \psi(x) \neq 0\} .$$

Insbesondere gilt für $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$:

$$\text{dist}(\text{supp } \varphi, \partial\Omega) > 0 ,$$

d.h. $\varphi \equiv 0$ in einer Umgebung des Randes $\partial\Omega$.

Aus der Gleichung (12.7) folgt nun:

$$\int_{\Omega} \varphi(Lu - c) dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \quad (12.8)$$

Wir führen nun den Begriff des *adjungierten* Differentialoperators ein.

Definition 12.3 Sei L ein Differentialoperator der Ordnung k in der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ein Differentialoperator L^* der Ordnung k in Ω heißt adjungiert zu L , falls

$$\int_{\Omega} (L^* f) \cdot g dx = \int_{\Omega} f(Lg) dx \quad \forall f \in \mathcal{C}^k(\Omega) \forall g \in \mathcal{C}_0^k(\Omega) \quad (12.9)$$

Bemerkung 12.2 Für den linearen Differentialoperator aus Def. 11.1 gilt

$$L^* v = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (c_\alpha(x)v) .$$

Als letztes Hilfsmittel benötigen wir den *Gaußschen Integralsatz*:

Satz 12.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand, $n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld und $U \supset \Omega$ eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n . Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) dx = \int_{\partial\Omega} \langle F(x), n(x) \rangle d\sigma.$$

Beweis: Siehe Infini III

Wir setzen nun

$$v := (au\varphi, bu\varphi).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v &= (\varphi a)u_x + u(\varphi a)_x + (\varphi b)u_y + u(\varphi b)_y \\ \Rightarrow \operatorname{div} v &= \varphi Lu - uL^*\varphi \end{aligned} \quad (12.7), (12.9)$$

Wir wenden nun den Gaußschen Integralsatz an und erhalten:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} v dx &= \int_{\Omega} \varphi Lu - uL^*\varphi dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \varphi u \langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, n \rangle d\sigma = 0 \end{aligned} \quad (12.10)$$

da $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gewählt war.

Aus (12.7) und (12.10) folgt nun:

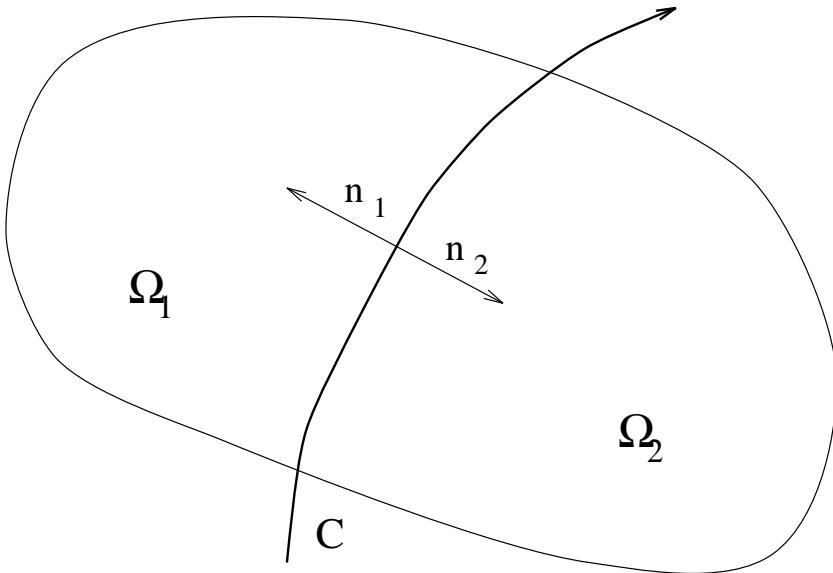
$$\int_{\Omega} \varphi c dx = \int_{\Omega} uL^*\varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (12.11)$$

Ist u klassische Lösung von (12.7), so gilt (12.11) für jede Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Wir definieren nun:

Definition 12.4 u heißt schwache Lösung von (12.7), falls $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} uL^*\varphi dx = \int_{\Omega} \varphi c dx$$

Bemerkung 12.3 1. Aus der obigen Herleitung folgt, daß eine klassische Lösung auch schwache Lösung der DGl ist. Die Umkehrung ist natürlich nicht immer richtig.

Abbildung 12.3: Das Gebiet Ω

2. Ist u schwache Lösung von (12.7) und $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, dann ist u klassische Lösung.

Beweis von 2:

Aus (12.11) folgt in (12.10)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi (Lu - c) dx &= 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \\ \Rightarrow Lu &= c, \text{ da } \varphi \text{ beliebig} \end{aligned}$$

Wir betrachten nun das Problem (12.7) in dem Gebiet $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ (siehe Abbildung 12.3)
Die Kurve C zerlege Ω in die Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 . Wir nehmen im folgenden an:

1. u ist schwache Lösung von (12.7) in Ω .

2. u sei klassische Lösung in $\Omega \setminus C$.

Unser Ziel besteht nun darin, Eigenschaften der Kurve C zu untersuchen.

Da u nach Voraussetzung schwache Lösung von (12.7) in Ω ist, gilt

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (u L^* \varphi - \varphi c) dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \quad (12.12)$$

Da u klassische Lösung in Ω_i , $i = 1, 2$, dürfen wir den Gaußschen Integralsatz anwenden:

$$\int_{\Omega_i} u L^* \varphi - c \varphi dx = \int_{\Omega_i} \varphi L u - c \varphi dx - \int_{\partial \Omega_i} \varphi u \langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, n \rangle ds \quad (12.13)$$

Es folgt mit (12.12):

$$0 = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \varphi (Lu - c) dx - \sum_{i=1}^2 \int_{\partial \Omega_i} \varphi u \langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, n \rangle ds \quad (12.14)$$

Nach Voraussetzung ist u klassische Lösung in Ω_i . Dann folgt aus (12.14):

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\partial \Omega_i} \varphi u \langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, n \rangle ds = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \quad (12.15)$$

Da $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ gewählt wird, ist in (12.15) nur die Integration über die Kurve C durchzuführen. Sei s der Kurvenparameter, d.h. Punkte der Kurve lassen sich schreiben als $(x(s), y(s))$. Dann gilt für die Normalen in Ω :

$$n_i = \pm \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} \end{pmatrix}$$

In den Integralen über den Rand taucht die äußere Normale auf. In unserem Fall gilt:

$$n_1 = -n_2$$

Sei ψ eine auf Ω definierte Funktion und $(x(s), y(s)) \in C$. Der Sprung von ψ auf C wird erklärt durch:

$$\begin{aligned} [\psi](s) &:= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x(s),y(s)) \\ (x,y) \in \Omega_2}} \psi(x,y) - \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x(s),y(s)) \\ (x,y) \in \Omega_1}} \psi(x,y) \\ &\equiv \psi_2 - \psi_1 \end{aligned} \quad (12.16)$$

Mit dieser Bezeichnung und den vorangegangenen Bemerkungen können wir (12.15) schreiben als

$$\int_C \varphi \left([au] \frac{\partial y}{\partial s} - [bu] \frac{\partial x}{\partial s} \right) d\sigma = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \quad (12.17)$$

Da $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ beliebig ist, folgt aus (12.17):

$$[au] \frac{\partial y}{\partial s} - [bu] \frac{\partial x}{\partial s} = 0 \quad (12.18)$$

Sind a, b stetige Funktionen auf Ω , so erhalten wir die Bedingung

$$[u] \left(a \frac{\partial y}{\partial s} - b \frac{\partial x}{\partial s} \right) = 0 \quad \text{auf } C \quad (12.19)$$

Ist u unstetig, d.h. $[u] \neq 0$, so gilt

$$a \frac{\partial y}{\partial s} - b \frac{\partial x}{\partial s} = 0, \quad (12.20)$$

d.h. C ist eine Charakteristik.

Zum Schluß betrachten wir noch ein Beispiel.

Sei

$$u(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{für } x - y > 0 \\ 1 & \text{für } x - y \leq 0 \end{cases}$$

u ist eine schwache Lösung der Gleichung

$$Lu = u_x + u_y = 0,$$

denn

1. u ist klassische Lösung der DGl in Ω_1 und Ω_2
2. die einzige Unstetigkeit von u ist entlang der Charakteristik C

Kapitel 13

Die Burger-Gleichung

Wir hatten den Begriff der schwachen Lösung bei linearen hyperbolischen Differentialgleichungen (DGl) eingeführt. Die Theorie der schwachen Lösungen ist jedoch insbesondere bei der Betrachtung nichtlinearer DGl von Bedeutung. In der heutigen Vorlesung beschäftigen wir uns mit nichtlinearen DGl vom Typ

$$a_x + b_y = 0 , \quad (13.1)$$

wobei a und b zweimal stetig differenzierbare Funktionen von x, y und u sind.

Bemerkung 13.1 Die Gestalt von (13.1) wird als *Erhaltungsform* bezeichnet, da Integration bzgl. x von x_1 nach x_2

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_1}^{x_2} b \, dx = -a|_{x=x_2} + a|_{x=x_1} \quad (13.2)$$

liefert.

Betrachten wir y als die Zeitvariable, so bedeutet (13.2), daß die zeitliche Änderung der Größe b proportional zur Differenz des "Flusses" a in den Endpunkten x_1 und x_2 ist. Viele physikalische Erhaltungssätze lassen sich in dieser Form schreiben (z.B. Masseerhaltung bei einer strömenden Flüssigkeit).

Anhand eines einfachen (stetigen) Modells für den Verkehrsfluß auf einer Einbahnstraße (ohne Abzweigungen) wollen wir Gleichungen vom Typ (13.1) näher betrachten:

Wir nehmen an, der Verkehr bewege sich in positiver x -Richtung. Sei $\rho(x, t)$ die Verkehrsdichte (Anzahl der Autos pro Einheitslänge) im Punkt x zum Zeitpunkt t , und sei $q(x, t)$ die Anzahl der Autos, die pro Einheitszeit den Punkt x passieren.

Die Gesamtzahl der Fahrzeuge im Intervall $[x_1, x_2]$ ist durch

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \rho \, dx$$

gegeben. Also wird die Zu- oder Abnahme der Autos zwischen den Kontrollpunkten x_1 und x_2 durch

$$\Delta A = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho \, dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho_t \, dx .$$

beschrieben. Diese Größe muß der Differenz von q in x_1 und x_2 entsprechen, falls keine Autofabrik an der Straße liegt oder eine sonstige Quelle oder Senke im Dichtefeld vorhanden ist. Es gilt somit für jeden Zeitpunkt t :

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho_t \, dx = q(x_1, t) - q(x_2, t) = - \int_{x_1}^{x_2} q_x \, dx .$$

Da x_1, x_2 beliebig gewählt werden können, muß gelten:

$$\rho_t + q_x = 0 \quad (13.3)$$

Um die DGl (13.3) weiter behandeln zu können, benötigen wir eine zusätzliche Beziehung zwischen ρ und q .

Ein "vernünftiges" Modell für den Verkehrsfluß ist gegeben durch

$$v(x, t) = c(1 - \rho/\rho_0) , \quad (13.4)$$

wobei ρ_0 die maximale Dichte der Autos pro Einheitsintervall (d.h. Stoßstange an Stoßstange) beschreibt. Gleichung (13.4) besagt, daß die Geschwindigkeit v maximal wird, wenn die Straße leer ist ($\rho = 0$) und der Verkehr zum Erliegen kommt, wenn $\rho = \rho_0$ ist. Die Konstante c ist die (von der kw-Zahl des Fahrzeugs abhängige) Maximalgeschwindigkeit.

Die Anzahl der Fahrzeuge in x pro Zeiteinheit ist dann gegeben durch

$$q = \rho \cdot v = \rho c(1 - \rho/\rho_0) . \quad (13.5)$$

Wir setzen

$$u := c(1 - 2\rho/\rho_0) .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{2c}{\rho_0} \rho_t \\ q_x &= c\rho_x(1 - 2\rho/\rho_0) = u\rho_x . \end{aligned} \quad (13.6)$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \rho_t + q_x &= -u_t \frac{\rho_0}{2c} + u\rho_x \\ \Rightarrow \rho_t + q_x &= -\frac{\rho_0}{2c}(u_t + uu_x) . \end{aligned} \quad (13.7)$$

Aus (13.3) ergibt sich dann die DGL

$$u_t + uu_x = 0 . \quad (13.8)$$

Diese Gleichung ist ein Spezialfall der Burger Gleichung

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}$$

aus der Gasdynamik, wenn die Viskosität ν verschwindet.

Bemerkung 13.2 Die einzigen C^1 -Lösungen von Gleichung (13.8) sind Funktionen, die für alle $t > 0$ in x -Richtung monoton wachsend sind (bei festem t).

Beweis: Sei $u \in C^1$ und sei (x_0, t_0) , $t_0 > 0$ beliebig. Wir betrachten die eindeutige Lösungskurve der DGL

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t) \quad x(t_0) = x_0 . \quad (13.9)$$

Diese Kurve ist eine Charakteristik von (13.8), denn es gilt

$$\frac{du(x(t), t)}{dt} = u_x \frac{dx}{dt} + u_t = u_x u + u_t = 0 . \quad (13.10)$$

u ist entlang von Charakteristiken konstant, also hat wg. (13.10) jede Charakteristik eine konstante Steigung, d.h. die Charakteristiken sind Gerade mit der Geschwindigkeit (= reziproke Steigung) u .

Angenommen u wächst nicht monoton für $t \geq 0$. Es gibt also $x_1 < x_2$ mit

$$u(x_1, t) > u(x_2, t) .$$

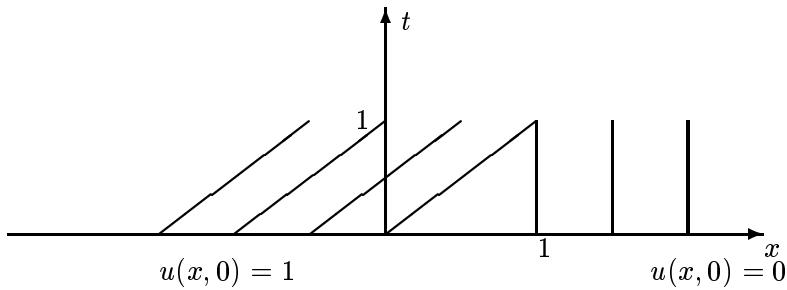
Dann ist die Steigung der Charakteristiken in x_1 kleiner als die in x_2 , die Geraden schneiden sich in einem Punkt für $t > 0$. Dies kann aber nicht sein, da nach Voraussetzung $u \in C^1$ gewählt war.

Beispiel 13.1 (s. Kapitel 11 (“Schwache Lösungen”))

Physikalisch relevante Probleme erfüllen die Bedingung aus der Bemerkung nicht. Betrachten wir unser Verkehrsmodell: Falls $u(x_1, t) < u(x_2, t) \quad \forall t > 0$ gelten soll, so heißt das

$$\rho(x_1, t) > \rho(x_2, t) \quad \text{für } x_1 < x_2 ,$$

d.h. die Dichte des Verkehrs nimmt für größer werdendes x ab, ein Verkehrsproblem wg. verstopfter Straßen entfällt.



Wenn wir die interessanten Probleme behandeln wollen, ist der klassische Lösungsbe-
griff sinnlos. Wir sind also gezwungen, den Lösungsbegriff zu verallgemeinern und die
schwachen Lösungen zu betrachten.

Zur Bestimmung der schwachen Lösung von (13.8) betrachten wir die Gleichung in ihrer Erhaltungsform:

$$\left(\frac{1}{2} u^2\right)_x + u_t = 0 . \quad (13.11)$$

Allgemeiner können wir die Erhaltungsform schreiben als

$$(f(u))_x + u_t = 0 . \quad (13.12)$$

Wie in Vorlesung 3 wird zur Bestimmung der schwachen Lösung (13.12) mit einer Test-
funktion $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ multipliziert und integriert. Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes
erhalten wir:

$$\int_{\Omega} f(u)\varphi_x + u\varphi_t d\mu = 0 . \quad (13.13)$$

Wir nennen eine Funktion u , die (13.13) erfüllt, eine schwache Lösung von (13.12).
Wir nehmen nun an, u sei eine schwache Lösung von (13.12) und u sei stetig differenzierbar
außerhalb einer Kurve C . In Analogie zu Vorlesung 3 erhalten wir dann

$$\int_C \varphi \left([f(u)] \frac{dt}{ds} - [u] \frac{dx}{ds} \right) ds = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega) \quad (13.14)$$

wobei wir mit $[\cdot]$ die Unstetigkeit über C bezeichnen wollen, z.B.

$$[u] = u_L - u_R ,$$

wobei u_L der Wert von u links von C sei und u_R der Wert von u rechts der Kurve C .

Auf der Kurve C muß also die folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{dx}{ds} [u] = [f(u)] \frac{dt}{ds} . \quad (13.15)$$

Bemerkung 13.3 Bei linearen hyperbolischen DGl gilt, daß die schwache Lösung nur
über Charakteristiken Unstetigkeiten aufweisen kann. (13.15) definiert keine Charak-
teristik, da die Argumente von $[\cdot]$ von u abhängig sind.

Wir bezeichnen die durch (13.15) bestimmte Kurve als *Stoßwelle*. Die Bedingung (13.15) heißt “Sprung-Bedingung” bzw. in der Gasdynamik die “Rankine-Hugoniot-Bedingung”.

Bemerkung 13.4 Bei sehr schwachen Stoßwellen ($[u]$ klein) fallen Stoßwelle und Charakteristik fast zusammen, denn es gilt

$$\frac{dx}{ds} - f'(u) \frac{dt}{ds} \approx \frac{dx}{ds} - \frac{[f(u)]}{[u]} \frac{dt}{ds} = 0 .$$

Die Größe $s := \frac{dx}{dt}$ bezeichnen wir als die Geschwindigkeit der Stoßwelle. Es gilt:

$$s = \frac{dx}{dt} = \frac{[f(u)]}{[u]} . \quad (13.16)$$

Durch die Gleichung (13.16) ist die Größe der Unstetigkeit und die Geschwindigkeit der Stoßwelle miteinander gekoppelt.

Beispiel 13.2 Betrachten wir die Burger Gleichung in der Erhaltungsform (13.11). Dann erhalten wir für die Geschwindigkeit der Stoßwelle

$$s = \frac{1}{2} \frac{u_L^2 - u_R^2}{u_L - u_R} = \frac{1}{2}(u_L + u_R) .$$

Die Erweiterung des Lösungsbegriffs auf schwache Lösungen ist nicht mathematischer Selbstzweck, sondern ist für die physikalische Modellbildung, z.B. in der Gasdynamik, äußerst nützlich. Mit Hilfe der schwachen Lösungen kann man Phänomene beschreiben, deren Lösung, abgesehen von einer schmalen Übergangsregion, in den zwei angrenzenden Gebieten auf einfache Weise zu erhalten ist und die dort auch beliebig glatt ist.

Im folgenden wollen wir anhand einiger Beispiele Eigenschaften von Stoßwellen untersuchen.

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} uu_x + u_t &= 0 \\ u(x, 0) &= \varphi(x) \end{aligned}$$

mit

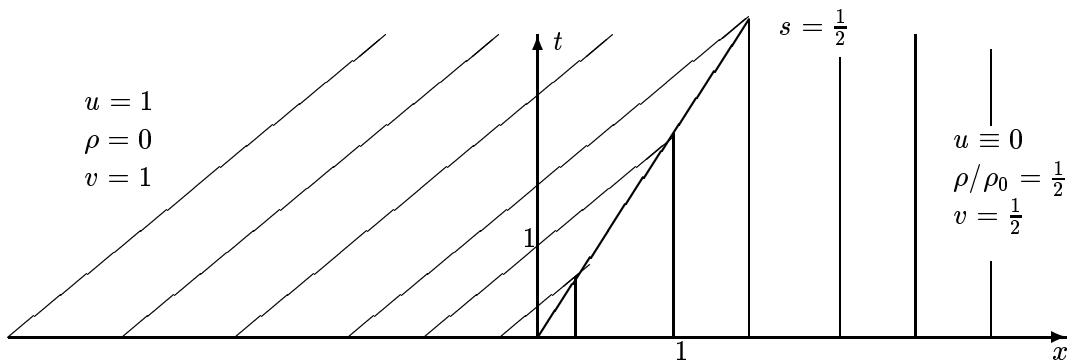
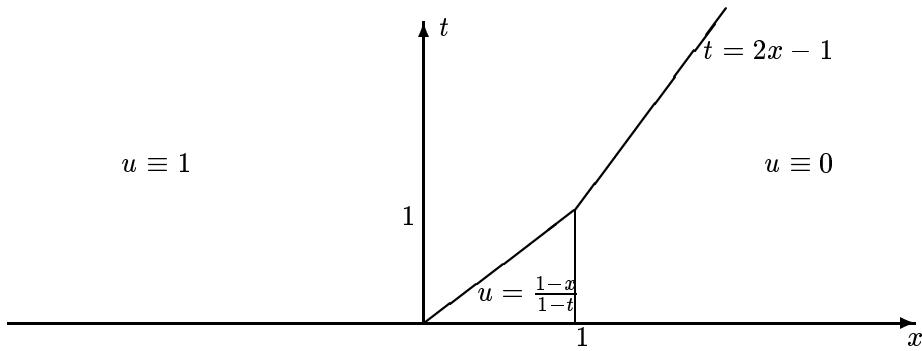
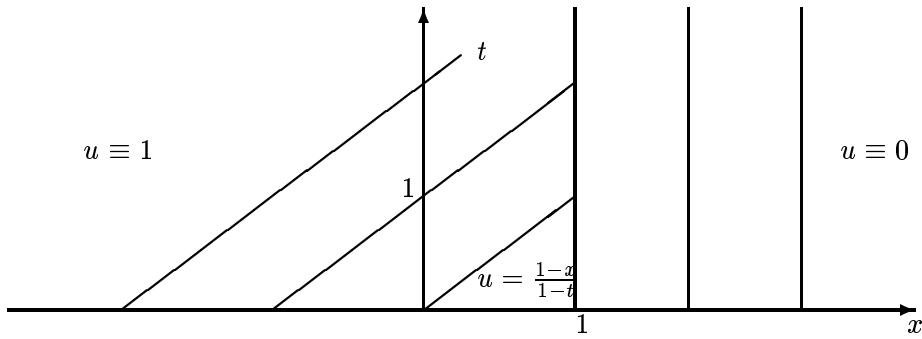
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0 \\ 1-x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Der Charakteristikenverlauf ist in der folgenden Abbildung dargestellt:

Im Punkt $(1,1)$ entsteht eine Stoßwelle mit der Geschwindigkeit $s = \frac{1}{2}$:

Als weiteres Beispiel betrachten wir unser Verkehrsmodell mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0 \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

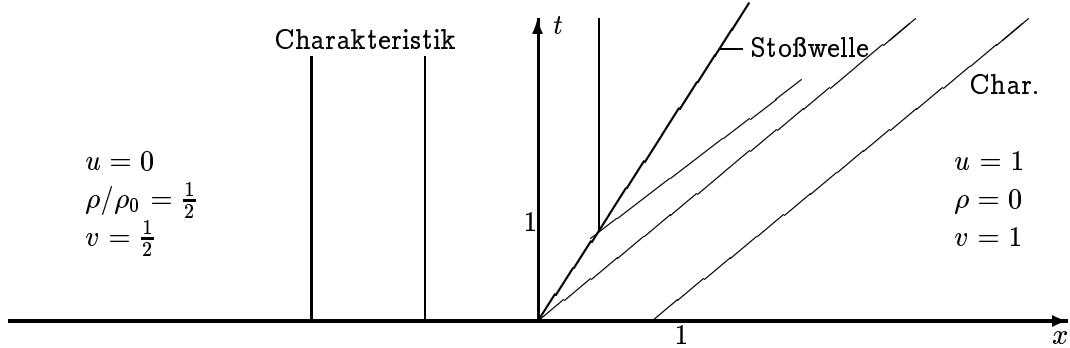


O.E. können wir $c = 1$ wählen. Wir erhalten die Lösung:

Aus dem Verlauf der Charakteristiken ist ersichtlich, daß eine Unstetigkeit entstehen muß.
Für die Kurve C muß gelten (siehe (13.16))

$$s = \frac{1}{2} .$$

In dem Verkehrsmodell ist eine Stoßwelle durch eine scharfe Unstetigkeit der Dichte ρ und folglich der Geschwindigkeit v der Autos gekennzeichnet. Die Stoßwelle entsteht, wenn der zunächst frei fahrende Verkehr auf das Ende eines Staus auftrifft. $\frac{dx}{dt}$ gibt die Geschwindigkeit an, mit der sich das Ende der Schlange bewegt.



Wir haben bereits bemerkt, daß Stoßwellen für $t > 0$ nur dann entstehen können, wenn u eine monoton fallende Funktion ist, d.h. in unserem Beispiel, wenn die Verkehrsdichte ρ anwächst.

Die Erweiterung des Lösungsbegriffs auf schwache Lösungen hat den Nachteil, daß die Eindeutigkeit verloren geht. Dies sieht man allein daran, daß die Wahl der Erhaltungsform der DGl nicht eindeutig ist. Eine weitere Erhaltungsform für die Burger Gleichung ist z.B. gegeben durch

$$\begin{aligned} v_t + (e^v)_x &= 0 \\ v &:= \log u \end{aligned} \tag{13.17}$$

Für die Geschwindigkeit der Stoßwelle gilt dann

$$s = \frac{dx}{dt} = \frac{u_L - u_R}{\log(u_L/u_R)} . \tag{13.18}$$

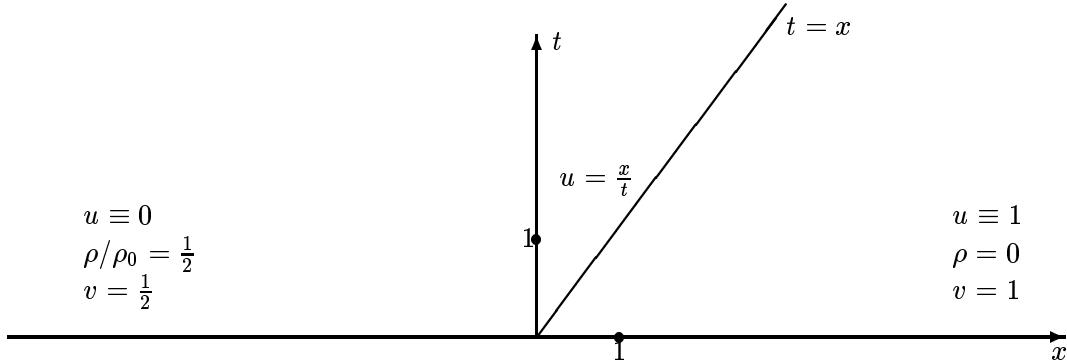
Der Vergleich mit (13.16) zeigt, daß aus verschiedenen Erhaltungsformen verschiedene Stoßwellen resultieren. Die Wahl der *richtigen* Erhaltungsform ist im Zusammenhang mit der Anwendung zu treffen. (Beispiel Physik: Energieerhaltung, Massenerhaltung etc.)

Es ist jedoch auch bei Wahl der richtigen Erhaltungsform möglich, daß zwei schwache Lösungen zulässig sind. Wir wählen die Erhaltungsform (13.11) und betrachten die Burger Gleichung mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases} \tag{13.19}$$

Wie in dem obigen Beispiel erhalten wir eine Stoßwelle mit der Geschwindigkeit $s = \frac{1}{2}$, die in $(0, 0)$ beginnt.

Diese Lösung ist physikalisch wenig sinnvoll, da sie bedeutet, daß die Fahrzeuge sich links mit der Geschwindigkeit $v_L = \frac{1}{2}$ bewegen, obwohl rechts die Straße leer ist ($\rho_R = 0$).



Eine weitere Lösung mit den Anfangswerten (13.19) ist gegeben durch
Diese Lösung ist stetig, aber nicht stetig differenzierbar. Die Unstetigkeiten der Ableitung fallen mit zwei Charakteristiken zusammen, die man als "schwache Stoßwellen" bezeichnen könnte.

Um Eindeutigkeit der schwachen Lösung zu erreichen, ist also eine weitere Bedingung erforderlich.

Für die Burger Gleichung lautet die Nebenbedingung für die Stoßwelle:

$$u_L \geq \frac{dx}{dt} \geq u_R . \quad (13.20)$$

Diese Bedingung entstammt wieder der Anwendung. Für die Gasdynamik ist (13.20) damit äquivalent, daß die Entropie über eine Stoßwelle zunehmen muß. Deshalb nennt man (13.20) auch die Entropiebedingung.

Eine andere Begründung für eine Bedingung dieser Art ist, daß für $t > 0$ durch (13.20) gewährleistet ist, daß jeder Punkt der Stoßwelle durch die Anfangsbedingungen auf beiden Seiten beeinflußt wird (d.h. die Charakteristiken laufen in die Stoßwelle hinein).

Kapitel 14

Systeme von Differentialgleichungen in Erhaltungsform

14.1 Einführung

Wir untersuchen quasi-lineare Erhaltungssysteme:

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{f}(\mathbf{u}))_x = 0 , \quad (14.1)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t) &\in \mathbb{R}^n , \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ \mathbf{f} &\in C^2(\Omega) , \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n . \end{aligned} \quad (14.2)$$

Die Erforschung solcher Systeme ist zur Zeit höchst aktuell.

14.2 Beispiele:

14.2.1 Die Burgersche Gleichung [Smoller, S. 241]

$$\begin{aligned} u_t + \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_x &= 0 \\ \text{oder} \\ u_t + uu_x &= 0 \end{aligned} \quad (14.3)$$

14.2.2 Die Eulersche Gleichung für Strömungen [Smoller, S. 240, 347, 322]

$$\begin{aligned}\rho_t + (\rho u)_x &= 0 \quad (\text{Erhaltung von Masse}) \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x &= 0 \quad (\text{Erhaltung von Momentum}) \\ \left[\rho \left(\frac{u^2}{2} + e \right) \right]_t + \left[\rho u \left(\frac{1}{2} u^2 + e \right) + pu \right]_x &= 0 \quad (\text{Erhaltung von Energie})\end{aligned}\quad (14.4)$$

wobei

$$\begin{aligned}i &:= e + p/\rho && (\text{Enthalpie}) \\ e &:= e(v, s) && (\text{Gegebene Funktion}) \\ v &:= 1/\rho \\ p &:= -e_v \\ T &:= e_s\end{aligned}$$

und

$$de = Tds - pdv .$$

Die Gleichungen (11.4) lassen sich folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}\rho_t + (\rho u)_x &= 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x &= 0 \\ s_t + us_x &= 0\end{aligned}\quad (14.5)$$

oder

$$U_t + A(U)U_x = 0$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ s \end{pmatrix} \quad A(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ p_\rho/\rho & u & p_s/\rho \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} \quad (14.6)$$

14.2.3 Das p -System [Smoller, S. 306]

$$\begin{aligned}v_t - u_x &= 0 \\ u_t + (p(v))_x &= 0 \\ t > 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}\end{aligned}\quad (14.7)$$

wobei

$$p' < 0 , \quad p'' > 0 .$$

Wenn $p(v) = kv^{-\gamma}$, erhalten wir die isentropischen gasdynamischen Gleichungen mit Lagrangeschen Koordinaten.

14.3 Einige Grundbegriffe

Definition: Die Gleichung (11.1) ist *hyperbolisch*, falls die Funktionalmatrix $df(u) := \frac{\partial f}{\partial u} n$ verschiedene reelle Eigenwerte besitzt:

$$\lambda_1(u) < \dots < \lambda_n(u) . \quad (14.8)$$

Die zugehörigen rechten und linken Eigenvektoren werden mit $r_i(u)$ bzw. $\ell_i(u)$ bezeichnet.

Beispiel:

Für das System (11.6) gilt

$$\det(\lambda I - A(U)) = (\lambda - u)[(\lambda - u)^2 - c^2]$$

mit Eigenwerten:

$$\lambda = u , \quad u \pm c \quad (14.9)$$

wobei

$$\begin{aligned} c &= \text{Schallgeschwindigkeit} \\ &:= \sqrt{p_\rho} . \end{aligned}$$

D.h., Störungen werden entweder mit der Strömung getragen oder mit Schallgeschwindigkeit vorwärts und rückwärts fortgepflanzt.

Definition: Eine beschränkte meßbare Funktion u ist eine (schwache) Lösung (Gleichung (11.1)) mit Anfangsdaten $u = u_0$, falls

$$\iint_{t \geq 0} (u \phi_t + f(u) \phi_x) dx dt + \int_{t=0} u_0 \phi dx = 0 \quad (14.10)$$

für alle Testfunktionen ϕ . (D.h. $\phi \in C^2(\mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}_+)$ und ϕ hat einen kompakten Träger.)

14.4 Das Lax-Wendroff-Verfahren

Für Gleichungen in Erhaltungsform ist das Lax-Wendroff-Verfahren im besonderen geeignet. Wie üblich wird ein Gitter (x_i, t_j) , $x_i = x_0 + i\Delta x$, $t_j = j\Delta t$ eingeführt. Die Herleitung dieses Verfahrens besteht aus mehreren Schritten.

1. Taylorentwicklung für $u_{i,j}$. Dabei werden die partiellen Ableitungen nach t in partielle Ableitungen nach x unter Berücksichtigung der partiellen Differentialgleichung umgewandelt.
2. Die partiellen Ableitungen werden approximiert. Man erhält dadurch das normale Lax-Wendroff-Verfahren.
3. Durch Umschreiben der partiellen Ableitungen erhält man das *Zweischritt-Lax-Wendroff-Verfahren*, das für die Berechnungen einige Vorteile bietet.

Diese Schritte werden jetzt weiter erläutert:

Schritt 1

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x_i, t_{j+1}) &= \mathbf{u}_{i,j+1} = \mathbf{u}_{i,j} + \Delta t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \Big|_{i,j} + O((\Delta t)^3) \\ &= \mathbf{u}_{i,j} - \Delta t (\mathbf{f}(\mathbf{u}))_x \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (A(x) \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x}) \Big|_{i,j} + O((\Delta t)^3) \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t &= -(\mathbf{f}(\mathbf{u}))_x \Big|_{i,j}, \\ \mathbf{u}_{tt} &= -\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \Big|_{i,j} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \Big|_{i,j}, \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \right) \end{aligned}$$

mit

$$A := \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}.$$

Schritt 2

Approximieren wir nun die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} \Big|_{i,j} &= \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1,j}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1,j})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \\
&= \frac{\mathbf{f}_{i+1,j} - \mathbf{f}_{i-1,j}}{2\Delta x} \\
&\quad \frac{\partial}{\partial x} \left(A(\mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \right) \Big|_{i,j} \\
&= \frac{1}{\Delta x} \left[A(\mathbf{u}(x_{i+1/2}, t_j)) \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \right)_{i+1/2,j} \right. \\
&\quad \left. - A(\mathbf{u}(x_{i-1/2}, t_j)) \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \right)_{i-1/2,j} \right]
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir das Lax-Wendroff-Verfahren.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{i,j+1} &\doteq \mathbf{u}_{i,j} - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{f}_{i+1,j} - \mathbf{f}_{i-1,j}) + \frac{(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2} \\
&\quad [A_{i+1/2} (\mathbf{f}_{i+1,j} - \mathbf{f}_{i-1,j}) - A_{i-1/2,j} (\mathbf{f}_{i,j} - \mathbf{f}_{i-1,j})] \tag{14.11}
\end{aligned}$$

wobei

$$A_{i+1/2,j} := \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1/2,j})}{\partial \mathbf{u}} \tag{14.12}$$

und

$$\mathbf{u}_{i+1/2,j} := \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i+1,j} + \mathbf{u}_{i,j}) = \mathbf{u}(x_{i+1/2}, t_j) + O(\Delta x^2) \tag{14.13}$$

da

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{i+1,j} &= \mathbf{u}_{i+1/2,j} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j} + O((\Delta x)^2), \\
\mathbf{u}_{i,j} &= \mathbf{u}_{i+1/2,j} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_{i,j} + O((\Delta x)^2).
\end{aligned}$$

Bemerkung: Das Lax-Wendroff-Verfahren hat einen lokalen Fehler der Ordnung $O((\Delta x)^2) + O((\Delta t)^2)$.

14.5 Das Zweischritt-Lax-Wendroff-Verfahren

Sei

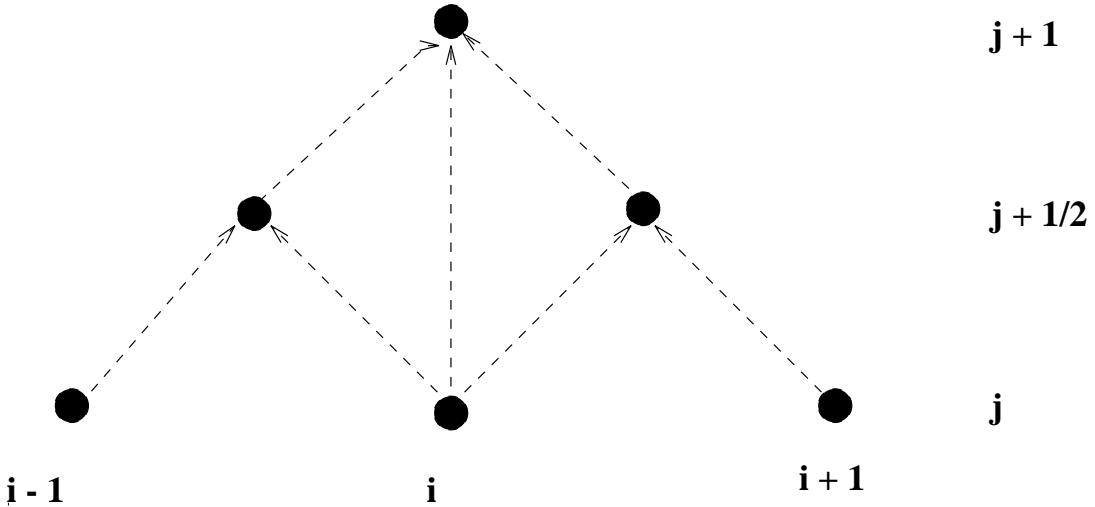


Abbildung 14.1: Das Zweischritt-Lax-Wendroff-Verfahren

$$\mathbf{u}_{i+1/2,j+1/2} := \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i+1,j} + \mathbf{u}_{i,j}) - \frac{(\Delta t)}{2(\Delta x)} (\mathbf{f}_{i+1,j} - \mathbf{f}_{i,j}) \quad (14.14)$$

$$\mathbf{u}_{i-1/2,j+1/2} := \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i-1,j} + \mathbf{u}_{i,j}) - \frac{(\Delta t)}{2(\Delta x)} (\mathbf{f}_{i,j} - \mathbf{f}_{i-1,j}) \quad (14.15)$$

Damit erhält man

$$\mathbf{u}_{i,j+1} = \mathbf{u}_{i,j} - \frac{(\Delta t)}{(\Delta x)} (\mathbf{f}_{i+1/2,j+1/2} - \mathbf{f}_{i-1/2,j+1/2}), \quad (14.16)$$

das Zweischritt-Lax-Wendroff-Verfahren (siehe Abbildung 14.1).

Dieses Verfahren hat auch den Fehler $O(\Delta x^2 + \Delta t^2)$. Die Zwischenwerte $\mathbf{u}_{i-1/2,j+1/2}$ und $\mathbf{u}_{i+1/2,j-1/2}$ haben zwar einen Fehler der Ordnung $O(\Delta t)$, aber dieser Fehler wird gelöscht in dem Ausdruck für $\mathbf{u}_{i,j+1}$.

14.6 Stabilität des Lax-Wendroff-Verfahrens

Sowohl das Lax-Wendroff-Verfahren (11.11) als auch seine Zweischritt-Verwandte (11.16) haben die Gestalt

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i,j+1} &= \mathbf{u}_{i,j} - \frac{1}{2} A \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (\mathbf{u}_{i+1,j} - \mathbf{u}_{i-1,j}) \\ &+ \frac{1}{2} \left(A \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (\mathbf{u}_{i+1,j} - 2\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{i-1,j}), \end{aligned}$$

falls

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} .$$

Die Verstärkungsmatrix G ist

$$G(\xi) = I - i \frac{\Delta t}{\Delta x} A \sin \alpha - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} A \right)^2 \cdot (1 - \cos \alpha)$$

mit

$$\alpha := \xi \Delta x .$$

Sei λ ein Eigenwert von A . Dann ist

$$\lambda_G = 1 - i\lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \alpha - \left(\lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (1 - \cos \alpha)$$

ein Eigenwert von G . Es gilt

$$|\lambda_G| < 1$$

genau dann, wenn

$$\left| \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| < 1 ,$$

und dies ist die notwendige Bedingung von Neumann für das Verfahren.

Es kann gezeigt werden, daß diese Bedingung für Konvergenz auch hinreichend ist.

14.7 Neue Methoden

Es gibt mehrere neue Methoden für hyperbolische Gleichungen in Erhaltungsform:

1. Die Methode von Roe
2. Die Methode von Godunov
3. Monoton Methoden
4. TVD Methoden
5. ‘Flux Limited’Methoden

Wir verweisen auf die Literatur:

Morton + Sweby (1985)
Jeltsch (1988)
Harten (1984)
Lax (1972)
Osher + Sweby (1986)
Arminjon (1986)

Literatur:

Arminjon, Paul: Some Aspects of High Resolution Numerical Methods for Hyperbolic Systems of Conservation Laws, with Applications to Gas Dynamics. INRIA, Rapports de Recherche No. 520, April 1986.

Harten, A.: On a class of high resolution total-variation-stable finite difference schemes, SIAM J. Numer. Anal., 21, 1984, 1-23.

Jeltsch, Rolf: Properties of Discrete Hyperbolic Conservation Laws. RWTH Aachen, Institut für Geometrie und Praktische Mathematik, Bericht Nr. 54, Januar 1988.

Lax, P.D.: Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves, CBMS Regional Conference Series in Applied Mathematics 11, SIAM, Philadelphia, 1972.

Majda, A.: Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables. Springer 1984.

Morton, K.W., Sweby, P.K.: A Comparison of Flux Limited Difference Methods and Characteristic Galerkin Methods for Shock Modelling. Oxford University Computing Laboratory, Numerical Analysis Group, Report Number 85/3.

Osher, S., Sweby, P.K.: Recent Developments in the Numerical Solution of Non-Linear Conservation Laws. "State of the Art in Numerical Analyasis" conference, Birmingham 14th-18th April 1986.

Smoller, J.: Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Springer 1983. Kapitel 15.

Kapitel 15

Der Äquivalenzsatz von Lax für Anfangswertaufgaben

15.1 Einleitung

In diesem Kapitel wird der berühmte Satz von Lax für Anfangswertaufgaben (Lax und Richtmyer [1956]) bewiesen, nämlich, daß unter bestimmten Voraussetzungen Stabilität \iff Konvergenz.

Bemerkung 15.1 Dieses Kapitel ist größtenteils aus dem Buch von Meis und Markowitz [1978] entnommen. Siehe auch Richtmyer und Morton [1967] und Strikwerda [1989].

15.2 Banachräume

Definition 15.1 Es sei B ein Vektorraum über dem Körper $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ (resp. $\mathbf{K} = \mathbb{R}$). B heißt komplexer (resp. reeller) Banachraum, wenn folgendes gilt:

1. In B ist eine Abbildung $\|\cdot\| : B \rightarrow [0, \infty)$ (genannt Norm) mit folgenden Eigenschaften ausgezeichnet:

- (a) $\|a\| = 0 \leftrightarrow a = 0$ ($a \in B$)
- (b) $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$ ($\lambda \in \mathbf{K}$, $a \in B$)
- (c) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ ($a, b \in B$) .

2. Der Raum B ist bezüglich der durch $\|\cdot\|$ induzierten Topologie vollständig; d.h. jede Cauchy-Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen von B konvergiert gegen ein Element a von B .

Dabei heißt $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge, falls es zu jedem positiven ϵ eine natürliche Zahl n_0 gibt, so daß aus $n, m > n_0$ folgt $\|a_n - a_m\| < \epsilon$. Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen ein Element a von B , falls $\{\|a - a_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Jeder Banachraum besteht also aus einem Vektorraum und einer Definition für die Norm. Demnach sind zwei Banachräume, denen der gleiche Vektorraum zugrundeliegt, zu unterscheiden, falls die Normen verschieden sind. Insbesondere beachte man, daß ein unendlichdimensionaler Vektorraum, der bez. einer gegebenen Norm vollständig ist, diese Eigenschaft keineswegs bezüglich einer anderen Norm besitzen muß.

Beispiel 15.1 Der Vektorraum \mathbb{C}^n wird mit jeder der beiden Normen

$$\|x\| = \max_j |x_j|, \quad \|x\| = \left(\sum_j x_j \bar{x}_j \right)^{1/2}$$

zu einem Banachraum.

Beispiel 15.2 Es sei $K \subset \mathbb{R}^m$ eine kompakte Menge. Der Vektorraum $C^0(K, \mathbb{C}^n)$ ist bezüglich der Norm

$$\|f\|_\infty = \max_j \max_{x \in K} |f_j(x)|$$

vollständig und folglich ein Banachraum. Dabei ergibt sich die Vollständigkeit des Raumes aus der Tatsache, daß jede Cauchy-Folge bei dieser Definition der Norm eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen darstellt. Eine solche Folge konvergiert bekanntlich gegen eine stetige Grenzfunktion, also gegen ein Element des Raumes.

Der Raum $C^0(K, \mathbb{C}^n)$ ist jedoch bez. der Norm

$$\|f\|_2 = \left(\int_K \sum_{j=1}^n f_j(x) \overline{f_j(x)} dx \right)^{1/2}$$

nicht vollständig. Dies ergibt sich aus dem folgenden Gegenbeispiel: In $C^0([0, 2], \mathbb{C})$ ist die Folge $\{f_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ mit

$$f_\mu(x) = \begin{cases} x^\mu & \text{für } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{für } x \in [1, 2] \end{cases}$$

eine Cauchy-Folge. Sie konvergiert aber gegen keine stetige Grenzfunktion.

Wenn im folgenden vom *Banachraum* $C^0(K, \mathbb{C}^n)$ die Rede ist, meinen wir immer den Vektorraum der stetigen Funktionen $f : K \rightarrow \mathbb{C}^n$ in Verbindung mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$.

Beispiel 15.3 Es sei G ein Gebiet des \mathbb{R}^m und $\Lambda = \{f : G \rightarrow \mathbb{C}^n \mid f \text{ quadratintegrierbar in } G\}$. Dabei heißt f quadratintegrierbar in G , falls das Integral

$$\int_G \sum_{j=1}^n (f_j(x) \overline{f_j(x)}) dx$$

im Sinne von Lebesgue existiert und endlich ist. Λ bildet mit der üblichen Definition der Addition und Multiplikation mit einem Skalar einen Vektorraum über \mathbb{C} . Die durch

$$|||f||| = \left(\int_G \sum_j f_j(x) \overline{f_j(x)} dx \right)^{1/2}$$

definierte Abbildung $|||\cdot||| : \Lambda \rightarrow [0, \infty)$ hat alle Eigenschaften einer Norm mit Ausnahme von 1.(a), da $|||f||| = 0$ für alle $f \in N$ mit

$$N = \{f \in \Lambda \mid \{x \in G \mid f(x) \neq 0\} \text{ hat das MaßNull}\}.$$

Um diesen Mangel zu beheben, geht man zum Quotientenraum Λ/N über. Die Elemente von Λ/N sind Äquivalenzklassen von Abbildungen aus Λ , die sich nur auf einer Menge vom MaßNull unterscheiden. Λ/N wird in kanonischer Weise zu einem Vektorraum über \mathbb{C} . Mit der Definition

$$\|\tilde{f}\| := |||f||| \quad (\tilde{f} \in \Lambda/N, f \in \tilde{f})$$

wird dieser Vektorraum zu einem Benachraum, den wir mit $L^2(G, \mathbb{C}^n)$ bezeichnen. Während sich die Vektorraum- und Normeigenschaften leicht zeigen lassen, gestaltet sich der Nachweis der Vollständigkeit wesentlich schwieriger (vgl. Yosida 1968, Kap. I.9). Zur Vereinfachung der Schreib- und Sprechweise werden wir im folgenden nicht mehr zwischen den Äquivalenzklassen $\tilde{f} \in L^2$ und deren Repräsentanten $f \in \tilde{f}$ unterscheiden, da sich die jeweilige Bedeutung aus dem Zusammenhang ergibt.

Die folgende Definition führt den wichtigen Begriff einer dichten Menge ein.

Definition 15.2 Es seien B ein Banachraum und D_1, D_2 Teilmengen von B mit $D_1 \subset D_2$. D_1 heißt dicht in D_2 , wenn es zu jedem $a \in D_2$ und zu jedem $\epsilon > 0$ ein $b \in D_1$ gibt mit $\|a - b\| < \epsilon$.

Satz 15.1 (Approximationssatz von Weierstraß) Es sei $K \subset \mathbb{R}^m$ eine kompakte Menge. Dann gilt: Der Vektorraum der auf K definierten Polynome mit komplexen Koeffizienten liegt dicht im Banachraum $C^0(K, \mathbb{C})$.

Satz 15.2 1. Der Vektorraum

$$V = \{f \in C^\infty([a, b], \mathbb{C}) \mid f^{(\nu)}(a) = f^{(\nu)}(b) = 0, \nu = 1(1)\infty\}$$

liegt dicht im Banachraum $C^0([a, b], \mathbb{C})$.

2. Der Vektorraum der beschränkten Funktionen aus $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegt dicht im Banachraum der beschränkten Funktionen aus $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Satz 15.3 Es sei G ein Gebiet des \mathbb{R}^m . Dann gilt:

1. Der Vektorraum $C_0^\infty(G, \mathbb{C})$ der auf G definierten unendlich-oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger liegt dicht im Raum $L^2(G, \mathbb{C})$.
2. Der Vektorraum der auf G definierten Polynome mit komplexen Koeffizienten liegt dicht im Raum $L^2(G, \mathbb{C})$, wenn G beschränkt ist.

Definition 15.3 Es seien B_1, B_2 Banachräume und D ein Untervektorraum von B_1 . Eine Abbildung

$$A : D \rightarrow B_2$$

heißt linearer Operator, falls für alle $a, b \in D$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ gilt:

$$A(\lambda a + \mu b) = \lambda A(a) + \mu A(b).$$

Ein linearer Operator A heißt beschränkt, wenn es ein $\alpha > 0$ gibt mit $\|A(a)\| \leq \alpha \|a\|$ für alle $a \in D$. Die Größe

$$\|A\| := \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ \mid \|A(a)\| \leq \alpha \|a\| \text{ für alle } a \in D\}$$

heißt dann Norm des linearen und beschränkten Operators A . Wir bezeichnen

$$L(D, B_2) := \{A : D \rightarrow B_2 \mid A \text{ linear und beschränkt}\}.$$

Bei der Definition beschränkter linearer Operatoren von B_1 nach B_2 genügt es, sie auf einem dichten Unterraum von B_1 zu definieren. Es gilt nämlich:

Satz 15.4 Es seien B_1, B_2 Banachräume, D ein in B_1 dichter Untervektorraum von B_1 und $A \in L(D, B_2)$. Dann gibt es genau einen Operator $\hat{A} \in L(B_1, B_2)$, der auf D mit A übereinstimmt. Es gilt überdies $\|\hat{A}\| = \|A\|$. \hat{A} heißt die Fortsetzung von A auf B_1 .

Beweis: Es sei $a \in B_1$. Dann gibt es, da D dicht in B_1 ist, eine gegen a konvergente Folge $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus D . Aus

$$\begin{aligned} \|A(a_j) - A(a_k)\| &= \|A(a_j - a_k)\| \leq \|A\| \|a_j - a_k\| \\ &\leq \|A\| (\|a - a_j\| + \|a - a_k\|) \end{aligned}$$

folgt, daß $\{A(a_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in B_2 ist. Da B_2 als Banachraum vollständig ist, existiert ein (eindeutig bestimmter) Grenzwert der Folge $\{A(a_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ in B_2 , den wir mit c bezeichnen. Die Größe c hängt nur von a und nicht von der speziellen Auswahl der Folge $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ab. Denn sei $\{\tilde{a}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine andere gegen a konvergente Folge von Elementen von D . Dann läßt sich abschätzen:

$$\begin{aligned}\|c - A(\tilde{a}_j)\| &\leq \|c - A(a_j)\| + \|A(a_j) - A(\tilde{a}_j)\| \\ \|c - A(\tilde{a}_j)\| &\leq \|c - A(a_j)\| + \|A\|(\|a - a_j\| + \|\tilde{a}_j - a_j\|).\end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Grenzübergang, daß die Folge $\{A(\tilde{a}_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ ebenfalls gegen c konvergiert.

Wir definieren die Abbildung $\hat{A} : B_1 \rightarrow B_2$ durch die Vorschrift:

$$\hat{A}(a) := c.$$

\hat{A} ist wohldefiniert und stimmt auf D mit A überein.

Zum Nachweis der Linearität von \hat{A} seien $a, b \in B_1$ und $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}, \{b_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ zwei gegen a bzw. b konvergente Folgen von Elementen von D . Dann konvergiert die Folge $\{\lambda a_j + \mu b_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ gegen das Element $\lambda a + \mu b$. Es folgt:

$$\begin{aligned}\hat{A}(\lambda a + \mu b) &= \lim_{j \rightarrow \infty} A(\lambda a_j + \mu b_j) \\ &= \lambda \lim_{j \rightarrow \infty} A(a_j) + \mu \lim_{j \rightarrow \infty} A(b_j) = \lambda \hat{A}(a) + \mu \hat{A}(b).\end{aligned}$$

Zum Nachweis der Beschränktheit von \hat{A} seien a und $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ wie oben gegeben. Es ist $\|A(a_j)\| \leq \|A\| \|a_j\|$ und wegen der Stetigkeit der Norm

$$\begin{aligned}\|\hat{A}(a)\| &= \left\| \lim_{j \rightarrow \infty} A(a_j) \right\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|A(a_j)\| \\ &\leq \|A\| \lim_{j \rightarrow \infty} \|a_j\| = \|A\| \left\| \lim_{j \rightarrow \infty} a_j \right\| = \|A\| \|a\|.\end{aligned}$$

Hieraus folgt $\|\hat{A}\| = \|A\|$.

Den Nachweis, daß \hat{A} eindeutig bestimmt ist, führen wir indirekt:

Es sei \tilde{A} ein beschränkter linearer Operator von B_1 in B_2 , der auf D mit A übereinstimmt. Für ein $a \in B_1 - D$ gelte $\tilde{A}(a) \neq \hat{A}(a)$. Weiter sei $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Folge von Elementen von D . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\|\tilde{A}(a) - \hat{A}(a)\| &\leq \|\tilde{A}(a) - \tilde{A}(a_j)\| + \|\tilde{A}(a_j) - \hat{A}(a_j)\| \\ &= \|\tilde{A}(a) - \tilde{A}(a_j)\| + \|\hat{A}(a_j) - \hat{A}(a)\| \\ &\leq \|\tilde{A}\| \|a - a_j\| + \|\hat{A}\| \|a - a_j\|.\end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Grenzübergang ein Widerspruch.

Nach Sätzen der Funktionalanalysis (Hahn-Banach) läßt sich ein beschränkter linearer Operator auch dann auf ganz B_1 normtreu fortsetzen, wenn der Definitionsbereich D nicht dicht in B_1 liegt. Die Erweiterung ist dann allerdings nicht eindeutig bestimmt.

Definition 15.4 Es seien B_1, B_2 Banachräume und M eine Menge von beschränkten linearen Operatoren, die B_1 in B_2 abbilden. M heißt gleichmäßig beschränkt, wenn die Menge $\{\|A\| \mid A \in M\}$ beschränkt ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß es eine Konstante $\alpha > 0$ gibt mit $\|A(a)\| \leq \alpha \|a\|$ für alle $A \in M$ und alle $a \in B_1$.

Satz 15.5 Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (engl. uniform boundedness).

Es seien B_1, B_2 Banachräume und M eine Menge von beschränkten linearen Operatoren, die B_1 in B_2 abbilden. Es existiere eine Funktion $\beta : B_1 \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit

$$\|A(a)\| \leq \beta(a)$$

für alle $a \in B_1$ und alle $A \in M$. Dann ist die Menge M gleichmäßig beschränkt.

Bemerkung 15.2 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit wird z.B. bei dem Beweis des Satzes von Polya-Steklov angewandt.

Definition 15.5 Es seien B ein Banachraum und $[T_1, T_2]$ ein reelles Intervall. Eine Abbildung

$$u : [T_1, T_2] \rightarrow B$$

heißt Fréchet-differenzierbar im Punkte $t_0 \in [T_1, T_2]$, falls es ein Element $a \in B$ gibt mit

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ t_0 + h \in [T_1, T_2]}} \frac{\|u(t_0 + h) - u(t_0) - h \cdot a\|}{|h|} = 0 .$$

Das Element a ist eindeutig bestimmt und heißt Ableitung von u im Punkte t_0 . Es wird mit $u'(t_0)$ oder $\frac{du}{dt}(t_0)$ bezeichnet. Die Abbildung u heißt differenzierbar, falls sie in jedem Punkt von $[T_1, T_2]$ differenzierbar ist. Die Abbildung u heißt gleichmäßig differenzierbar, falls sie differenzierbar ist und

$$\frac{1}{|h|} \|u(t + h) - u(t) - hu'(t)\|$$

mit $h \rightarrow 0$ gleichmäßig für $t \in [T_1, T_2]$ gegen Null konvergiert. Die Abbildung u heißt stetig differenzierbar, falls sie differenzierbar ist und die Ableitung $u'(t)$ stetig in $[T_1, T_2]$ ist.

Aus der obigen Definition folgt sofort, daß eine im Punkte t_0 differenzierbare Abbildung auch stetig in t_0 ist. Aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz (vgl. Dieudonné 1960, Satz (8.6.2)) ergibt sich für stetig differenzierbare Funktionen u :

$$\frac{1}{|h|} \|u(t + h) - u(t) - hu'(t)\| \leq \sup_{0 < \nu < 1} \|u'(t + \nu h) - u'(t)\| .$$

Eine stetig differenzierbare Funktion ist somit auch gleichmäßig differenzierbar.

15.3 Das abstrakte Cauchy-Problem

Definition 15.6 Es seien B ein Banachraum, D_A ein Untervektorraum von B , $T \in \mathbb{R}_+$ und

$$A : D_A \rightarrow B$$

ein linearer Operator. Wir betrachten dann die folgende Anfangswertaufgabe zum Anfangswert $c \in D_A$: Gesucht ist eine differenzierbare Abbildung

$$u : [0, T] \rightarrow D_A \quad (\text{genannt L\"osung})$$

mit

$$\begin{aligned} u'(t) &= A(u(t)) \quad (t \in [0, T]) \\ u(0) &= c . \end{aligned} \tag{15.1}$$

Wir bezeichnen diese Aufgabe im folgenden mit $P(B, T, A)$.

Wegen der Linearit\"at von A bildet die Menge aller Anfangswerte, f\"ur die die Aufgabe $P(B, T, A)$ l\"osbar ist, einen Untervektorraum von D_A . Falls die Aufgabe sogar eindeutig l\"osbar ist, k\"onnen wir f\"ur festes $t_0 \in [0, T]$ durch die Zuordnung

$$c \rightarrow u_c(t_0)$$

einen linearen Operator definieren, wobei $u_c(t)$ die L\"osung von $P(B, T, A)$ zum Anfangswert c bezeichnet. Diese linearen Operatoren werden zur Definition von sachgem\"a\ss{}gestellten Anfangswertaufgaben herangezogen.

Definition 15.7 Die Anfangswertaufgabe $P(B, T, A)$ hei\ss{}t sachgem\"a\ss{}gestellt, wenn es einen Untervektorraum D_E mit

$$D_E \subset D_A \subset B$$

und eine Schar $M_0 = \{E_0(t) | t \in [0, T]\}$ von auf D_E definierten linearen Operatoren

$$E_0(t) : D_E \rightarrow D_A \quad (t \in [0, T])$$

mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. D_E (und damit auch D_A) liegt dicht in B .

2. Für alle Anfangswerte $c \in D_E$ hat die Aufgabe $P(B, T, A)$ genau eine Lösung $u_c(t)$. Sie wird für alle $t \in [0, T]$ durch

$$u_c(t) = E_0(t)(c)$$

dargestellt.

3. Die Menge M_0 ist eine gleichmäßig beschränkte Menge von linearen Operatoren.

Wir nennen die Operatoren $E_0(t)$ aus M_0 im folgenden Lösungsoperatoren.

Definition 15.8 Es seien $E_0(t)$ die Lösungsoperatoren aus Definition 13.7. Dann bezeichne $E(t)$ die Fortsetzung von $E_0(t)$ auf B und es sei

$$M = \{E(t) | t \in [0, T]\}.$$

Die für $c \in B$ gegebene Abbildung

$$E(\cdot)(c) : [0, T] \rightarrow B$$

heißt verallgemeinerte Lösung der Anfangswertaufgabe $P(B, T, A)$ zum Anfangswert c , die Operatoren $E(t)$ aus M heißen verallgemeinerte Lösungsoperatoren.

Die verallgemeinerten Lösungen sind keine Lösungen, wenn sie außerhalb von D_A verlaufen.

Wir notieren einige Eigenschaften der eingeführten Begriffe.

Satz 15.6 Es sei $P(B, T, A)$ eine sachgemäß gestellte Anfangswertaufgabe. Die linearen Operatoren $E(t) \in C^0(B, B)$ erfüllen die Halbgruppeneigenschaft:

$$E(r + s) = E(r) \circ E(s) \quad (r, s, r + s \in [0, T]).$$

Dann gilt:

1. Die Menge $M = \{E(t) | t \in [0, T]\}$ ist gleichmäßig beschränkt mit derselben Schranke wie die Menge $M_0 = \{E_0(t) | t \in [0, T]\}$.
2. Jede verallgemeinerte Lösung $E(\cdot)(c)$ von $P(B, T, A)$ zum Anfangswert $c \in B$ läßt sich im Sinne der Norm von B gleichmäßig durch Lösungen von $P(B, T, A)$ approximieren. Dies bedeutet, daß es zu jedem $\epsilon > 0$ ein Element $\tilde{c} \in D_E$ gibt, so daß gilt:

$$\|E(t)(c) - E_0(t)(\tilde{c})\| < \epsilon \quad (t \in [0, T]).$$

3. Jede verallgemeinerte Lösung $E(\cdot)(c)$ von $P(B, T, A)$ zum Anfangswert $c \in B$ ist aus $C^0([0, T], B)$.

4. Für alle $c \in D_E$ gilt:

$$E(t) \circ A(c) = A \circ E(t)(c) .$$

5. Für alle $c \in D_E$ ist $u(t) = E_0(t)(c)$ stetig differenzierbar.

Beweis:

zu (1): unmittelbar klar nach Satz 4.

zu (2): Es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Mit L bezeichnen wir die nach (1) gegebene Schranke für die Norm der Operatoren $E(t)$. Da D_E dicht in B liegt, gibt es ein $\tilde{c} \in D_E$ mit

$$\|c - \tilde{c}\| < \frac{\epsilon}{L} .$$

Dann läßt sich wegen $E(t)(\tilde{c}) = E_0(t)(\tilde{c})$ abschätzen:

$$\|E(t)(c) - E_0(t)(\tilde{c})\| = \|E(t)(c) - E(t)(\tilde{c})\| \leq L\|c - \tilde{c}\| < \epsilon .$$

zu (3): Es seien $s \in [0, T]$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen nach (2) ein Element $\tilde{c} \in D_E$, so daß gilt:

$$\|E(t)(c) - E_0(t)(\tilde{c})\| < \frac{\epsilon}{3} \quad (t \in [0, T]) .$$

Da $E_0(\cdot)(\tilde{c})$ als differenzierbare Abbildung auch gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\|E_0(s+h)(\tilde{c}) - E_0(s)(\tilde{c})\| < \frac{\epsilon}{3} \quad (|h| < \delta, s+h \in [0, T]) .$$

Zusammengefaßt ergibt sich für alle h mit $|h| < \delta$ und $s+h \in [0, T]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|E(s+h)(c) - E(s)(c)\| &\leq \\ &\|E(s+h)(c) - E_0(s+h)(\tilde{c})\| + \|E_0(s+h)(\tilde{c}) - E_0(s)(\tilde{c})\| \\ &+ \|E_0(s)(\tilde{c}) - E(s)(c)\| \\ &< \epsilon . \end{aligned}$$

zu (4): Für $c \in D_E$ und $t \in [0, T]$ gilt die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|E(t) \circ A(c) - A \circ E(t)(c)\| &\leq \\ &\|E(t) \circ A(c) - \frac{1}{h} E(t)(E(h)(c) - c)\| \\ &+ \|\frac{1}{h} E(t)(E(h)(c) - c) - A \circ E(t)(c)\| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \|E(t)\| \|E(h)(c) - c - hA(c)\| \\ &+ \frac{1}{|h|} \|E(t+h)(c) - E(t)(c) - hA \circ E(t)(c)\|. \end{aligned}$$

Weil $E(\cdot)(c) = E_0(\cdot)(c)$ im ganzen Intervall $[0, T]$ differenzierbar ist, folgt die Behauptung durch den Grenzübergang $h \rightarrow 0$.

zu (5): Wegen

$$u'(t) = A(u(t)) = A \circ E(t)(c) = E(t) \circ A(c) = E(t)(A(c))$$

folgt die Stetigkeit von $u'(\cdot)$ aus (3).

Bemerkung 15.3 Meis und Markowitz (S. 43) behaupten, daß die Halbgruppeneigenschaft aus den übrigen Annahmen folgt. Dies bezweifle ich:

1. In dem Buch von Richtmyer und Morton (S. 41) wird die Halbgruppeneigenschaft vorausgesetzt.
2. Der Satz von Hille-Yosida besagt, daß ein abgeschlossener Operator A eine Halbgruppe erzeugt genau dann, wenn ein $w > 0$ existiert mit

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda - w}, \quad \lambda > w.$$

(Butzer und Berens, S. 36.)

15.4 Differenzenverfahren

Definition 15.9 Es seien $P(B, T, A)$ eine sachgemäß gestellte Anfangswertaufgabe, $M = \{E(t) | t \in [0, T]\}$ die entsprechende Schar von zugehörigen verallgemeinerten Lösungsoperatoren und $h_0 \in (0, T]$.

1. Eine Schar $M_D = \{C(h) | h \in (0, h_0]\}$ von auf B definierten linearen und beschränkten Operatoren

$$C(h) : B \rightarrow B \quad (h \in (0, h_0])$$

heißt Differenzenverfahren zu $P(B, T, A)$, falls die Funktion $\|C(\cdot)\|$ in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $(0, h_0]$ beschränkt ist.

2. Das Differenzenverfahren M_D heißt konsistent, wenn es einen in B dichten Unterraum D_C gibt, so daß für alle $c \in D_C$ der Ausdruck

$$\frac{1}{|h|} \| [C(h) - E(h)](E(t)(c)) \|$$

mit $h \rightarrow 0$ gleichmäßig für $t \in [0, T]$ gegen Null konvergiert.

3. Das Differenzenverfahren M_D heißt stabil, wenn die Menge der Operatoren

$$\{(C(h))^n | h \in (0, h_0], n \in \mathbb{N}, nh \leq T\}$$

gleichmäßig beschränkt ist.

4. Das Differenzenverfahren M_D heißt konvergent, falls der Ausdruck

$$\| (C(h_j))^{n_j}(c) - E(t)(c) \|$$

für alle $c \in B$, alle $t \in [0, T]$ und alle Nullfolgen $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen aus $(0, h_0]$ gegen Null konvergiert. Dabei ist $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine zugehörige Folge natürlicher Zahlen, so daß $\{n_j h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ gegen t konvergiert und $n_j h_j \leq T$ ist.

Der folgende Satz stellt den Zusammenhang zwischen den obigen Begriffen her.

Satz 15.7 (Lax-Richtmyer) Es sei M_D ein konsistentes Differenzenverfahren zu der sachgemäß gestellten Anfangswertaufgabe $P(B, T, A)$, die die Halbgruppeneigenschaft erfüllt. Dann gilt: Das Differenzenverfahren M_D ist genau dann konvergent, wenn es stabil ist.

Beweis:

- a) Konvergenz impliziert Stabilität:

Wir nehmen zwecks indirekter Beweisführung an, daß M_D konvergent und nicht stabil ist. Dann gibt es eine Folge $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus $(0, h_0]$ und eine Folge $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ von natürlichen Zahlen, die durch die Bedingung

$$n_j h_j \in [0, T] \quad (j \in \mathbb{N})$$

verknüpft sind, so daß die Folge

$$\{\|(C(h_j))^{n_j}\|\}_{j \in \mathbb{N}}$$

nicht beschränkt ist. Wegen der Kompaktheit von $[0, T]$ und $[0, h_0]$ können wir o.B.d.A. annehmen, daß die Folgen $\{n_j \cdot h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ und $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ gegen $t \in [0, T]$ und $h \in [0, h_0]$ konvergieren. Angenommen, es sei $h > 0$. Dann ist n_j von irgendeinem Index an konstant. In dem Intervall $[h/2, h_0]$ ist $\|C(\cdot)\|$ nach Definition 13.9 (1) beschränkt. Folglich ist auch $\|C(h_j)^{n_j}\| \leq \|C(h_j)\|^{n_j}$ beschränkt. Widerspruch! Also ist $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Da M_D ein konvergentes Differenzenverfahren ist, ist auch die Folge

$$\{\|(C(h_j))^{n_j}(c) - E(t)(c)\|\}_{j \in \mathbb{N}}$$

für jedes $c \in B$ eine Nullfolge. Somit gibt es ein $j_0(c) \in \mathbb{N}$, so daß für alle $j > j_0(c)$ gilt:

$$\|(C(h_j))^{n_j}(c) - E(t)(c)\| < 1 ,$$

und

$$\|(C(h_j))^{n_j}(c)\| < 1 + \|E(t)(c)\| .$$

Wir setzen

$$K(c) := \max_{j \leq j_0(c)} \{1 + \|E(t)(c)\|, \|(C(h_j))^{n_j}(c)\|\} .$$

Für alle $c \in B$ folgt dann

$$\|(C(h_j))^{n_j}(c)\| \leq K(c) \quad (j \in \mathbb{N}) .$$

Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ergibt sich, daß

$$\{(C(h_j))^{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$$

eine gleichmäßig beschränkte Menge von Operatoren ist. Widerspruch!

b) Stabilität impliziert Konvergenz:

Es seien $c \in D_C$, $t \in [0, T]$, $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge reeller Zahlen aus $(0, h_0]$ und $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine zugehörige Folge natürlicher Zahlen, so daß $\{n_j h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ gegen t konvergiert und $n_j h_j \leq T$ ist. Für

$$\psi_j(c) = (C(h_j))^{n_j}(c) - E(t)(c) \quad (j \in \mathbb{N})$$

gilt wegen der Halbgruppeneigenschaft:

$$\begin{aligned} \psi_j(c) &= \sum_{k=0}^{n_j-1} (C(h_j))^k [C(h_j) - E(h_j)] \circ E((n_j - 1 - k)h_j)(c) \\ &\quad + E(\rho_j) \circ (E(n_j h_j - \rho_j) - E(t - \rho_j))(c) \quad (j \in \mathbb{N}) . \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\rho_j = \min\{t, n_j h_j\} \quad (j \in \mathbb{N}) .$$

Es sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir schätzen dann wie folgt ab:

a) Wegen der Stabilität von M_D gibt es eine Konstante K_C , so daß

$$\|(C(h_j))^k\| \leq K_C \quad (j \in \mathbb{N}; 0 \leq k \leq n_j) .$$

b) Wegen der Konsistenz von M_D gibt es ein $j_1 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\|[C(h_j) - E(h_j)] \circ E((n_j - 1 - k)h_j)(c)\| < \epsilon h_j \quad (j > j_1) .$$

c) Wegen Satz 13.6 (1) gibt es eine Konstante K_E , so daß

$$\|E(\tau)\| \leq K_E \quad (\tau \in [0, T]) .$$

d) Wegen Satz 13.6 (3) gibt es ein $j_2 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\|(E(n_j h_j - \rho_j) - E(t - \rho_j))(c)\| < \epsilon \quad (j > j_2) .$$

Insgesamt folgt:

$$\|\psi_j(c)\| < n_j K_C \epsilon h_j + K_E \epsilon \leq (K_C T + K_E) \epsilon \quad (j > \max\{j_1, j_2\}) .$$

Damit ist bereits bewiesen, daß das Differenzenverfahren M_D für alle $c \in D_C$ konvergent ist. Für $\tilde{c} \in B$ und $c \in D_C$ können wir umformen:

$$\begin{aligned}
 \psi_j(\tilde{c}) &= (C(h_j))^{n_j}(\tilde{c}) - E(t)(\tilde{c}) \\
 &= (C(h_j))^{n_j}(c) - E(t)(c) + (C(h_j))^{n_j}(\tilde{c} - c) - E(t)(\tilde{c} - c) \\
 \|\psi_j(\tilde{c})\| &\leq \|\psi_j(c)\| + K_C \|\tilde{c} - c\| + K_E \|\tilde{c} - c\| \quad (j \in \mathbb{N}) .
 \end{aligned}$$

Zu vorgegebenem $\eta > 0$ wählen wir dann $c \in D_C$ so, daß die letzten beiden Summanden der rechten Seite der vorstehenden Ungleichung kleiner sind als $\frac{2}{3} \eta$. Insgesamt folgt aus den vorstehenden Überlegungen, daß es ein $j_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$\|\psi_j(\tilde{c})\| < \eta \quad (j > j_0) .$$

Literatur

Ansorge, R.: Differenzenapproximationen partieller Anfangswertaufgaben. Teubner, 1978.

Butzer, P.L. und Berens, H.: Semigroups of Operators and Approximation. Springer, 1967.

Hille, E. und Phillips, R.S.: Functional Analysis and Semigroups (revised edition). American Math. Soc. 1957.

Jerome, J.W.: Approximation of Nonlinear Evolution Systems. Academic Press, 1983.

Lax, P.D. und Richtmyer, R.D.: Survey of the Stability of Linear Finite Difference Equations. Communications Pure Applied Math. 9 (1956) 267-293.

Meis, Th. und Marcowitz, U.: Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen. Springer, 1978.

Richtmyer, R.D. und Morton, K.W.: Difference Methods for Initial-Value Problems (second edition). Interscience 1967.

Strikwerda, J.C.: Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations. Wadsworth and Brooks/Cole, 1989.

Kapitel 16

Fourierreihen und Fouriertransformationen

16.1 Einführung

Sei X ein (reeller bzw. komplexer) Hilbertraum mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) und Norm $\|\cdot\|$.
Sei T ein linearer Operator mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$ und Wertebereich $\mathcal{R}(T)$,

$$T : \mathcal{D}(T) \subset X \longrightarrow \mathcal{R}(T) \subset X .$$

Sei I der identische Operator auf X , λ eine komplexe Zahl,

$$T_\lambda := \lambda I - T .$$

Jede komplexe Zahl gehört genau einer der folgenden vier Punktmengen an:

1. $\rho(T)$, die *Resolventenmenge* des Operators T . $\lambda \in \rho(T)$, wenn T_λ^{-1} existiert und stetig ist.

$$R(\lambda, T) := T_\lambda^{-1} = (\lambda I - T)^{-1}$$

heißt *Resolvente* des Operators T im Punkt λ .

2. $P_\sigma(T)$, das *Punktspektrum*. $\lambda \in P_\sigma(T)$, wenn T_λ^{-1} nicht existiert.
3. $C_\sigma(T)$, das *Stetigkeitsspektrum*. $\lambda \in C_\sigma(T)$, wenn T_λ^{-1} existiert, $\mathcal{R}(T_\lambda) = \mathcal{D}(T_\lambda^{-1})$ dicht in X ist, aber T_λ^{-1} nicht stetig ist.
4. $R_\sigma(T)$, das *Restspektrum*. $\lambda \in R_\sigma(T)$, wenn T_λ^{-1} existiert, aber $\mathcal{R}(T_\lambda) = \mathcal{D}(T_\lambda^{-1})$ nicht dicht in X ist.

Beispiel 16.1 Im einfachen Fall $X = \mathbb{R}^n$, $T \in \text{Mat}(n \times n)$, T symmetrisch, hat T n Eigenwerte λ_i und entsprechende Eigenvektoren \mathbf{x}_i . Die Eigenvektoren bilden eine Basis für X

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \frac{(\mathbf{x}_k, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}_k\|^2} \mathbf{x}_k$$

mit

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_k\|^2 &:= (\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k) \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k.\end{aligned}$$

Es gilt

$$P_\sigma(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\},$$

da $(\lambda_k I - T)$ keine Inverse hat.

Wird z.B. die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}-\ddot{x} &= f, \quad 0 \leq t \leq \pi, \\ x(0) &= x(\pi) = 0\end{aligned}$$

durch die Differenzengleichung

$$-D_+ D_- x = f, \quad h = \frac{\pi}{n+1}$$

approximiert, ist

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & O \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & & \ddots & & & \\ O & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\lambda_k &= (4 \sin^2 k \frac{h}{2})/h^2, \\ \mathbf{x}_k &= (\sin kh, \sin 2kh, \dots, \sin nhk)^T.\end{aligned}$$

Beispiel 16.2

$$\begin{aligned}X &= L_2(0, \pi), \\ T &= -\ddot{x}, \\ \mathcal{D}(T) &= \{x \in X \cap C^2(0, \pi) : x(0) = x(\pi) = 0\} \\ \mathcal{R}(T) &= C(0, \pi).\end{aligned}$$

T ist symmetrisch, da

$$(x, Ty) = - \int_0^\pi x \ddot{y} dt = - \int_0^\pi \ddot{x} y dt \quad \text{für alle } x, y \in \mathcal{D}(T)$$

Weiter gilt

$$Tx_k = \lambda_k x_k$$

mit

$$x_k(t) = \sin(kt) , \quad k \in \mathbb{N}_+ .$$

Es gilt

$$P_\sigma(T) = \mathbb{N}_+ .$$

Die Eigenfunktionen x_k bilden eine Basis für X ,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \\ a_k &= \frac{(x, x_k)}{(x_k, x_k)} \\ &= \frac{\int_0^\pi x(t) \sin kt dt}{\int_0^\pi (\sin kt)^2 dt} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(t) \sin kt dt \end{aligned}$$

Obwohl die Folge

$$s_k = \sum_{j=1}^k a_j x_j$$

gegen $x \in X$ in der Norm von X konvergiert, ist die Konvergenz nicht immer gleichmäßig.

Beispiel 16.3 [Gibbs Phänomen]

$$\begin{aligned} x(t) &= \pi - t , \quad 0 \leq t \leq \pi \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - t) \sin kt dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{1}{k} [(\pi - t) \cos kt]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cos kt}{k} dt \right\} \\ &= \frac{2}{k} . \end{aligned}$$

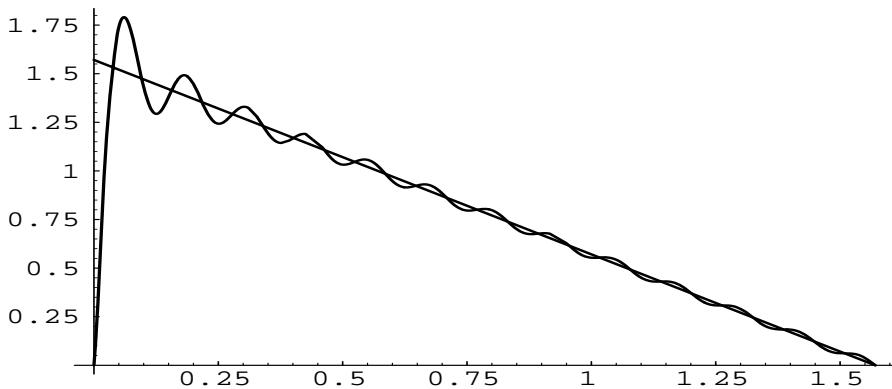


Abbildung 16.1: Das Gibbs Phänomen bei der Sinusentwicklung von $\frac{\pi}{2} - x$ in $[0, \frac{\pi}{2}]$, Abbruch nach 25 Summanden

Sei

$$s_k(t) = \sum_{j=1}^k \frac{2}{j} \sin jt .$$

Es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(t) = \pi - t , \quad t \in (0, \pi)$$

aber es gibt eine Konstante $\alpha > 0$ mit

$$\sup_{0 < t < \pi} |s_k(t) - (\pi - t)| \geq \alpha , \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} .$$

Beispiel 16.4

$$\begin{aligned} X &= L_2(0, \infty) , \\ Tx &= -\ddot{x} , \\ \mathcal{D}(T) &= \{x \in X \cap C^2(0, \infty) : Tx \in X , x(0) = 0\} . \end{aligned}$$

In diesem Fall sind die Funktionen

$$x_\lambda(t) = \sin(\lambda t) , \quad \lambda \in \mathbb{R}_+$$

nicht Eigenfunktionen, da $x_\lambda \notin X$. Es gilt aber:

Satz 16.1 („Sinustransformation“) Sei $f \in L_2(0, \infty)$. Der Limes

$$(\mathcal{S}f)(\mu) = \lim_{A \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^A (\sin \mu t) f(t) dt$$

existiert in der Norm von $L_2(0, \infty)$.

\mathcal{S} ist ein isometrischer Isomorphismus von $L_2(0, \infty)$ nach $L_2(0, \infty)$,

$$\mathcal{S}^2 = I, \quad \mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}.$$

Sei

$$\int_0^\infty |f''(t)|^2 dt < \infty$$

und weiter $f(0) = 0$. Dann gilt:

$$\mu^2(\mathcal{S}f)(\mu) = -(\mathcal{S}f'')(\mu).$$

Beweis: Siehe z.B. Dunford + Schwartz, II, S. 1388

Wird die ganze x-Achse betrachtet, dann gilt ebenfalls

Satz 16.2 („Fourier-Transformation“)

$$X = \{f_1 + if_2 : f_1, f_2 \in L_2(-\infty, +\infty)\},$$

mit der Norm

$$\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt.$$

Sei $f \in X$. Der Limes

$$(\mathcal{F}f)(k) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{+A} e^{-ikx} f(x) dx \quad (16.1)$$

existiert in der Norm von X .

\mathcal{F} ist ein isometrischer Isomorphismus von X nach X mit Inverse \mathcal{F}^{-1} ,

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{+A} e^{+ikx} \hat{f}(k) dk. \quad (16.2)$$

Beweis: Yosida, S. 153, Dunford/Schwartz S. 1382 ff.

Bemerkung 16.1 Manchmal werden \mathcal{F} und \mathcal{F}^{-1} umgekehrt definiert. Auch abweichende Vorfaktoren kommen in der Literatur vor.

16.2 Die Anwendung von Fouriertransformationen für Stabilitätsanalyse

Die Methode wird für das Lax-Wendroff-Verfahren erläutert. Zuerst wird ein Lemma zitiert:

Lemma 16.1 Sei $u \in L_2(-\infty, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Sei

$$v(t) := u(t + \alpha), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $v \in L_2(-\infty, +\infty)$ und

$$\hat{v} := \mathcal{F}v = e^{+i\alpha k} \mathcal{F}u = e^{+i\alpha k} \hat{u}.$$

Beweis: Einfache Berechnungen.

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

wird mit Hilfe des Lax-Wendroff-Verfahrens approximiert. In der Praxis wird so ein Verfahren nur auf Gitterpunkte angewandt, aber es kann auf alle Punkten angewendet werden:

$$\begin{aligned} u^h(x, (j+1)\Delta t) &= \frac{c\lambda}{2} (1 + c\lambda)u^h(x - h, j\Delta t) + (1 - c^2\lambda^2)u^h(x, j\Delta t) - \\ &\quad - \frac{c\lambda}{2} (1 - c\lambda)u^h(x + h, j\Delta t) \quad x \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (16.3)$$

Sei $X = L_2(-\infty, +\infty)$ und $f \in X$. Sei

$$v_j(x) = u_j^h(x, j\Delta t), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (16.4)$$

Dann gilt $v_j \in X$,

$$v_{j+1}(x) = \frac{c\lambda}{2} (1 + c\lambda)v_j(x - h) + (1 - c^2\lambda^2)v_j(x) - \frac{c\lambda}{2} (1 - c\lambda)v_{j+1}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (16.5)$$

Mit Hilfe von Lemma 14.1 folgt aus (16.3), daß

$$\hat{v}_{j+1}(k) = g(k, h, \lambda) \hat{v}_j(k) \quad (16.6)$$

mit

$$g(k, h, \lambda) := \left[\frac{c\lambda}{2} (1 + c\lambda)e^{-ikh} + (1 - c^2 \lambda^2) - \frac{c\lambda}{2} (1 - c\lambda)e^{+ikh} \right] \quad (16.7)$$

$G = g(k, h, \lambda)$ heißt *Verstärkungsfaktor*.

Definition 16.1 Sei $u^h(x, t)$ eine Approximation zur analytischen Lösung $u(x, t)$ eines Anfangswert-Randwertproblems, die mit Hilfe eines numerischen Verfahrens \mathcal{V} erzeugt wird. Seien f_1, f_2 die Anfangswert- bzw. Randwertdaten.

Das Verfahren \mathcal{V} heißt stabil genau dann, wenn es eine Konstante $K = K(T)$ gibt, so daß

$$\|u^h(\cdot, t)\| \leq K(T)\{\|f_1\| + \|f_2\|\}, \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \quad (16.8)$$

Sei nun $u^h(x, t_j)$ mit Hilfe der Gleichung (16.3) definiert. Es gilt

$$|\hat{v}_j(k)| \leq \sup_{k \in \mathbb{R}} |g(k, h, \lambda)|^j |\hat{v}_0(k)| = |\hat{f}(k)| \quad (16.9)$$

Das folgende Lemma ist nützlich:

Lemma 16.2 Sei $X = L_2(-\infty, +\infty, \mathbf{C})$. Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{C}$ stetig. Sei $G : X \rightarrow X$ mit

$$(Gw)(k) = g(k)w(k).$$

Dann ist

$$\|G\| := \sup_{w \in X} \frac{\|Gw\|}{\|w\|} = \sup_{k \in \mathbb{R}} |g(k)|. \quad (16.10)$$

Es folgt aus (16.6), (16.7), daß die Bedingung (16.8) genau dann erfüllt wird, wenn

$$\|\hat{v}_j\| = \|G^j \hat{f}\| \leq K \cdot \|\hat{f}\|, \quad 0 \leq j\Delta t \leq T \quad (16.11)$$

mit

$$(Gw)(k) := g(k, h, \lambda) \cdot w(k). \quad (16.12)$$

Es folgt weiter aus dem Lemma, daß das Differenzenverfahren (16.3), (16.11), (16.12) genau dann stabil ist, wenn es eine Konstante $\alpha > 0$ gibt, mit

$$\sup_k |g(k, h, \lambda)| \leq 1 + \alpha \Delta t . \quad (16.13)$$

Diese Bedingung heißt die von Neumann Bedingung.

Wir überprüfen jetzt die von Neumann Bedingung. Es gilt:

$$\begin{aligned} |g|^2 &= \left| \frac{c\lambda}{2} (e^{-ikh} - e^{+ikh}) + \frac{c^2\lambda^2}{2} (e^{-ikh} + e^{+ikh}) + (1 - c^2\lambda^2) \right|^2 \\ &= \left| \frac{c\lambda}{2} (-2i \sin kh) + \frac{c^2\lambda^2}{2} \cdot 2 \cos kh + (1 - c^2\lambda^2) \right|^2 \\ &= c^2\lambda^2(\sin kh)^2 + c^4\lambda^4(\cos kh)^2 + (1 - c^2\lambda^2)^2 + 2c^2\lambda^2(1 - c^2\lambda^2) \cos kh \\ &= 4c^2\lambda^2 \cdot s^2(1 - s^2) + c^4\lambda^4(1 - 2s^2)^2 + (1 - c^2\lambda^2)^2 + 2c^2\lambda^2(1 - c^2\lambda^2) \cdot (1 - 2s^2) \end{aligned}$$

mit $s := \sin \left(\frac{kh}{2} \right)$.

Es folgt

$$\begin{aligned} |g|^2 &= [c^4\lambda^4 + (1 - c^2\lambda^2)^2 + 2c^2\lambda^2(1 - c^2\lambda^2)] + s^4[-4c^2\lambda^2 + 4c^4\lambda^4 - 4c^2\lambda^2(1 - c^2\lambda^2)] \\ &= 1 - s^4 \cdot 4 \cdot c^2\lambda^2(1 - c^2\lambda^2) \end{aligned}$$

Die von Neumann Bedingung wird genau dann erfüllt, wenn

$$8c^2\lambda^2(1 - c^2\lambda^2) \leq 2 ,$$

d.h.

$$|c\lambda| \leq 1 .$$

16.3 Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung

Wie schon vorher erwähnt, kann die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe der Fouriertransformation hergeleitet werden.

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$u_t = u_{xx} \quad (16.14)$$

$$u(x, 0) = f(x) , \quad x \in \mathbb{R} . \quad (16.15)$$

Lemma 16.3 Sei $u \in L_2(-\infty, +\infty, \mathbb{C}) \cap L_1(-\infty, +\infty, \mathbb{C})$. Die Ableitung $u_x = u'$ existiere für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $u' \in L_1$. Dann gilt:

$$\widehat{u_x}(k) = +ik\widehat{u}(k), \quad k \in \mathbb{R}. \quad (16.16)$$

Beweis:

Es gilt für alle $A \in \mathbb{R}$ (Rudin, Satz 8.21, S. 179).

$$\begin{aligned} u(A) \cdot e^{-ikA} &= u(-A) \cdot e^{+ikA} + \int_{-A}^{+A} [u(x)e^{-ikx}]' dx \\ &= u(-A) \cdot e^{+ikA} + \int_{-A}^{+A} [u'(x)e^{-ikx} - iku(x)e^{-ikx}] dx \end{aligned} \quad (*)$$

Da $u \in L_1$, gilt $\widehat{u} \in C_0$ (Rudin, Satz 9.6, S. 184):

$$\lim_{A \rightarrow \infty} |u(A)| = \lim_{A \rightarrow -\infty} |u(A)| = 0.$$

Weiter gilt (da $u, u_x \in L_1$), daß

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^{+A} u(x)e^{-ikx} dx, \quad \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^{+A} u_x(x)e^{-ikx} dx$$

existieren.

Das Lemma folgt aus (*).

Bemerkung 16.2 Es ist durchaus möglich, daß die Schlußfolgerung unter schwächeren Bedingungen beweisbar ist.

Satz 16.3 (Faltungssatz (Yosida, S. 148)) Das Faltungsprodukt $f * g$ zweier Funktionen ist:

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy \quad (16.17)$$

Sei f, g und $f * g \in L_2$. Dann ist die Fouriertransformierte des Faltungsprodukts $f * g$ bis auf $\sqrt{2\pi}$ gleich dem Produkt der Fouriertransformierten der einzelnen Faktoren:

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}(\mathcal{F}f) \cdot (\mathcal{F}g) \quad (16.18)$$

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g). \quad (16.19)$$

Beweis: (von (s.o.))

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}(f * g))(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y) dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(x-y)} \cdot e^{-iky} f(y)g(x-y) dx dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iky} f(y) dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(x-y)} g(x-y) dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iky} f(y) dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iku} g(u) du \\
 &= \sqrt{2\pi} \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k) .
 \end{aligned}$$

Bemerkung 16.3 Sei $f, g \in L_1$. Dann ist $f * g \in L_1$ (Rudin, Satz 7.14, S. 146 und Satz 9.2, S. 181)

$$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{g} .$$

Satz 16.4 (von CWC gebastelt!) Sei $X = L_2(-\infty, +\infty, \mathbb{R}) \cap L_1(-\infty, +\infty, \mathbb{R})$. Sei weiter

1. $f \in X$
 2. $u(x, t)$ eine Lösung von (6.46), (6.47) mit:
- (a) $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$.
 - (b) $u(\cdot, t), u_x(\cdot, t), u_{xx}(\cdot, t) \in X$.

Dann gilt:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \cdot f(\xi) d\xi \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+ \quad (16.20)$$

Beweis:

Es gilt nach Lemma 14.3, daß

$$\widehat{u_{xx}}(k, t) = -k^2 \hat{u}(k, t), \quad k \in \mathbb{R}, t \geq 0 ,$$

so daß, aus der Differentialgleichung (16.14),

$$\frac{d}{dt} \hat{u}(k, t) = -k^2 \hat{u}(k, t), \quad t \geq 0 .$$

Es folgt sofort, daß

$$\hat{u}(k, t) = e^{-k^2 t} \cdot \hat{f}(k) .$$

Nach Anwendung von Satz (Faltungssatz) folgt:

$$u(\cdot, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * g$$

mit

$$\begin{aligned} g(x, t) &:= (\mathcal{F}^{-1}(\hat{g}(\cdot, t)))(x) , \\ \hat{g}(k, t) &:= e^{-k^2 t} . \end{aligned}$$

D.h.

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi . \quad (*)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} g(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 t} e^{+ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 t} (\cos kx + i \sin kx) dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 t} \cos kx dk \quad (\text{Da } \sin kx \text{ eine ungerade Funktion ist}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{(2n)!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 t} \cdot k^{2n} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{(2n)!} \cdot \frac{1}{t^{n+1/2}} \int_0^{\infty} e^{-s} \cdot s^{n-1/2} ds \left(k^2 t = s , 2dk = \frac{ds}{\sqrt{st}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-x^2}{t} \right)^n \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(2n+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-x^2}{t} \right)^n \cdot \frac{\Gamma(n+1/2) \cdot \sqrt{2\pi}}{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(n+1/2) \cdot 2^{2n+1/2}} \end{aligned}$$

da

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2^{2z-1/2} \cdot \Gamma(z) \cdot \Gamma(z+1/2)$$

Es folgt

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-x^2/4t} \quad (**)$$

Die Gleichung (16.20) folgt sofort aus (*) und (**).

Bemerkung 16.4 Die Herleitung der Gleichung (16.20) war das Hauptziel der o.a. Überlegungen. Es wäre evtl. sinnvoll gewesen, hinreichende Glattheit von u und f anzunehmen, um damit die Beweise zu vereinfachen.

Die Funktion

$$G(x, \xi, t) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp[-(x - \xi)^2/4t] \quad (16.21)$$

wird die *Fundamentallösung* der Wärmeleitungsgleichung genannt.

Literatur:

Dunford, N., Schwartz, J.T.: Linear Operators I, II, III. Interscience.

Yosida, K.: Functional Analysis, second edition. Springer, 1968

Rudin, W.: Real and Complex Analysis. McGraw Hill, 1966.

Kapitel 17

Die Laplace-Transformation

17.1 Einleitung

Sei f eine Funktion, die für $t \geq 0$ definiert ist. Aus dieser Funktion f bildet die Laplace-Transformation eine Funktion $\hat{f}(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ auf folgende Weise:

$$\mathcal{L}(f)(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt . \quad (17.1)$$

Z.B. ist $f(t) = e^{-t}$, dann ist

$$\hat{f}(t) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-t} dt = \frac{1}{1+s} .$$

Die Laplace-Transformation findet mehrere Anwendungen bei der Wärmeleitungsgleichung.

Ist $u(x, t)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, dann definieren wir $\hat{u}(x, s)$:

$$\hat{u}(x, s) := \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt .$$

Es lässt sich dann leicht feststellen, daß \hat{u} eine gewöhnliche Differentialgleichung erfüllt:

$$s\hat{u}(x, s) - u(x, 0) = \hat{u}_{xx}(x, s) .$$

Ist diese gewöhnliche Differentialgleichung analytisch lösbar, dann wird $u(x, s)$ gewonnen durch die inverse Laplace-Transformation, auf $\hat{u}(x, s)$ anzuwenden.

Sehr viele der bekannten analytischen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung sind mit Hilfe der Laplace-Transformation herleitbar.

17.2 Die Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation (17.1) läßt sich auch im Sinne des Lebesgueschen Integrals definieren (siehe Dunford-Schwartz), aber wir beschränken uns auf (eigentliche und un-eigentliche) Riemann Integration.

Definition 17.1 Eine Funktion $f(t)$ heißt J-Funktion, falls:

1. $f(t)$ ist im Intervall $[0, +\infty]$ definiert bis auf isoliert liegende Ausnahmestellen.
2. $f(t)$ ist in jedem endlichen Teilintervall $[T_1, t_2]$ eigentlich integrierbar bis auf höchstens endlich viele Stellen, wo sie absolut uneigentlich integrierbar ist, d.h.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x_0 - \epsilon}^{x_0} |f(t)| dt + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x_0}^{x_0 + \epsilon} |f(t)| dt$$

existiert.

Definition 17.2 Sei f eine J-Funktion. Gibt es $s_0 \in \mathbf{C}$ derart, daß der Grenzwert

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^{\omega} e^{-s_0 t} f(t) dt$$

existiert, so heißt $f(t)$ L-Funktion. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß man zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\Omega = \Omega(\epsilon)$ so wählen kann, daß

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(t) e^{-s_0 t} dt \right| < \epsilon$$

für jedes Wertepaar ω_1, ω_2 mit $\Omega \leq \omega_1 \leq \omega_2$.

Der Wert

$$\hat{f}(s_0) := \int_0^{\infty} e^{-s_0 t} f(t) dt = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^{\omega} e^{-s_0 t} f(t) dt$$

heißt das Laplace-Integral von $f(t)$ für den Parameterwert s_0 .

Ein besonderer Fall ist der, daß das Laplace-Integral absolut konvergiert, d.h. daß

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^{\omega} |e^{-s_0 t} f(t)| dt$$

existiert. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß man zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\Omega = \Omega(\epsilon)$ so bestimmen kann, daß

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\Re s_0 \cdot t} |f(t)| dt < \epsilon$$

für $\Omega \leq \omega_1 \leq \omega_2$. $f(t)$ heißt dann eine L_a -Funktion.

Satz 17.1 (Doetsch I, S. 33) Ist

$$|f(t)| \leq C \quad \text{für } t \geq T,$$

so ist das Laplace-Integral für jeden Parameterwert s_0 mit $\Re s_0 > 0$ absolut konvergent.

Satz 17.2 (Doetsch I, S. 33) Ist ein Laplace-Integral in einem Punkt s_0 absolut konvergent, so ist es in der abgeschlossenen Halbebene $\Re s \geq \Re s_0$ absolut konvergent.

Satz 17.3 (Doetsch I, S. 34) Das genaue Gebiet absoluter Konvergenz des Laplace-Integrals ist eine offene oder abgeschlossene Halbebene $\Re s > \alpha$ bzw. $\Re s \geq \alpha$, wobei α reell ist und $-\infty \leq \alpha \leq +\infty$. Der Rand $\Re s = \alpha$ kann nur entweder ganz (wie bei der Funktion $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $\alpha = 0$) oder gar nicht (wie bei der Funktion $f(t) = 1$, $\alpha = 0$) zum Gebiet absoluter Konvergenz gehören. α heißt Abszisse absoluter Konvergenz, das Gebiet $\Re s > \alpha$ bzw. $\Re s \geq \alpha$ heißt Halbebene absoluter Konvergenz des Laplace-Integrals.

Satz 17.4 (Fundamentalsatz (Doetsch I, S. 35)) Konvergiert ein Laplace-Integral für s_0 :

$$\hat{f}(s_0) = \int_0^\infty e^{-s_0 t} f(t) dt$$

so konvergiert es in jedem Winkelraum $W(s_0, \psi < \pi/2)$ gleichmäßig. Insbesondere konvergiert es also für jedes s der offenen Halbebene $\Re s > \Re s_0$. Sei

$$\Phi(t) := \int_0^t e^{-s_0 \tau} f(\tau) d\tau \quad \text{für } t \geq 0. \quad (17.2)$$

Dann gilt:

1.

$$\hat{f}(s) = (s - s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} \Phi(t) dt \quad \text{für } \Re s > \Re s_0 \quad (17.3)$$

2.

$$\hat{f}(s) = \hat{f}(s_0) + \int_0^\infty (s - s_0)e^{-(s-s_0)t}[\Phi(t) - \hat{f}(s_0)]dt$$

für $\Re s > \Re s_0$ und $s = s_0$. (17.4)

Die in (17.3) und (17.4) vorkommenden Integrale konvergieren für $\Re s > \Re s_0$ absolut, das in (17.4) konvergiert gleichmäßig in jedem $W(s_0, \psi < \pi/2)$.

Beweis:

Durch partielle Integration folgt für beliebiges komplexes s :

$$\begin{aligned} \int_0^\omega e^{-st} f(t) dt &= \int_0^\omega e^{-(s-s_0)t} e^{-s_0 t} f(t) dt \\ &= e^{-(s-s_0)\omega} \Phi(\omega) \Big|_0^\omega + (s - s_0) \int_0^\omega e^{-(s-s_0)t} \Phi(t) dt \\ &= e^{-(s-s_0)\omega} \Phi(\omega) + (s - s_0) \int_0^\omega e^{-(s-s_0)t} \Phi(t) dt. \end{aligned}$$

Addiert man hierzu die Gleichung

$$0 = \hat{f}(s_0)(1 - e^{-(s-s_0)\omega}) - (s - s_0) \int_0^\omega e^{-(s-s_0)t} \hat{f}(s_0) dt,$$

so ergibt sich:

$$\int_0^\omega e^{-st} f(t) dt = \hat{f}(s_0) + e^{-(s-s_0)\omega} [\Phi(\omega) - \hat{f}(s_0)] + \int_0^\omega (s - s_0) e^{-(s-s_0)t} [\Phi(t) - \hat{f}(s_0)] dt. \quad (*)$$

Wegen $\Phi(\omega) \rightarrow \hat{f}(s_0)$ für $\omega \rightarrow \infty$ konvergiert der zweite Summand auf der rechten Seite von (*) für $\omega \rightarrow \infty$ in der Halbebene $\Re s \geq \Re s_0$ gleichmäßig und zwar gegen 0.

Wegen $\Phi(\omega) \rightarrow \hat{f}(s_0)$ für $\omega \rightarrow \infty$ ist $|\Phi(\omega) - \hat{f}(s_0)|$ beschränkt. Der dritte Summand in (*) konvergiert gleichmäßig im Winkelraum W . Die linke Seite konvergiert also auch gleichmäßig in W und es gilt:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \hat{f}(s_0) + \int_0^\infty (s - s_0) e^{-(s-s_0)t} [\Phi(t) - \hat{f}(s_0)] dt.$$

Das ist der Ausdruck (17.4), der für $s = s_0$ und für jedes s mit $\Re s > \Re s_0$ gilt, da man jedes solche s in einen Winkelraum W einfassen kann.

Läßt man den Punkt s_0 weg und betrachtet nur $\Re s > \Re s_0$, so ist

$$(s - s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} \hat{f}(s_0) dt$$

konvergent und gleich $\hat{f}(s_0)$, so daß sich (17.4) auf (17.3) reduziert.

Die Funktionen $\Phi(t)$ und $\Phi(t) - \hat{f}(s_0)$ sind für $t \geq 0$ stetig und haben Grenzwerte für $t \rightarrow \infty$, sind also beschränkt, so daß die Integrale (17.3) und (17.4) nach Satz 15.1 für $\Re(s - s_0) > 0$ absolut konvergieren.

Der folgende Satz beschreibt die Konvergenzeigenschaften für (einfache) Konvergenz.

Satz 17.5 (Doetsch I, S. 37) Das genaue Gebiet der (einfachen) Konvergenz des Laplace-Integrals ist eine Halbebene $\Re s > \beta$, deren Rand $\Re s = \beta$ ganz, teilweise oder gar nicht zum Konvergenzgebiet gehören kann, wobei $-\infty \leq \beta \leq +\infty$.

β heißt Konvergenzabszisse, das Gebiet $\Re s > \beta$ mit Einschluß der eventuellen Konvergenzpunkte auf $\Re s = \beta$ die Konvergenzhalbene, die Gerade $\Re s = \beta$ die Konvergenzgerade des Laplace-Integrals.

Bemerkung 17.1 $-\infty \leq \beta \leq \alpha \leq +\infty$, wobei alle überhaupt denkbaren Fälle vorkommen können.

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$	Konvergenzgebiet
Beispiel 17.1	1	$\frac{1}{s}$	$\Re s > 0$
	$\begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t \leq a \\ 1 & , \quad t > a \end{cases}$	$\frac{1}{s} e^{-as}$	$\Re s > 0$
	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\Re s > \Re a$
	$\log t$	$\frac{\Gamma'(1)}{s} - \frac{\log s}{s}$	$\Re s > 0$
	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\Re s > Ra $
	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\Re s > Ra $
	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\Re s > Ia $
	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$ \Re s > Ia $
	$J_0(t)$	$\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$	$\Re s > 0$

Weitere Eigenschaften:

Ist $\mathcal{L}(f)$ bekannt und $f_1(t) := f(at + b)$, dann läßt sich $\mathcal{L}(f_1)$ leicht berechnen, z.B.:

Satz 17.6 (Doetsch I, S. 85) Ist f eine L-Funktion

$$f_1(t) = f(at), \quad a > 0, \quad (17.5)$$

so ist f_1 eine L-Funktion und

$$\hat{f}_1(s) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) \quad (17.6)$$

$\mathcal{L}(f_1)$ ist konvergent für $\Re s > a\beta$, wenn $\mathcal{L}(f)$ für $\Re s > \beta$ konvergiert.

Satz 17.7 Ist $f(t)$ eine L-Funktion, so ist auch $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ eine solche.

Wenn $\mathcal{L}(f)$ für ein reelles $s_0 \geq 0$ (einfach) konvergiert, so konvergiert $\mathcal{L}(\varphi)$ im Falle $s_0 = 0$ für $\Re s > 0$, im Falle $s_0 > 0$ für $s = s_0$ und $\Re s > s_0$ und es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi(t)) &= \frac{1}{s} \mathcal{L}(f(t)) && \text{für } \Re s > 0 \quad \text{im Falle } s_0 = 0, \\ d.h. \hat{\varphi}(s) &= \frac{1}{s} \hat{f}(s) && \begin{cases} \text{für } s = s_0 \quad \text{und } \Re s > s_0 \quad \text{im Falle } s_0 > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (17.7)$$

Außerdem ist

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0(1) & , \quad \text{wenn } s_0 = 0, \\ 0(e^{s_0 t}) & \text{für } t \rightarrow \infty, \quad \text{wenn } s_0 > 0, \end{cases} \quad (17.8)$$

so daß $\mathcal{L}(\varphi)$ für $\Re s > s_0$ sogar absolut konvergiert.

Beweis:

Im Falle $s_0 = 0$ folgt die Gleichung $\hat{f}(s) = s\hat{\varphi}(s)$ für $\Re s > 0$ aus Satz 15.4, Gleichung (17.3). Daß die stetige Funktion $\varphi(t)$ beschränkt ist, ergibt sich daraus, daß $\mathcal{L}(f)$ für $s = 0$, d.h. $\int_0^\infty f(t)dt$ existiert, also $\varphi(t)$ für $t \rightarrow \infty$ einen Grenzwert hat.

Im Falle $s_0 > 0$ setzen wir

$$\psi(x) := \int_0^x e^{-s_0 t} \varphi(t) dt \quad (x > 0)$$

und

$$g(x) = e^{s_0 x} \psi(x), \quad h(x) = e^{s_0 x}.$$

Dann ist $g'(x)$ und $h'(x)$ für $x > 0$ vorhanden [wegen der Stetigkeit von $\varphi(t)$], $h'(x) \neq 0$, $h(x)$ reell, $h(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$ (hierfür wird $s_0 > 0$ gebraucht) und

$$\begin{aligned}
\frac{g'(x)}{h'(x)} &= \frac{e^{s_0 x} (s_0 \psi + \psi')}{s_0 e^{s_0 x}} = \frac{1}{s_0} (s_0 \psi + \psi') \\
&= \frac{1}{s_0} \left[s_0 \int_0^x e^{-s_0 t} \varphi(t) dt + e^{-s_0 x} \varphi(x) \right] \\
&= \frac{1}{s_0} \left[-e^{-s_0 t} \varphi(t) \Big|_0^x + \int_0^x e^{-s_0 t} f(t) dt + e^{-s_0 x} \varphi(x) \right] \\
&= \frac{1}{s_0} \int_0^x e^{-s_0 t} f(t) dt .
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{L}(f)$ für s_0 konvergiert, hat $g'(x)/h'(x)$ für $x \rightarrow \infty$ den Grenzwert $\hat{f}(s_0)/s_0$, folglich hat nach der de l'Hospitalschen Regel $g(x)/h(x)$ denselben Grenzwert:

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \psi(x) = \int_0^x e^{-s_0 t} \varphi(t) dt \rightarrow \frac{1}{s_0} \hat{f}(s_0) ,$$

das heißt

$$\hat{\varphi}(s_0) = \frac{1}{s_0} \hat{f}(s_0) .$$

Die Gleichung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(x)}{h'(x)} ,$$

das heißt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{s_0} [s_0 \psi(x) + \psi'(x)]$$

zeigt weiterhin, daß

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-s_0 x} \varphi(x) = 0 ,$$

also

$$\varphi(x) = O(e^{s_0 x})$$

ist.

Für jedes reelle $s > s_0$ trifft die Voraussetzung erst recht zu, so daß die Gleichung $\varphi(s) = f(s)/s$ auch für diese s gilt. Da, wie gezeigt werden kann, $f(s)$ und $\varphi(s)$ analytische Funktionen sind, dehnt sie sich auf $\mathbb{R}s > s_0$ aus.

Satz 17.8 (Doetsch I, S. 99) Sei $f(t)$ für $t > 0$ differenzierbar und $f'(t)$ eine L-Funktion.

Dann gilt:

1. f ist eine L-Funktion.

2. Der Grenzwert

$$f_0 := \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$$

existiert.

3. Wenn $\mathcal{L}(f')$ für ein reelles $s_0 > 0$ konvergiert, so konvergiert $\mathcal{L}(f)$ auch für s_0 , und es ist

$$\widehat{f'}(s) = s \widehat{f}(s) - f(0) \quad (17.9)$$

für $s = s_0$ und $\Re s > s_0$.

4. $\mathcal{L}(f)$ ist für $\Re s > s_0$ absolut konvergent.

Beweis:

In Satz 15.7 ersetzt man f durch f' . Es folgt aus Gleichung (17.7), mit

$$\varphi(t) = f(t) - f(0),$$

$$\begin{aligned} \widehat{f}(s) - \frac{1}{s} f(0) &= \widehat{\varphi}(s) \\ &= \frac{1}{s} \widehat{f'}(s). \end{aligned}$$

Satz 17.9 (Doetsch I, S. 100) Sei $f(t)$ für $t > 0$ n -mal differenzierbar und $f^n(t)$ eine L-Funktion.

Dann:

1. $f(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ sind L-Funktionen.

2. Die Grenzwerte

$$f^{(k)}(0) := \lim_{t \rightarrow 0} f^{(k)}(t), \quad 0 \leq k \leq n-1$$

existieren.

3. Wenn $\mathcal{L}(f)$ für ein reelles $s_0 > 0$ konvergiert, so konvergiert $\mathcal{L}(f)$ auch für s_0 und es ist

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \hat{f}(s) - \sum_{k=1}^n f^{(k-1)}(0) \cdot s^{n-k} \quad \text{für } s = s_0 \quad \text{und } \Re s > s_0 . \quad (17.10)$$

Beispiel 17.2 Man löse die Anfangswertaufgabe:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= \sin t \\ y(0) &= y_0 , \quad y'(0) = y'_0 . \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\ddot{y}) &= s^2 \hat{y} - sy_0 - y'_0 \\ \mathcal{L}(\sin t) &= \frac{1}{1+s^2} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \frac{y_0}{s} + \frac{y'_0}{s^2} + \frac{1}{s^2(1+s^2)} \\ &= \frac{y_0}{s} + \frac{y'_0}{s^2} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{1+s^2} \quad \text{und} \\ y(t) &= y_0 + y'_0 \cdot t + 1 - \sin t \end{aligned}$$

Bemerkung 17.2 Da $\frac{1}{s^2}$ nicht meromorph ist, kann für diese Funktion der Residuensatz nicht benutzt werden.

17.3 Die komplexe Umkehrformel für die Laplacesche Transformation

Für die Fourier-Transformation gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iu\xi} du \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{+ix\xi} d\xi . \end{aligned}$$

Sei nun

$$f_1(t) := e^{-\gamma t} f(t) H(t)$$

für geeignete $\gamma > 0$, wo $H(t)$ die Heaviside Funktion ist. Es folgt:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+it\xi} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u) e^{-iu\xi} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+it\xi} d\xi \int_0^{\infty} f(u) e^{-\gamma u} e^{-iu\xi} du . \end{aligned}$$

Setze $s := \gamma + i\xi$,

$$\hat{f}(s) := \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt .$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} e^{\gamma t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+it\xi} d\xi \int_0^{\infty} f(u) e^{-su} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} \hat{f}(s) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \hat{f}(s) ds . \end{aligned}$$

Hiermit haben wir die komplexe Umkehrformel heuristisch hergeleitet.

Es gibt mehrere Sätze über die Umkehrformel. Der folgende Satz genügt für viele Zwecke:

Satz 17.10 (Doetsch I, S. 263) $\hat{f}(s)$ sei in der Halbebene $\mathbb{R}s > x_1 \geq 0$ holomorph und in der Gestalt

$$\hat{f}(s) = \frac{c}{s^\alpha} + \frac{g(s)}{s^{1+\epsilon}} , \quad (0 < \alpha \leq 1 , \epsilon > 0)$$

darstellbar, wo $g(s)$ in jeder Halbebene $\mathbb{R}s \geq x_1 + \delta > x_1$ beschränkt ist. Dann ist $\hat{f}(s)$ die Laplace-Transformierte der Funktion

$$f(t) = V.P. \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} \hat{f}(s) ds , \quad (x > x_1) . \quad (17.11)$$

Das Integral (17.11) ist als Cauchyscher Hauptwert zu verstehen. Es existiert für jedes $t > 0$ und ist von x unabhängig.

Beispiel 17.3

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad a \text{ reell} \\ \hat{f}(s) &= \frac{1}{s} + \frac{a^2}{s(s^2 - a^2)} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{g(s)}{s^3} \\ g(s) &:= \frac{a^2 s^2}{s^2 - a^2}.\end{aligned}$$

Satz 15.10 ist daher anwendbar mit $c = 1$, $\alpha = 1$, $\epsilon = 2$, $x_1 = 2a$.

$$f(t) = V.P. \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} f(s) ds.$$

Für die Berechnung von $f(t)$ ist es oft nützlich, den Integrationsweg zu deformieren.

Satz 17.11 (Doetsch, S. 224) Es sei eine Schar von Halbkreisen H_n um $s = 0$ links von der imaginären Achse mit den Radien ρ_n gegeben, wobei $\rho_0 < \rho_1, \dots, \rho_n \rightarrow \infty$.

Eine Funktion $f(s)$ sei auf $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ definiert, stetig, und genüge auf H_n der Abschätzung

$$|f(s)| \leq \delta_n, \quad \text{wo } \delta_n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Dann ist

$$\int_{H_n} e^{ts} f(s) ds \rightarrow 0 \quad \text{bei } t > 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis:

Für $s := \rho e^{i\theta}$ gilt

$$\begin{aligned}\left| \int_{H_n} e^{ts} f(s) ds \right| &\leq \delta_n \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{t\rho_n \cos \theta} \rho_n d\theta \\ &= \delta_n \int_0^\pi e^{-t\rho_n \cos \theta} \rho_n d\theta \\ &= 2\delta_n \rho_n \int_0^{\pi/2} e^{-t\rho_n \sin \theta} d\theta.\end{aligned}$$

Für $0 \leq \theta \leq \pi/2$ gilt:

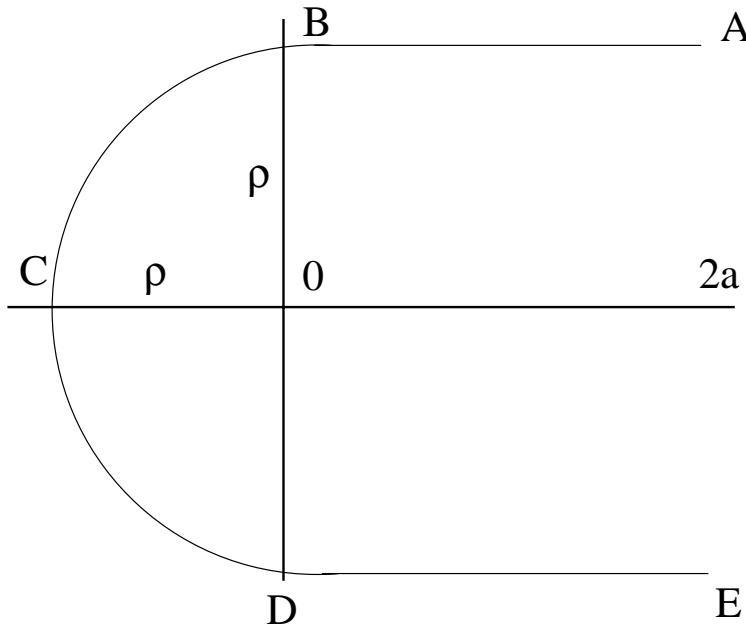


Abbildung 17.1: Der deformierte Weg für Beispiel 15.2

$$\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$$

und folglich

$$\begin{aligned} \left| \int_{H_n} e^{ts} f(s) ds \right| &\leq 2\delta_n \rho_n \int_0^{\pi/2} e^{-t\rho_n 2\theta/\pi} d\theta \\ &= 2\delta_n \frac{1 - e^{-t\rho_n}}{(2/\pi)t} \rightarrow 0 \quad \text{bei } t > 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Beispiel 15.2 Fortsetzung

Es ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2a-i\rho}^{2a+i\rho} e^{st} \frac{s}{s^2 - a^2} ds = r_+(t) + r_-(t) - I(\rho),$$

wobei r_+ bzw. r_- das Residuum in dem Pol $+a$ bzw. $-a$ bezeichnen und I das Integral um den Weg ABCDE bezeichnet (siehe Abbildung 17.1).

Nachdem (siehe Hilfssatz 2)

$$\begin{aligned} I(\rho) &\rightarrow 0 \quad \text{für } \rho \rightarrow \infty \\ r_+ &= \frac{1}{2} e^{+at} \\ r_- &= \frac{1}{2} e^{-at} \end{aligned}$$

folgt, daß $f(s)$ die Laplace-Transformierte von

$$f(t) = \frac{1}{2} (e^{at} + e^{-at}) = \cosh at$$

ist.

Beispiel 17.4 [Carslaw + Jaeger, S. 327]

Wir betrachten die Wärmeleitung in einem unendlich langen Zylinder vom Radius a mit der Anfangstemperatur Null und der äußeren Temperatur V :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial t} &= 0, \quad (0 \leq r < a, t > 0) \\ v(r, 0) &= 0, \quad 0 \leq r \leq a \\ v(a, t) &= V, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Für $\hat{v} = Lv$ gilt:

$$\frac{d^2 \hat{v}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\hat{v}}{r} - q^2 \hat{v} = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad (17.12)$$

wobei $q^2 = s/\kappa$, weil

$$L \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) = s\hat{v} - 1 \cdot v(r, 0) = s\hat{v}.$$

Die Randbedingungen sind:

$$\begin{aligned} \hat{v} &\text{ beschränkt bei } r = 0 \\ \hat{v}(a, s) = L(V) &= V/s. \end{aligned} \quad (17.13)$$

Die Besselsche Gleichung für $J_0(x)$ ist:

$$\ddot{y} + \frac{1}{x} \dot{y} + y = 0.$$

$$z := I_0(qx) := J_0(iqx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}iqx\right)^{2r}}{r!r!}$$

erfüllt die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= iq \left. \frac{dJ_0}{dx} \right|_{iqx} \\ \frac{d^2 z}{dx^2} &= (iq)^2 \left. \frac{d^2 J_0}{dx^2} \right|_{iqx} \end{aligned}$$

Nachdem

$$\frac{d^2 J_0}{dx^2} (iqx) + \frac{1}{iqx} \frac{dJ_0}{dx} (iqx) + J_0(iqx) = 0$$

folgt

$$\frac{1}{(iq)^2} \ddot{z} + \frac{1}{iqx} \cdot \frac{1}{iq} \dot{z} + z = 0$$

oder

$$\ddot{z} + \frac{1}{x} \dot{z} - q^2 z = 0 .$$

Es folgt, daß die Lösung (17.12), (17.13) ist:

$$\begin{aligned}\hat{v} &= \frac{V}{s} \frac{I_0(qr)}{I_0(qa)}, \\ q^2 &= s/\kappa.\end{aligned}\tag{17.14}$$

Zur Berechnung von $v = L^{-1}(\hat{v})$ wird die Umkehrformel angewandt:

$$v(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} \frac{V}{s} \frac{I_0(\sqrt{s/\kappa}r)}{I_0(\sqrt{s/\kappa}a)} ds .\tag{17.15}$$

Die Nullstellen von $J_0(x)$ seien $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n \rightarrow \infty$.

Die Nullstellen von

$$I_0(qa) = J_0(iqa)$$

sind deshalb bei

$$iq_n a := \alpha_n$$

oder

$$s_n := \kappa q_n^2 := -\frac{\kappa}{a^2} \alpha_n^2 .$$

Es folgt aus (17.15) durch Residuumsberechnung, daß

$$v(r, t) = V + \sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n t} \frac{V}{s_n} \left. \frac{I_0(q_n r)}{\frac{d}{ds} I_0(qa)} \right|_{s=s_n}$$

Zur Berechnung von $\frac{d}{ds} I_0(qa)$ ist die Beziehung

$$\frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J'_\nu(x) = J_{\nu+1}(x)$$

nützlich. Für $\nu = 0$ folgt:

$$J'_0(x) = J_1(x)$$

und

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} I_0(qa) &= \frac{d}{ds} J_0(iqa) \\ &= \frac{ia}{2q\kappa} \cdot J'_0(iqa) \\ &= -\frac{ia}{2q\kappa} J_1(iqa) .\end{aligned}$$

Es folgt ($iq = \alpha_n/a$) :

$$\begin{aligned}\left. \frac{d}{ds} I_0(qa) \right|_{s=s_n} &= \frac{-ia \cdot a \cdot i}{2\kappa \alpha_n} J_1(\alpha_n) \\ &= +\frac{a^2}{2\kappa \alpha_n} J_1(\alpha_n)\end{aligned}$$

und

$$v(r, t) = V - 2V \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\kappa(\alpha_n^2/a^2)t} \frac{J_0(\alpha_n r/a)}{\alpha_n J_1(\alpha_n)}$$

17.4 Andere Integraltransformationen

Andere bekannte Transformationen sind:

1. Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}f(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\xi t} dt .$$

2. Fouriersche Sinustransformation

$$\mathcal{F}_s f(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin(\xi t) dt .$$

3. Fouriersche Cosinustransformation

$$\mathcal{F}_c f(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\xi t) dt .$$

4. Mellin-Transformation

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx .$$

5. Hankel-Transformation

$$H_{\nu} f(\xi) = \int_0^{\infty} x f(x) J_{\nu}(\xi x) dx .$$

Literatur:

Carslaw, H.S. und Jaeger, J.C.: Conduction of Heat in Solids, 2. Ausgabe, Oxford 1959.

Crank, J.: The Mathematics of Diffusion, 2. Ausgabe, Oxford 1975.

Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation I, II, III. Birkhäuser, 1956.

Doetsch, G.: Einführung in die Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Springer 1970.

Dunford, N., Schwartz, J.T.: Linear Operators I, II, III. Interscience.

Sneddon, I.N.: The Use of Integral Transforms. McGraw-Hill, 1972.

Anhang A

Einige einfache Lösungsmethoden

A.1 Die Methode der Trennung der Veränderlichen

Betrachte die partielle Differentialgleichung

$$F(\underline{x}, u, Du, D^2u, \dots, D^p u) = 0 \quad \text{mit } \underline{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{A.1})$$

Man macht den Ansatz, daß die Lösung $u(x, y)$ als ein Produkt von zwei Funktionen $X(x)$ und $Y(y)$ darstellbar ist, wobei X und Y nur von x bzw. y abhängig sind:

$$u(x, y) = X(x) Y(y) \quad (\text{A.2})$$

Man setzt A.2 in die Gleichung A.1 ein und versucht, z. B. durch das Produkt $X(x)Y(y)$ zu dividieren, die Gleichung auf die Gestalt

$$\phi(x, X, \dot{X}, \ddot{X}, \dots, X^{(p)}) = \psi(y, Y, \dot{Y}, \ddot{Y}, \dots, Y^{(p)}) \quad (\text{A.3})$$

zu bringen, mit

$$\begin{aligned} X^{(k)} &= \frac{d^k}{dx^k} X(x), \\ Y^{(k)} &= \frac{d^k}{dy^k} Y(y). \end{aligned}$$

Es folgt aus A.3, daß es eine Konstante α gibt, mit

$$\phi(x, X, \dot{X}, \ddot{X}, \dots, X^{(p)}) = \alpha, \quad (\text{A.4})$$

$$\psi(y, Y, \dot{Y}, \ddot{Y}, \dots, Y^{(p)}) = \alpha. \quad (\text{A.5})$$

Die Gleichungen A.4 und A.5 sind gewöhnliche Differentialgleichungen zur Bestimmung von X und Y .

Läßt sich z. B. die Gleichung A.4 in die Gestalt einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten,

$$p(D)X = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$p(D) := \sum_{k=0}^p a_k D^k, \quad (\text{A.7})$$

schreiben, so ist

$$X(x) = e^{\lambda x} \quad (\text{A.8})$$

eine Lösung wenn λ eine Nullstelle des Polynoms

$$p(\lambda) = 0 \quad (\text{A.9})$$

ist.

Beispiel:

Man betrachtet die Wellengleichung

$$u_{xx} = u_{yy}.$$

Der Ansatz

$$u = XY$$

führt zu der Gleichung

$$\ddot{X}Y = X\ddot{Y}.$$

Durch die Division durch XY erhält man

$$\frac{\ddot{X}}{X} = \frac{\ddot{Y}}{Y} = \alpha.$$

Die Gleichung

$$\frac{\ddot{X}}{X} = \alpha$$

läßt sich als

$$\ddot{X} - \alpha X = 0$$

schreiben, so daß

$$X(x) = e^{\lambda x}$$

eine Lösung ist, falls λ eine Nullstelle des Polynoms

$$p(\lambda) := \lambda^2 - \alpha$$

ist.

Es folgt, daß

$$\begin{aligned} u(x, y) &= X(x) \cdot Y(y) \\ &= [a_1 e^{\sqrt{\alpha}x} + a_2 e^{-\sqrt{\alpha}x}] \cdot [a_3 e^{\sqrt{\alpha}y} + a_4 e^{-\sqrt{\alpha}y}] \end{aligned}$$

eine Lösung von

$$u_{xx} = u_{yy}$$

ist, wobei a_1, a_2, a_3, a_4 und α beliebige Konstanten sind.

A.2 Die Methode von Lagrange

Sei

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \quad (\text{A.10})$$

eine quasilineare Gleichung in den zwei unabhängigen Veränderlichen x, y .

Man betrachtet die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)} \quad (\text{A.11})$$

und versucht zwei unabhängige Lösungen dieser Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} \phi(x, y, u) = c_1 = \text{Konstante} \\ \psi(x, y, u) = c_2 = \text{Konstante} \end{array} \right\} \quad (\text{A.12})$$

zu finden.

Seien $F(\phi, \psi)$, $f(\phi)$ und $g(\psi)$ beliebige Funktionen. Wird $u = u(x, y)$ durch eine der Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} F(\phi, \psi) = 0, \\ \psi = f(\phi), \\ \phi = g(\psi) \end{array} \right\} \quad (\text{A.13})$$

definiert, dann ist u eine Lösung der Gleichung A.10.

Beispiel

Man betrachtet die Differentialgleichung

$$(y + u)u_x + yu_y = x - y.$$

Die entsprechenden gewöhnlichen Differentialgleichungen sind:

$$\frac{dx}{y + u} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{x - y}$$

Es folgt aus der ersten und dritten Gleichung:

$$\frac{d(x + u)}{x + u} = \frac{dy}{y},$$

so daß

$$\ln(x + u) = \ln y + \text{Konstante},$$

oder

$$x + u = \text{Konstante} \cdot y$$

oder

$$\frac{x + u}{y} = \text{Konstante}.$$

Man setzt:

$$\phi(x, y, u) := \frac{x + u}{y}.$$

Es gilt auch aus der ersten und zweiten Gleichung:

$$\frac{d(x - y)}{u} = \frac{du}{x - y},$$

so daß

$$\begin{aligned} (x-y) \, d(x-y) &= u \, du, \\ \frac{(x-y)^2}{2} &= \frac{u^2}{2} + \text{Konstante}, \\ (x-y)^2 - u^2 &= \text{Konstante} \end{aligned}$$

Man setzt:

$$\psi(x, y, u) := (x-y)^2 - u^2.$$

Eine Lösung u der Gleichung A.5 wird durch

$$\psi(x, y, u) = f(\phi),$$

d. h.

$$(x-y)^2 - u^2 = f\left(\frac{x+u}{y}\right)$$

für jede beliebige Funktion f definiert.

Probe

Aus der vorhergehenden Gleichung folgt:

$$2(x-y) - 2uu_x = f' \cdot \frac{1+u_x}{y}$$

oder

$$u_x = \frac{2y(x-y) - f'}{2uy + f'}$$

und

$$-2(x-y) - 2uu_y = f' \cdot \frac{yu_y - (x+u)}{y^2}$$

oder

$$u_y = \frac{-2y^2(x-y) + (x+u)f'}{2uy^2 + yf'}$$

Es folgt:

$$(y+u)u_x + yu_y = (y+u) \cdot \frac{2y(x-y) - f'}{2uy + f'} + \frac{-2y^2(x-y) + (x+u)f'}{2uy + f'}.$$

usw.

Begründung der Methode

Sei ϕ wie in A.12 definiert. Dann gilt

$$\phi_x(x, y, u)dx + \phi_y(x, y, u)dy + \phi_u(x, y, u)du = 0 \quad (\text{A.14})$$

wo dx, dy, du die Gleichung A.11 erfüllen. Es folgt¹:

$$a(x, y, u)\phi_x + b(x, y, u)\phi_y + c(x, y, u)\phi_u = 0. \quad (\text{A.15})$$

Ebenfalls gilt:

$$a(x, y, u)\psi_x + b(x, y, u)\psi_y + c(x, y, u)\psi_u = 0. \quad (\text{A.16})$$

Aus den Gleichungen A.15 und A.16 folgt:

$$\frac{a(x, y, u)}{\begin{vmatrix} \phi_y & \phi_u \\ \psi_y & \psi_u \end{vmatrix}} = \frac{b(x, y, u)}{\begin{vmatrix} \phi_u & \phi_x \\ \psi_u & \psi_x \end{vmatrix}} = \frac{c(x, y, u)}{\begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}}. \quad (\text{A.17})$$

Aus der Identität A.13, $F(\phi, \psi) = 0$, folgt:

$$F_\phi[\phi_x + \phi_u u_x] + F_\psi[\psi_x + \psi_u u_x] = 0$$

$$F_\phi[\phi_y + \phi_u u_y] + F_\psi[\psi_y + \psi_u u_y] = 0,$$

so daß

$$\begin{vmatrix} \phi_x + \phi_u u_x & \psi_x + \psi_u u_x \\ \phi_y + \phi_u u_y & \psi_y + \psi_u u_y \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} \phi_x & \psi_x \\ \phi_y & \psi_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_u & \psi_u \\ \phi_y & \psi_y \end{vmatrix} u_x + \begin{vmatrix} \phi_x & \psi_x \\ \phi_u & \psi_u \end{vmatrix} u_y = 0,$$

so daß

$$\begin{vmatrix} \phi_y & \phi_u \\ \phi_y & \psi_u \end{vmatrix} u_x + \begin{vmatrix} \phi_u & \phi_x \\ \psi_u & \psi_x \end{vmatrix} u_y = \begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

¹Siehe Bemerkung

Aus den Gleichungen A.17 und A.18 folgt:

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u). \quad \square \quad (\text{A.19})$$

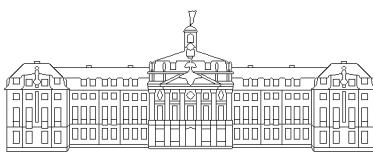
Bemerkung

Die Herleitung und Erklärung der Gleichungen A.14 und A.15 ist nicht einwandfrei.

Colin W. Cryer

Numerik Partieller Differentialgleichungen II

Sommersemester¹ 1995



Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

¹Letzte Änderung am 2. Oktober 1995

Inhaltsverzeichnis

1	Elliptische Gleichungen	1
1.1	Definition elliptischer Gleichungen	1
1.1.1	Skalare Gleichungen	1
1.1.2	Gleichungssysteme	2
1.2	Randwertaufgaben	5
1.2.1	Einführung	5
1.2.2	Der Rand $\partial\Omega$	7
1.2.3	Typische Randbedingungen	7
1.3	Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von Randwertaufgaben	9
2	Das Maximumprinzip	11
2.1	Die grundlegenden Sätze	11
2.2	Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise	16
3	Finite Differenzen	19
3.1	Einleitung	19
3.2	Ein Modellproblem: das Dirichlet-Problem für die Poisson- Gleichung . .	22
3.3	Differenzenoperatoren	25
3.4	Finite Differenzen: Fortsetzung	28
3.4.1	Beispiel 1: Das Neumann Problem	30
3.4.2	Beispiel 2: Nichtquadratische Gitter	32
3.4.3	Beispiel 3: Neumann Bedingungen auf gekrümmten Rändern	33
3.4.4	Beispiel 4:	34
3.5	Das Maximumprinzip für Differenzengleichungen	34
3.6	Konvergenzbeweise	40
4	Iterationsverfahren für große lineare Systeme: klassische Verfahren	47
4.1	Einleitung	47
4.2	Hilfsmittel	48
4.3	Das Jacobi-, Gauß-Seidel-, SOR- und SSOR-Verfahren - eine Einleitung .	53
4.3.1	Anwendung auf ein Modellproblem	53
4.3.2	Das Jacobi-Verfahren oder Gesamtschrittverfahren	55

4.3.3	Das Gauß-Seidel-(Einzelschritt-) Verfahren	56
4.3.4	Das S.O.R.-Verfahren	57
4.3.5	Das SSOR-Verfahren	57
4.4	Allgemeine Konvergenzbetrachtungen	58
4.5	Die Gerschgorin Sätze	64
4.6	Das Gesamtschrittverfahren - das Modellproblem	67
4.7	Verallgemeinerungen	71
4.8	Nichtnegative Matrizen	72
4.9	Das SOR Verfahren	74
5	Iterationsverfahren für große lineare Systeme: neue Verfahren	81
6	Die Laplace- und Poisson-Gleichung: Methoden der Funktionentheorie	83
6.1	Zusammenhänge mit der Funktionentheorie	83
6.2	Transformation der Laplace-Gleichung (siehe z.B. Kantorowitsch und Krylow, S. 331)	84
6.3	Konforme Abbildungen	86
6.4	Die Integralgleichung von Theodorsen	88
6.5	Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip	89
6.6	Die Formel von Christoffel-Schwarz	91
6.6.1	Herleitung (siehe Kantorowitsch und Krylow, S. 475, und Nehari, S. 189)	91
6.6.2	Die Parameterwerte des Christoffel-Schwarzschen Integrals (siehe Kantorowitsch und Krylow, S. 477)	93
6.6.3	Die Christoffel-Schwarz-Formel: Ein Beispiel	95
7	Die Laplace-Gleichung: Integralgleichungen	99
7.1	Einleitung	99
7.2	Integralgleichungen für die Laplace-Gleichung	99
7.2.1	Die Integralgleichung für eine Doppelschicht	99
7.2.2	Die Integralgleichung für eine einfache Schicht	104
7.2.3	Anwendung der Greenschen Formel	104
7.3	Numerische Lösung von Integralgleichungen	106
7.4	Anwendungen	112
8	Finite Elemente: Theoretische Vorbereitungen	115
8.1	Einführung	115
8.2	Variationsgleichungen im Hilbertraum	117
8.3	Variationsungleichungen: Einleitung	125
8.3.1	Diskretisierung der Variationsformulierungen	130
8.4	Variationsungleichungen im Hilbertraum	132

9 Sobolew-Räume	139
9.1 Einführung	139
9.2 Die Lebesguesche Theorie	139
9.3 Topologische Räume	145
9.4 Sobolew-Räume: Definition durch Vervollständigung	148
9.5 Sobolew-Räume: Definition mit Hilfe schwacher Ableitungen	149
9.6 Das Verhältnis zwischen $W^{m,p}(\Omega)$ und $H^{m,p}(\Omega)$	152
9.7 Zusammenhang mit absoluten stetigen Funktionen	154
9.8 Die Sobolewschen Einbettungssätze	154
9.9 Der Spur Operator γ	154
9.10 Die Poincarésche Ungleichung und ihre Anwendungen	154
10 Finite Elemente	159
10.1 Einführung	159
10.2 Das Galerkin-Verfahren: Fehlerabschätzungen	159

Kapitel 1

Elliptische Gleichungen

1.1 Definition elliptischer Gleichungen

1.1.1 Skalare Gleichungen

Definition 1.1 Sei

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}) \partial^\alpha$$

ein Differentialoperator für $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. L heißt elliptisch zu \mathbf{x} , falls für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$ gilt

$$\sigma_x(L, \xi) := \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\mathbf{x}) \xi^\alpha \neq 0 .$$

Beispiel 1.1 Die Laplace-Gleichung in \mathbb{R}^n ist elliptisch, da

$$\begin{aligned} Lu &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} , \\ \sigma_x(L, \xi) &= \sum_{i=1}^n \xi_i^2 . \end{aligned}$$

Beispiel 1.2 Die biharmonische Gleichung in \mathbb{R}^2 ,

$$Lu = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} ,$$

ist elliptisch, da

$$\begin{aligned} \sigma_x(L, \xi) &= \xi_1^4 + 2\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4 \\ &= (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 . \end{aligned}$$

Beispiel 1.3 Die Minimal-Oberflächengleichung

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0$$

ist elliptisch, da

$$\begin{aligned}\sigma_x(L, \xi) &= (1 + u_y^2)\xi_1^2 - 2u_xu_y\xi_1\xi_2 + (1 + u_x^2)\xi_2^2, \\ &= \xi_1^2 + \xi_2^2 + (\xi_1u_y - \xi_2u_x)^2\end{aligned}$$

Es ist manchmal wichtig, die Elliptizitätsbedingung genauer zu klassifizieren. Für Differentialgleichungen der zweiten Ordnung ist die folgende Klassifikation nützlich:

Definition 1.2 Sei

$$L = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(\mathbf{x}) \partial^\alpha$$

ein Differentialoperator zweiter Ordnung für $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. L heißt gleichmäßig elliptisch auf Ω (*uniformly elliptic*), falls eine Konstante $a > 0$ existiert mit

$$a \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(\mathbf{x}) \xi^\alpha \leq \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \xi_i^2$$

für alle $\mathbf{x} \in \Omega$.

Beispiel 1.4 Die Gleichung

$$xu_{xx} + 2u_x = 0$$

ist nicht gleichmäßig elliptisch auf $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}^1$

1.1.2 Gleichungssysteme

Systeme von Differentialgleichungen treten oft auf. Sie werden allerdings nur selten in der Literatur behandelt. Insbesondere werden Systeme höherer Ordnung kaum in Lehrbüchern behandelt. Einige der wenigen Ausnahmen sind die Bücher von Miranda [1970, S. 275], Courant und Hilbert [1962, S. 577] und Hörmander [1963, S. 267]. Sei

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}) &= (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_N(\mathbf{x}))^T, \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_N(\mathbf{x}))^T\end{aligned}$$

für $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sei \mathcal{M}_{ij} ein Differentialoperator der Ordnung α_{ij} .

Sei

$$s_i \in \mathbb{Z}, \quad t_i \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i \leq N$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &\leq s_i + t_j, \\ \mathcal{M}_{ij} &\equiv 0 \text{ falls } s_i + t_j < 0. \end{aligned}$$

Sei $M_{ij}(\mathbf{x}, \xi)$ das charakteristische Polynom von \mathcal{M}_{ij} und

$$\hat{M}_{ij}(\mathbf{x}, \xi) = \begin{cases} M_{ij}(\mathbf{x}, \xi) & , \text{ falls } \alpha_{ij} = s_i + t_j \\ 0 & , \text{ falls } \alpha_{ij} < s_i + t_j \end{cases}$$

Das System

$$\sum_{j=1}^N \mathcal{M}_{ij}(\mathbf{x}) u_j = f_i, \quad 1 \leq i \leq N$$

heißt *elliptisch im Sinne von Douglis und Nirenberg*, falls es möglich ist, s_i und t_j so zu wählen, daß

$$\hat{a}(\mathbf{x}, \xi) := \det(\hat{M}_{ij}(\mathbf{x}, \xi)) \neq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Sei

$$\begin{aligned} a(\mathbf{x}, \xi) &:= \det(M_{ij}(\mathbf{x}, \xi)), \\ r &= \text{Grad } a, \\ R &= \text{Der maximale Grad der } N! \text{ Terme von } a \\ &\text{bei der Entwicklung mit der Leibniz-Regel} \end{aligned}$$

Es ist von Volevich bewiesen worden (Agmon, Douglis, Nirenberg [1964, S. 39]), daß die folgenden Bedingungen für die Elliptizität notwendig und hinreichend sind:

1. $r = R$,
2. $\tilde{a}(\mathbf{x}, \xi) \neq 0$ für alle $\xi \neq 0$, wo bei \tilde{a} der Hauptteil von a , d.h. der Teil vom Grade r , ist.

Beispiel 1.5

$$\begin{aligned} u_x - v_{yy} &= f_1, \\ u_{yy} + u_y + v_{xxx} + v_{xy} &= f_2 \end{aligned}$$

Man setze

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 1, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2.$$

Es folgt:

$$a = \tilde{a} = \hat{a} = \begin{vmatrix} \xi & -\eta^2 \\ \eta^2 & \xi^3 \end{vmatrix} = \xi^4 + \eta^4, \quad r = 4, \quad R = 4.$$

Beispiel 1.6 [Cauchy-Riemann-Gleichungen]

$$\begin{aligned} u_x - v_y &= 0 \\ u_y + v_x &= 0 \end{aligned}$$

Man setze $s_1 = s_2 = 1, t_1 = t_2 = 0$. Es folgt:

$$\hat{a} = \begin{vmatrix} \xi & -\eta \\ \eta & \xi \end{vmatrix} = \xi^2 + \eta^2.$$

$$\begin{aligned} \tilde{a} = a &= \hat{a}, \\ r = R &= 2. \end{aligned}$$

Beispiel 1.7

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Setze

$$u_1 := u_x, \quad u_2 := u_y.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} - u_1 &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} - u_2 &= 0. \end{aligned}$$

Man setze

$$\begin{aligned} s_0 = 0, \quad s_1 = s_2 &= -1, \\ t_0 = 2, \quad t_1 = t_2 &= 1. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\hat{a}(\xi) = \begin{vmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1 & -1 & 0 \\ \xi_2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \xi_1^2 + \xi_2^2$$

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= a = \hat{a}, \\ r &= R = 2.\end{aligned}$$

In der Theorie von Agmon, Douglis und Nirenberg wird weiter vorausgesetzt:

Bedingung L: $\tilde{a}(x, \xi)$ ist ein Polynom vom Grade $2m$ bezüglich ξ . Sei $\xi, \hat{\xi} \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Das Polynom $q(\tau) := \tilde{a}(x, \xi + \tau\hat{\xi})$ hat genau n Nullstellen τ mit positivem Imaginärteil.

Bemerkung 1.1 Sei das System elliptisch im Sinne von Douglis und Nirenberg und $n > 2$. Dann ist die Bedingung L erfüllt. (Siehe Agmon, Douglis, Nirenberg [1964, S. 39], Miranda [1970, S. 244].)

Bemerkung 1.2 Sei $n = 2$. Es gebe eine Funktion $\gamma(x)$ und ein $\alpha > 0$ mit

$$Re\{\gamma(x)\hat{a}(x, \xi)\} \geq \alpha|\xi|^{2r} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0,$$

wobei $2r$ die Ordnung des Differentialoperators \mathcal{M}_{ij} ist. Dann ist die Bedingung L erfüllt (siehe Miranda [1970, S. 245]).

Literatur

Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L.: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II. Comm. Pure Appl. Math. 17, 35-92(1964).

Douglis, A., Nirenberg, L.: Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 8, 503-538(1955).

Hörmander, L.: Linear Partial Differential Operators. Berlin: Springer, 1963.

Miranda, C.: Partial Differential Equations of Elliptic Type. New York: Springer, 1970.

1.2 Randwertaufgaben

1.2.1 Einführung

Eine partielle Differentialgleichung hat mehrere Lösungen. In den Anwendungen werden Randbedingungen vorgeschrieben, die der Anwendung entsprechen und eine möglichst

eindeutige Lösung bestimmen sollen. Für elliptische Gleichungen und Systeme gilt folgende Faustregel für sachgemäß gestellte Randwertaufgaben:

Auf jedem Punkt des Randes $\partial\Omega$ von Ω sollten m Randbedingungen vorgeschrieben werden, wenn die Ordnung der Gleichung (des Systems) $2m$ ist.

Das folgende Beispiel von Hadamard zeigt, daß - wenn diese Faustregel verletzt wird - das Randwertproblem evtl. schlechtgestellt sein kann:

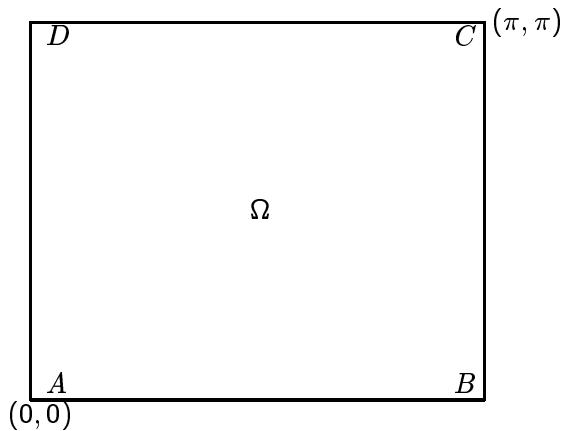


Abbildung 1.1: Das Beispiel von Hadamard

- a) $\Delta u = 0$, $(x, y) \in \Omega$
- b) $u = 0$ auf AD
- c) $u = 0$ auf BC
- d) $u = 0$ auf AB
- e) $u_n = -u_y = -\frac{1}{k^s} \sin kx$ auf AB mit $k, s \in \mathbb{N}$.

Eine Lösung ist:

$$u(x, y) = \frac{1}{k^{s+1}} \cdot \sin kx \cdot \frac{e^{+ky} - e^{-ky}}{2}.$$

Für k groß kann u beliebig groß werden, obwohl alle Randwerte gleichmäßig beschränkt sind.

1.2.2 Der Rand $\partial\Omega$

Der Rand $\partial\Omega$ muß einige Glattheitsbedingungen erfüllen.

Typische Bedingungen sind:

1. Der Rand $\partial\Omega$ ist $C^{k,\alpha}$ mit $\alpha \in [0, 1]$ und $k \in \mathbb{N}_0$, d.h. für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ gibt es eine Kugel $B = B(x_0)$ und ein Homöomorphismus $\Psi : B \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ mit

- (a) $\Psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}_+^n$
- (b) $\Psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}_+^n$
- (c)

$$\begin{aligned}\Psi &\in C^{k,\alpha}(B), \\ \Psi^{-1} &\in C^{k,\alpha}(D),\end{aligned}$$

wo

$$\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}.$$

2. $\partial\Omega$ erfüllt eine gleichgradige innere Kegelbedingung, d.h. es gibt einen Kegel $K \subset \mathbb{R}^n$ mit der Spitze $\mathbf{0}$ und ein $r > 0$, so daß für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ eine Kongruenz Ψ existiert mit

$$x_0 + \Psi(K_r) \subset \Omega$$

wo

$$K_r := \{\mathbf{x} \in K : \|\mathbf{x}\| < r\}.$$

(Siehe Abbildung 1.2.)

3. Ω sei ein Polygongebiet.

1.2.3 Typische Randbedingungen

1. Eine Gleichung zweiter Ordnung

Sei

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(\mathbf{x}) \partial^\alpha u$$

eine elliptische Gleichung zweiter Ordnung. Seien f, f_1, \dots , vorgeschriebene Funktionen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Es gibt drei kanonische Randwertaufgaben.

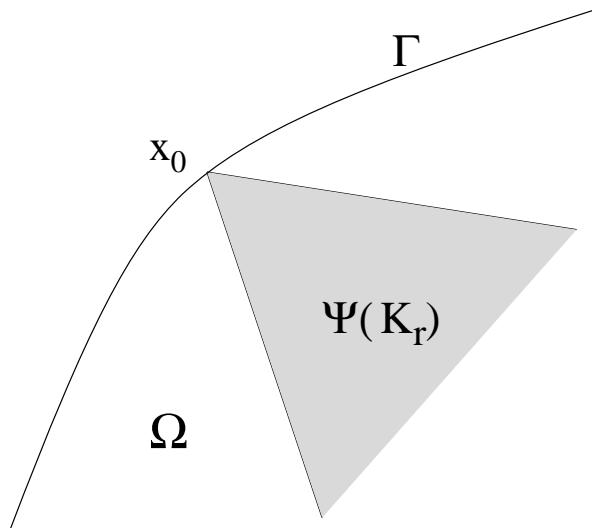


Abbildung 1.2: Die Kegelbedingung

(a) 1. Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} Lu &= f, \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ u &= f_1, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Dieses Problem heißt auch *Dirichlet-Problem*.

(b) 2. Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} Lu &= f, \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ Lu &= \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c, \\ Lu &= f, \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \nu_k \frac{\partial u}{\partial x_i} + f_2 u &= f_3, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

wo $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ der äußere einheitsnormale n-Vektor auf $\partial\Omega$ ist.

Ist $f_2 = 0$, heißt dieses Problem auch *Neumann-Problem*, sonst *Robin-Problem*.

(c) 3. Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} Lu &= f, \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ f_4 \frac{\partial u}{\partial \nu} + f_5 u &= f_6, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dieses Problem heißt auch *gemischte Randwertaufgaben*.

2. Eine Gleichung vierter Ordnung

Die bekannteste Gleichung vierter Ordnung ist die biharmonische Gleichung:

$$Lu = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 .$$

Typische Randbedingungen sind:

(a) Das (verallgemeinerte) Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} Lu &= 0 , \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ u &= f_1 , \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ u_n &= f_2 , \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{aligned}$$

3. Gleichungssysteme

Siehe z.B. Agmon, Douglis, Nirenberg [1964, S. 42].

4. Existenz und Glattheit der Lösungen der Randwertaufgaben

Für eine sachgemäß gestellte Randwertaufgabe für elliptische Gleichungen gilt folgende Faustregel:

Die Lösung u ist so glatt wie die Koeffizienten der Gleichung, die Koeffizienten der Randbedingungen und der Rand es erlauben.

Weiter gilt:

Jede Änderung der Koeffizienten der Gleichung oder der Randbedingungen führt zu einer Änderung der Lösung u in jedem Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$.

1.3 Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von Randwertaufgaben

Die Theorie von Randwertaufgaben benutzt mehrere Methoden, die die numerischen Methoden entweder anregen oder beeinflussen:

- a) Funktionentheorie
- b) Variationsgleichungen
- c) Integralgleichungen

- d) Fixpunktmethoden
- e) Das Maximumprinzip

Bekannte numerische Methoden sind:

- a) Differenzenverfahren
- b) Finite Elemente
- c) Randelementmethoden
- d) Spektralmethoden
- e) Galerkinmethoden

die oft mit

- a) Mehrgittermethoden
- b) Gebietszerlegungsmethoden
- c) Gebietstransformationen
- d) lokale Verfeinerung

kombiniert werden. Wir werden mehrere dieser Methoden und Techniken kennenlernen.

Kapitel 2

Das Maximumprinzip

Für elliptische Gleichungen zweiter Ordnung gilt ein Maximumprinzip, das außerordentlich nützlich ist.

2.1 Die grundlegenden Sätze

Sei

$$Mu := \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} .$$

Wir setzen voraus:

V1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω ein beschränktes Gebiet.

V2. $a_{ik} = a_{ik}(\mathbf{x})$, $b_i = b_i(\mathbf{x})$ seien stetige Funktionen auf Ω .

V3. Es gebe $\alpha > 0$ mit

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(\mathbf{x}) \xi_i \xi_k \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2 , \quad \xi \in \mathbb{R}^n .$$

V4. $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Wir benutzen hier die Beweismethode von Courant und Hilbert, S. 326 ff.

Satz 2.1 :

u habe ein Maximum an der Stelle $P \in \Omega$. Dann gilt:

$$Mu(P) \leq 0 .$$

Beweis: Wenn u ein Maximum an dem inneren Punkt P hat, dann sind alle ersten Ableitungen von u an der Stelle P gleich Null. Folglich:

$$\begin{aligned} Mu(P) &= \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(P) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \\ &= \text{Spur } AB \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} A &= (a_{ik}) \in \text{Mat } (n \times n), \\ B &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} (P) \right) \in \text{Mat } (n \times n). \end{aligned}$$

Es gibt eine orthogonale Matrix S mit

$$SAS^T = \Lambda = \text{Diag } (\lambda_i).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{Spur } (AB) &= \text{Spur } (SAB S^T) \\ &= \text{Spur } (\Lambda SBS^T) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_{ii} \end{aligned}$$

mit

$$\beta_{ii} = (SBS^T)_{ii}.$$

Gebe es i mit $\beta_{ii} > 0$, würde die Bedingung verletzt, daß u in P ein Maximum hat. Um dies einzusehen, setzt man $\xi = \epsilon s$ mit

$$\mathbf{s} := \{s_{ij} : 1 \leq j \leq n\} \in \mathbb{R}^n.$$

Es gilt (Forster, II, Corollar 2, S. 59):

$$\begin{aligned} u(P + \xi) &= u(P) + \langle (\text{grad } u)(P), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi, B\xi \rangle + o(\|\xi\|^2), \\ &= u(P) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \langle \mathbf{s}, Bs \rangle + o(\epsilon^2), \\ &= u(P) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \beta_{ii} + o(\epsilon^2), \end{aligned}$$

so daß P kein lokales Maximum von u ist.

Die Voraussetzung V3 hat zur Folge, daß A positiv definit ist, so daß die Eigenwerte λ_i von A positiv sind.

Es folgt

$$Mu(P) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_{ii} \leq 0 .$$

Lemma 2.1 (Hopf):

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Kugel und $P_0 \in \partial K$. Es gelte:

$$\begin{aligned} Mu &\geq 0 , \quad \mathbf{x} \in K \\ u(\mathbf{x}) &< u(P_0) , \quad \mathbf{x} \in K . \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\frac{du}{dn}\Big|_{p_0} := \liminf \frac{\Delta u}{\Delta n}\Big|_{p_0} > 0 .$$

Beweis: (siehe Abbildung 2.1)

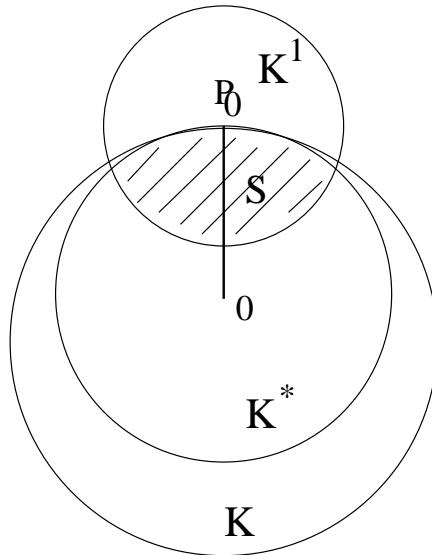


Abbildung 2.1: Hilfskonstruktion für den Beweis des Maximumsprinzips

Sei K^* eine kleinere Kugel, $K^* \subset K$ mit $P_0 \in \partial K^*$. Dann gilt:

$$\max_{K^*} u = u(P_0) .$$

Wähle den Ursprung O als Mittelpunkt von K^* und setze

$$r^2 := \sum_{i=1}^n x_i^2 .$$

Sei $r_0 = |P_0 - O|$. Sei K_1 eine Kugel mit Radius $r_1 < r_0$ und Mittelpunkt P_0 . Setze

$$\begin{aligned} S &= K_1 \cap K^* , \\ \partial S &= R_1 \cup R_2 , \\ h(\mathbf{x}) &:= e^{-\beta r^2} - e^{-\beta r_0^2} , \quad \beta > 0 . \end{aligned}$$

Es gilt:

1. $h > 0 , \quad \mathbf{x} \in K^*$
2. $h = 0 , \quad \mathbf{x} \in \partial K^*$
- 3.

$$\begin{aligned} Mh &= e^{-\beta r^2} \cdot \left[4\beta^2 \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k - 2\beta \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_i x_i) \right] \\ &\geq e^{-\beta r^2} \left[4\beta^2 \alpha r^2 - 2\beta \sum_{i=1}^n a_{ii} - 2\beta r \sum_{i=1}^n b_i \right] \end{aligned}$$

Wähle $\beta > 0$ so, daß $Mh > 0 , \quad \mathbf{x} \in \bar{S}$.

Sei $\epsilon > 0$ und $v := u + \epsilon h$.

Auf R_1 ist $u < u(P_0)$ und h beschränkt. Folglich gilt für genügend kleines ϵ :

$$v(\mathbf{x}) < u(P_0) , \quad \mathbf{x} \in R_1 .$$

Jetzt betrachten wir die Funktion v auf \bar{S} . Es gilt:

$$Mv = Mu + \epsilon Mh > 0 , \quad \mathbf{x} \in S .$$

Es folgt aus Satz 3.1

$$\max_{\bar{S}} v = \max_{\partial S} v .$$

Aber

$$\begin{aligned}
v(\mathbf{x}) < u(P_0) &= v(P_0), \quad \mathbf{x} \in R_1 \\
v(\mathbf{x}) &= u(\mathbf{x}) + \epsilon h(\mathbf{x}) \\
&= u(\mathbf{x}) \\
&< u(P_0), \quad \text{für } \mathbf{x} \in R_2 \setminus P_0.
\end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$\max_S v = \max_{\partial S} v = v(P_0) = u(P_0).$$

Es folgt:

$$\frac{dv}{dn}(P_0) = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{v(P_0) - v(P)}{\Delta n} \geq 0.$$

Da

$$\frac{dh}{dn}(P_0) = -2\beta r_0 e^{-\beta r_0^2} < 0,$$

folgt

$$\frac{du}{dn}(P_0) = \frac{dv}{dn}(P_0) - \epsilon \frac{dh}{dn}(P_0) > 0.$$

Satz 2.2 (Starkes Maximumprinzip):

Sei

$$Mu \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Es gebe $P \in \Omega$ mit

$$\max_{\bar{\Omega}} u = u(P).$$

Dann ist $u(\mathbf{x}) \equiv u(P)$, d.h. u ist konstant.

Beweis: Sei $Mu \geq 0$ in Ω . Falls u nicht konstant ist und es einen Punkt $P \in \Omega$ gibt mit

$$M := \max_{\bar{\Omega}} u = u(P),$$

dann gibt es eine offene Kugel K und einen Punkt P_0 mit

1. $\bar{K} \subset \Omega$
2. $u(\mathbf{x}) < u(P)$, $\mathbf{x} \in K$
3. $P_0 \in \partial K$ mit $u(P_0) = u(P)$

Um dies einzusehen, sind folgende Überlegungen nötig:

1. Je zwei Punkte in einem zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ können mit einem Polygonzug $\Gamma \subset \Omega$ verbunden werden (Hocking und Young, Satz 3-5, S. 108).
2. Sei $P_1 \in \Omega$, $u(P_1) < M$. Sei $\Gamma \subset \Omega$ ein Polygonzug, der P und P_1 verbindet.
3. Es gilt:

$$d(\Gamma, \partial\Omega) = \rho > 0 .$$

4. Es gibt einen Punkt $P_2 \in \Gamma$ mit

$$\begin{aligned} d(P_2, \partial\Omega) &> d(P_2, \Omega_M) , \\ \Omega_M &:= \{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) = M\} . \end{aligned}$$

5. Es gibt eine Kugel \tilde{K} mit Mittelpunkt P_2 und Punkt $P_0 \in \partial\tilde{K}$, die die gewünschten Eigenschaften besitzen.

Da u ein Maximum in P_0 hat, ist $\text{grad } u = 0$, was der Tatsache widerspricht, daß aus dem Hopfschen Lemma

$$\frac{du}{dn}(P_0) > 0 .$$

2.2 Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise

Satz 2.3 :

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Sei M der gleichmäßig elliptische Differentialoperator

$$M = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} .$$

Dann hat das Dirichletsche Randwertproblem:

$$\begin{aligned} u &\in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) , \\ Mu &= f , \quad \mathbf{x} \in \Omega , \\ u &= g , \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{aligned}$$

höchstens eine Lösung u .

Beweis: Anwendung des Maximumprinzips.

Es ist möglich, einen einfachen Existenzsatz für elliptische Gleichungen mit Hilfe des Maximumprinzips zu geben. Dies benutzt die Perronsche Methode von subharmonischen Funktionen. Wir verzichten auf den Beweis (siehe z.B. Gilbarg und Trudinger [1977, S. 23]). Für die Laplace Gleichung erhält man z.B.:

Satz 2.4 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, das die äußere Kugelbedingung erfüllt: Für jedes $x \in \partial\Omega$ gibt es eine Kugel $K_R(y)$ mit:*

1. $K_R(y) = \{x : |x - y| < R\}$,
2. $\overline{K}_R(y) \cap \overline{\Omega} = \{x\}$.

Dann gibt es für jedes $g \in C(\partial\Omega)$ eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit

1. $u = g$ auf $\partial\Omega$
2. $\Delta u = 0$ in Ω .

Kürzlich sind diese Ideen erneut aufgenommen worden. Die sogenannten *viskosen Lösungen* (“viscous solutions”) ermöglichen es, Existenz- und Eindeutigkeitssätze für viele nichtlineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu beweisen. Siehe Crandall, Ishii, Lions [1992].

Literatur:

Courant, R. und Hilbert, D.: Methods of Mathematical Physics II. Partial Differential Equations. New York: Interscience, 1962.

Crandall, M.G., Ishii, H. und Lions, P.-L.: Users guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. (New Series) 27 (1-67) 1992.

Gilbarg, D. und Trudinger, N.S.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer, 1977.

Hocking, J.G. und Young, G.S.: Topology. Reading MA, Addison-Wesley, 1961.

Protter, M.H. und Weinberger, H.F.: Maximum Principles in Differential Equations. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1967.

Kapitel 3

Finite Differenzen

3.1 Einleitung

Das Differenzenverfahren oder die Methode der finiten Differenzen wird seit 1908 zur Lösung von Randwertaufgaben für partielle Differentialgleichungen benutzt. Sie verliert an Wichtigkeit im Vergleich zu neueren Methoden, wie Finiten Elementen, ist aber noch immer sehr nützlich. Viele Ideen werden von Differenzenverfahren auf die neueren Methoden übertragen.

Bahnbrechende Arbeiten wurden von Runge [1908], Richardson [1910] und Courant, Friedrichs und Lewy [1928] geleistet. Bekannte Standardwerke sind Forsythe und Wasow [1960], Collatz [1955]. Siehe auch Strikwerda [1989].

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit Rand $\Gamma = \partial\Omega$, seien A und B Differentialoperatoren. Eine allgemeine Randwertaufgabe für eine elliptische Differentialgleichung hat die Form: Bestimme u , so daß

$$Au = f, \quad x \in \Omega, \tag{3.1}$$

$$Bu = g, \quad x \in \Gamma. \tag{3.2}$$

Es ist zuerst nötig, einige Ergänzungen zu machen:

- Wichtig ist, die Voraussetzungen für die Lösung u anzugeben. Es wird meistens vorausgesetzt, daß u in einem vorgeschriebenen Banachraum V liegt. Ebenfalls gilt: $f \in F$.
- Der Operator A muß als eine Abbildung zwischen den Banachräumen V und F definiert werden:

$$A : V \longrightarrow F.$$

- c) Der Operator B und das Element g müssen auch sinnvoll definiert werden.
- d) Die Randbedingungen werden oft als Teil der Definition von V betrachtet. Macht man dies, so muß nur die Gleichung

$$Au = f \quad (3.3)$$

gelöst werden.

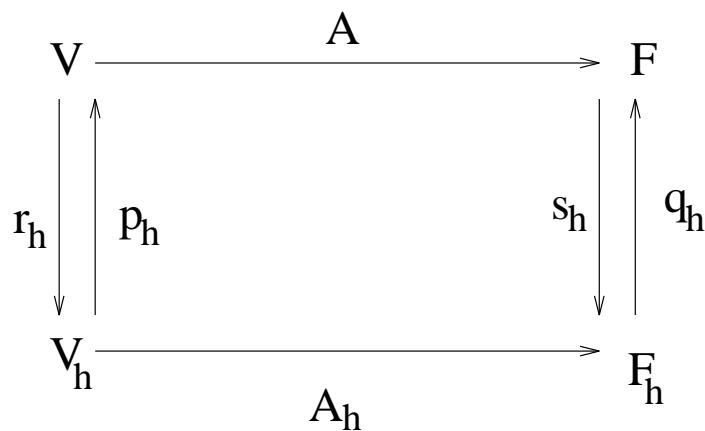


Abbildung 3.1: Interne Approximation

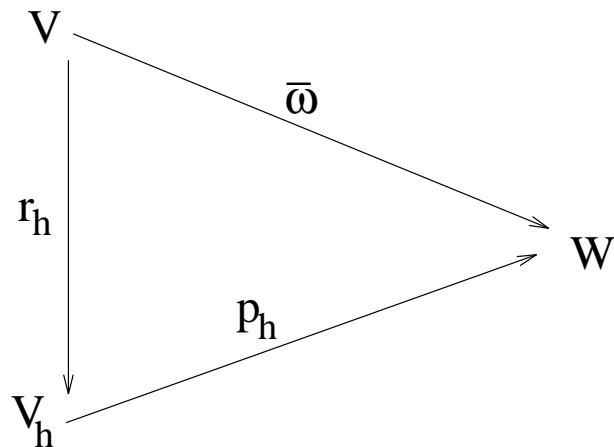


Abbildung 3.2: Externe Approximation

Die Gleichung $Au = f$ wird durch eine Gleichung

$$A_h u_h = f_h \quad (3.4)$$

approximiert, wobei

$$\begin{aligned} A_h : V_h &\longrightarrow F_h , \\ f_h \in F_h \end{aligned} \tag{3.5}$$

und V_h und F_h geeignete endlich dimensionale Banachräume sind.

Die Lösung der Gleichung

$$A_h u_h = f_h$$

erfordert üblicherweise die Lösung eines Systems linearer oder nichtlinearer algebraischer Gleichungen. Danach muß der Fehler zwischen u und u_h abgeschätzt werden. Es gibt drei Möglichkeiten:

1. u und $p_h u_h$ in V zu vergleichen (interne Approximation, Abbildung 3.1),
2. $\bar{w}u$ und $p_h u_h$ in einem anderen Raum W zu vergleichen (externe Approximation, Abbildung 3.2),
3. $r_h u$ und u_h in V_h zu vergleichen.

Die Beschreibungen ‘‘intern’’ und ‘‘extern’’ deuten an, daß die Approximation $p_h u_h$ innerhalb bzw. außerhalb des Lösungsraums V liegt.

Wichtig für jede Fehlerabschätzung sind zwei Begriffe:

Eine Approximation $A_h u_h$ von Au heißt *konsistent*, falls

$$\|A_h r_h u - s_h Au\|_{F_h} \longrightarrow 0 \quad \text{für } h \longrightarrow 0 . \tag{3.6}$$

Eine Approximation A_h von A heißt *stabil*, falls eine Konstante $S > 0$ existiert mit

$$\|v_h\|_{V_h} \leq S \|A_h v_h\|_{F_h} , \quad \text{für alle } v_h \in V_h . \tag{3.7}$$

Die folgenden Fragen werden anschließend behandelt:

1. Wie werden die Abbildungen A_h konstruiert?
2. Existiert eine Lösung u_h der Gleichung $A_h u_h = f_h$?
3. Ist die Lösung u_h eindeutig?
4. Wie verhält sich der Fehler $u_h - r_h u$?

3.2 Ein Modellproblem: das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung

Wir betrachten das folgende Problem:

$$\Delta u = f, \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.8)$$

$$u = g, \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (3.9)$$

wo Ω das Einheitsquadrat ist,

$$\Omega := \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

Dieses Problem heißt Dirichlet-Problem (wegen der Randbedingung (3.9)) für die Poisson-Gleichung (3.8), siehe Abbildung 3.3.

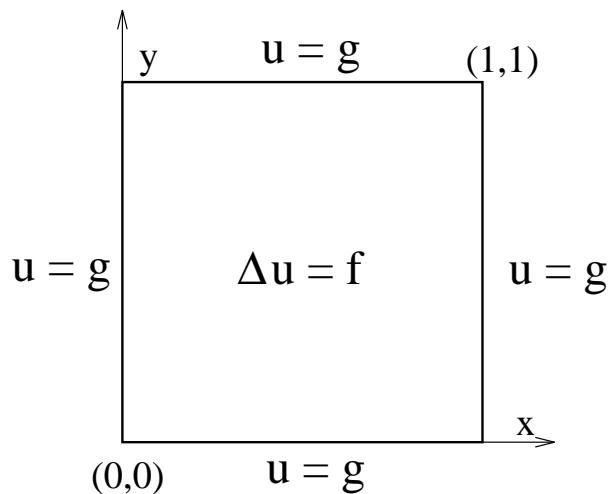


Abbildung 3.3: Das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung

Es wird eine Maschenweite $h = 1/M$ gewählt. Das Gebiet Ω wird mit einem quadratischen Gitter überzogen (siehe Abbildung 3.4).

Die Gitterpunkte sind die Punkte:

$$(x_i, y_j), \quad 0 \leq i \leq M, \quad 0 \leq j \leq M, \quad (3.10)$$

wobei

$$x_i = ih \quad (3.11)$$

$$y_j = jh$$

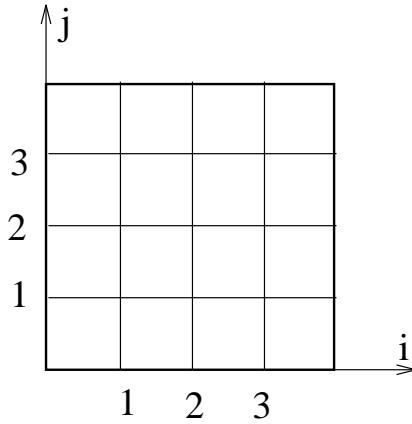


Abbildung 3.4: Das Gitter für $h = 1/4$

Da die Randbedingungen Dirichlet-Bedingungen sind, ist es nur nötig, die Werte von u_h im Innern des Quadrats zu bestimmen, und wir definieren:

$$\Omega_h := \{(x_i, y_j) : 1 \leq i, j \leq M - 1\} \quad (3.12)$$

$$\Gamma_h := \{(x_i, y_j) : i \in \{0, M\} \text{ oder } j \in \{0, M\}\}$$

Falls $u \in C^4(\bar{\Omega})$ und $(x, y) \in \Omega_h$ folgt:

$$\begin{aligned} \Delta_h u(x, y) &:= [u(x + h, y) + u(x - h, y) - 2u(x, y)] + \\ &\quad [u(x, y + h) + u(x, y - h) - 2u(x, y)] \\ &= h^2 \Delta u + \frac{h^4}{12} [u_{xxxx}(\xi, y) + u_{yyyy}(x, \eta)], \end{aligned}$$

mit

$$\xi \in (x - h, x + h), \quad \eta \in (y - h, y + h). \quad (3.13)$$

Somit erhält man als Approximation zu den Gleichungen (3.8), (3.9):

$$\Delta_h u_h(x_i, y_j) = f(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \Omega_h \quad (3.14)$$

$$u_h(x_i, y_j) = g(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \Gamma_h \quad (3.15)$$

Für dieses Modellproblem gilt:

$$\begin{aligned} V &= C^4(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \\ F &= C^2(\Omega) \\ Au &= \Delta u \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
 (A_h u_h)(x_i, y_j) &:= \Delta_h u_h(x_i, y_j) \\
 V_h &:= \prod_{k=1}^N \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^N \\
 N &:= (M-1)^2
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$F_h := \mathbb{R}^N$$

$$r_h : C(\Omega) \longrightarrow F_h$$

$$(r_h u)(x_i, y_j) := u(x_i, y_j).$$

(r_h heißt Injektionsoperator.)

Der Differenzenoperator Δ_h lässt sich wie in Abbildung 3.5 darstellen und heißt deshalb das Fünfpunkt-Stern oder Fünfpunkt-Molekül.

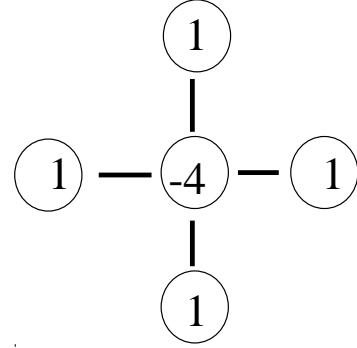


Abbildung 3.5: Das Fünfpunkt-Molekül

A_h ist die $(M-1)^2 \times (M-1)^2$ -Blocktridiagonal-Matrix:

$$A_h := \begin{pmatrix} J & I & & \\ I & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & I \\ & & I & J \end{pmatrix}$$

$$I = I_{M-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = J_{M-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

3.3 Differenzenoperatoren

Es gibt ein Kalkül für Differenzenoperatoren, das oft nützlich ist bei der Erstellung von Differenzengleichungen.

Sei $f \in C^\infty(-\infty, +\infty)$ und $h \in \mathbb{R}$. Wir führen folgende Operatoren ein:

Ef	$=$	$f(x + h)$	Verschiebungsoperator
$\Delta f(x)$	$=$	$f(x + h) - f(x)$	Vorwärtsdifferenzenoperator
$\nabla f(x)$	$=$	$f(x) - f(x - h)$	Rückwärtsdifferenzenoperator
$Df(x)$	$=$	$f'(x)$	Differentiationsoperator
$\delta f(x)$	$=$	$f\left(x + \frac{1}{2}h\right) - f\left(x - \frac{1}{2}h\right)$	Zentraler Differenzenoperator
$\mu f(x)$	$=$	$\frac{1}{2} [f\left(x + \frac{1}{2}h\right) + f\left(x - \frac{1}{2}h\right)]$	Mittelwertoperator

Die Operatoren sind linear, assoziativ und kommutativ. Sie bilden einen Ring. Es folgt, daß der binomische Satz gilt:

$$(P + Q)^n = \sum_{k=0}^n P^k Q^{n-k} \binom{n}{k} .$$

Aus der Taylor-Reihe

$$Ef(x) = f(x + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} D^k f(x)$$

folgt:

$$E = e^{hD} . \quad (3.18)$$

Also ist

$$e^{hD} = 1 + \Delta . \quad (3.19)$$

Logarithmiert man diese Gleichung, so erhält man:

$$\begin{aligned} hD &= \ln(1 + \Delta) \\ &= \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} \dots \end{aligned} \quad (3.20)$$

Man kann diese Gleichungen folgendermaßen beweisen:

Sei $f(x) = e^{ax}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \Delta^k f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} (e^{ah} - 1)^k f(x).$$

Für $|e^{ah} - 1| < 1$ folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \Delta^k f(x) = \ln(1 + (e^{ah} - 1))f(x) = ah e^{ax} = hDf(x).$$

Also gilt:

$$\ln(1 + \Delta)f(x) = hDf(x) \quad (*)$$

für $f(x) = e^{ax}$ und $|e^{ah} - 1| < 1$.

Nun setzt man

$$e^{ax} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(ax)^\ell}{\ell!}$$

ein, entwickelt die beiden Seiten von (*) nach Potenzen von a und vergleicht die Koeffizienten von $\frac{a^\ell}{\ell!}$. Es folgt:

$$hDx^\ell = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{(-1)^k}{k} \Delta^k x^\ell,$$

d.h. (3.20) gilt für alle Polynome.

Weitere Formeln sind:

$$\begin{aligned} \delta &= 2 \sinh\left(\frac{1}{2}hD\right) \\ hD &= 2 \sinh^{-1}\left(\frac{\delta}{2}\right) \\ &= 2 \left[\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \left(\frac{\delta}{2}\right)^5 \frac{1}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{\delta}{2}\right)^7 \frac{1}{7} \dots \right] \\ &= \delta - \frac{\delta^3}{24} + \frac{3\delta^5}{640} - \frac{5\delta^7}{7168} \dots \\ (hD)^2 &= \delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \frac{\delta^8}{560} \dots \\ \mu \left(1 + \frac{1}{4}\delta^2\right)^{-1/2} &= 1 \\ hD &= \mu\delta - \mu\frac{\delta^3}{6} + \mu\frac{\delta^5}{30} \dots \end{aligned}$$

Diese Formeln werden in Björck und Dahlquist [1979, §7.6] und Nörlund [1954] bewiesen. Man kann diese Formeln natürlich auch als Hilfsmittel betrachten, die es ermöglichen, Differenzenapproximationen schnell herzuleiten, wobei die Richtigkeit nachher mit Hilfe von Taylor-Reihenentwicklungen bestätigt werden muß.

Beispiel 3.1 a)

$$\begin{aligned} u_x = Du &= \frac{1}{h} \ell n(1 + \Delta)u \\ &= \frac{1}{h} \left[\Delta u - \frac{\Delta^2 u}{2} \dots \right] \\ \Rightarrow u_x(x) &\doteq \frac{1}{h} \Delta u(x) \\ &= \frac{1}{h} [u(x+h) - u(x)] . \end{aligned}$$

b) $u_x(x) \doteq \frac{1}{h} \nabla u(x) = \frac{1}{h} [u(x) - u(x-h)] .$

c)

$$\begin{aligned} u_x(x) &= \frac{2}{h} \sinh^{-1}(\delta/2) u(x) \\ &= \frac{2}{h} \sinh^{-1}(\delta/2) \left(1 + \frac{1}{4}\delta^2\right)^{-1/2} \mu u(x) \\ &\doteq \frac{2}{h} \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \mu u(x) \\ &= \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} . \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{4}{h^2} \left(\sinh^{-1} \delta/2 \right)^2 u \\ &= \frac{4}{h^2} \left(\frac{\delta}{2} - \frac{\delta^3}{48} \dots \right)^2 u \\ &= \frac{4}{h^2} \frac{\delta^2}{4} \left(1 - \frac{\delta^2}{24} \dots \right)^2 u \\ &= \frac{\delta^2}{h^2} \left(1 - \frac{\delta^2}{12} \dots \right) u . \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß die Differentialgleichung

$$u''(x) = f(x)$$

durch

$$\frac{1}{h^2} \left(\delta^2 - \frac{1}{12} \delta^4 \right) u_i = f_i$$

oder

$$\frac{1}{h^2} \left(-\frac{1}{12} u_{i-2} + \frac{4}{3} u_{i-1} - \frac{5}{2} u_i + \frac{4}{3} u_{i+1} - \frac{1}{12} u_{i+2} \right) = f_i$$

approximiert werden kann. Diese Approximation ist zwar genauer als die Standardapproximation, hat aber mehrere Nachteile: Verlust der Positivität; 5-Diagonalmatrizen; usw.

Im allgemeinen besteht das Differenzenverfahren daraus, daß alle partiellen Ableitungen in einer partiellen Differentialgleichung durch Differenzen ersetzt werden. Es gibt oft mehrere Möglichkeiten, unter denen eine Auswahl getroffen werden muß.

3.4 Finite Differenzen: Fortsetzung

Das Differenzenverfahren für das Problem

$$Au = f, \text{ in } \Omega \quad (3.21)$$

$$Bu = g, \text{ auf } \partial\Omega$$

besteht aus den folgenden Schritten:

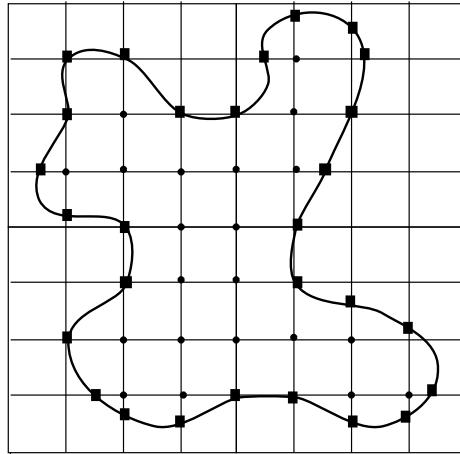
- a) \mathbb{R}^n wird mit einem regelmäßigen Gitter G_h überzogen. $\Omega_h := G_h \cap \Omega$ heißt die Menge der *inneren Gitterpunkte*. Am Rand werden weitere Punkte ausgewählt, die meistens die Schnittpunkte von Gitterlinien und $\partial\Omega$ sind. Die Menge dieser Punkte sind die *Randgitterpunkte*. Sie wird mit Γ_h bezeichnet. Siehe Abbildung 3.6.

Der Raum von Gitterfunktionen

$$V_h := C^0(\Omega_h \cup \Gamma_h, \mathbb{R})$$

ist die Menge aller reellen Funktionen, die auf $\Omega_h \cup \Gamma_h$ definiert sind. Die Bezeichnung C^0 deutet an, daß die Funktionen stetig sind, was in diesem Fall keine Einschränkung ist, da $\Omega_h \cup \Gamma_h$ eine diskrete Menge ist.

- b) Sei $N = N_h$ die Dimension von V_h ,



- innere Gitterpunkte Ω_h
- Randgitterpunkte Γ_h

Abbildung 3.6: Die Gitterpunktmengen

$$N_h = |\Omega_h| + |\Gamma_h| .$$

Ein System von N_h Gleichungen,

$$\begin{aligned} A_h(v_h) &= f_h \\ A_h &: V_h \longrightarrow F_h \\ f_h &:= sf \in F_h \end{aligned} \tag{3.22}$$

wird so konstruiert, daß die Restriktion von u auf Ω_h

$$u_h := r_h u \tag{3.23}$$

das System (3.22) mit geringem Fehler erfüllt:

$$A_h(u_h) - f_h = O(h^m) . \tag{3.24}$$

Das Gleichungssystem (3.22) wird so konstruiert, daß jedem Gitterpunkt $P \in \Omega_h \cup \Gamma_h$ eine Gleichung $A_h^P(v_h) = f_h(P)$ zugeordnet wird:

1. Für $P \in \Omega_h$ entsteht diese Gleichung dadurch, daß in der Gleichung

$$(Au)(P) = f(P)$$

die partiellen Ableitungen durch Differenzen ersetzt werden.

2. Für $P \in \Gamma_h$ werden auch partielle Ableitungen durch Differenzen approximiert, wobei allerdings sehr viele Möglichkeiten berücksichtigt werden müssen.

3.4.1 Beispiel 1: Das Neumann Problem

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g, \text{ auf } \Gamma\end{aligned}\tag{3.25}$$

Sei $u \in C^2(\overline{G})$ und Γ glatt. Es folgt aus dem Gaußschen Integralsatz, daß

$$0 = \int_{\Omega} \operatorname{div} \operatorname{grad} u \, dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = \int_{\Gamma} g \, ds.$$

Das Problem (3.25) ist deshalb nur sinnvoll, wenn g die folgende Bedingung erfüllt:

$$\int_{\Gamma} g \, ds = 0.\tag{3.26}$$

Wird diese Bedingung erfüllt und erfüllt u die Gleichung (3.25), dann ist $v := u + \text{const.}$ auch eine Lösung von (3.25).

Wir betrachten jetzt das Neumann Problem (3.25) für das Rechteck $\Omega = (0, 1)^2$ mit $h = 1/2$ (Abbildung 3.7).

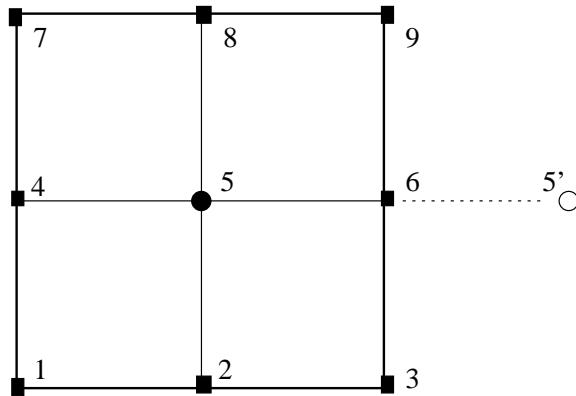


Abbildung 3.7: Das Neumann Problem auf einem Rechteck

Für den Randgitterpunkt P_6 gelten folgende Überlegungen: Wäre P_6 ein innerer Punkt mit Nachbarn P_3, P_5, P'_5 und P_9 (siehe Abbildung 3.7), dann würde gelten:

$$u_5 + u_{5'} + u_9 + u_3 - 4u_6 \doteq \Delta u(P_6) = 0.$$

Die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = g_6$ kann durch die Gleichung

$$\frac{u'_5 - u_5}{2h} = g_6$$

approximiert werden. Elimination von u_5 führt zu der Gleichung

$$2u_5 + u_9 + u_3 - 4u_6 = -2hg_6 ,$$

die selbstverständlich auch durch eine Taylorreihenentwicklung überprüft werden kann.

Entsprechende Überlegungen bei den übrigen Randgitterpunkten liefert folgendes Gleichungssystem:

$$A_h v_h = f_h$$

mit

$$v_h = (v_1, \dots, v_9)^T$$

$$A_h = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -4 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -4 \end{array} \right)$$

$$f_h = -2h \left(g_1^{(x)} + g_1^{(y)}, g_2, g_3^{(x)} + g_3^{(y)}, g_4, 0, g_6, g_7^{(x)} + g_7^{(y)}, g_8, g_9^{(x)} + g_9^{(y)} \right)^T ,$$

wobei die Terme $g_1^{(x)} + g_1^{(y)}$ dadurch entstehen, daß an Eckpunkten zwei äußere Normale existieren.

Die Matrix A_h ist, wie zu erwarten, singulär: die Zeilensummen sind null.

Dieses Beispiel zeigt, wie leicht es ist, Differenzengleichungen für Probleme zu erstellen, für die Existenzsätze nicht sofort vorhanden sind.

3.4.2 Beispiel 2: Nichtquadratische Gitter

Es ist oft zweckmäßig, nichtquadratische Gitter zu benutzen:

- Sei $\Omega = [0, a] \times [0, b]$, wobei a/b eine irrationale Zahl sei. Dann gibt es keine Maschenweite h mit

$$a = mh, \quad b = nh, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

- Sei $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 0$, φ monoton fallend.

Das Gebiet Ω

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \varphi(x)\}$$

wird in Abbildung 3.8 gezeigt.

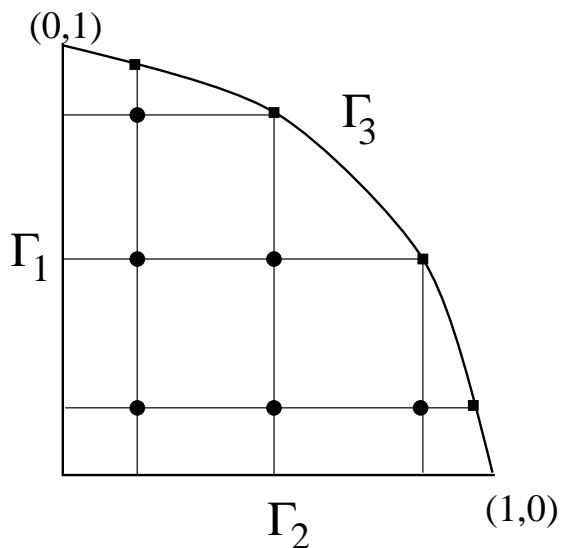


Abbildung 3.8: Ein nichtquadratisches Gitter

Es werden zuerst die Randgitterpunkte auf Γ_3 gewählt (siehe Abbildung 3.8), dann ergibt sich ein geeignetes Gitter.

In einem allgemeinen Gitterpunkt (x_i, y_j) erhält man z.B. mit der Schreibweise von Abbildung 3.9:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \left[\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{s_1} - \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{s_3} \right] \frac{2}{s_1 + s_3} &= u_{xx}(x_i, y_j) - R_{ij}, \\ R_{ij} &= \frac{(s_3 - s_1)h}{3} u_{xxx}(x_i, y_j) - \frac{s_3^2 - s_3 s_1 + s_1^2}{12} h^2 u_{xxxx}(\xi, y_j), \\ x_j - s_3 h < \xi &< x_j + s_1 h. \end{aligned}$$

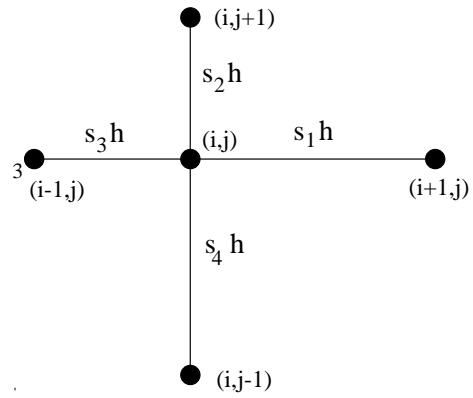


Abbildung 3.9: Ein allgemeiner Gitterpunkt

Falls

$$\begin{aligned}
 |s_k| &\leq 1 \quad , \quad 1 \leq k \leq 4 \ , \\
 M_3 &:= \sup_{\Omega} |u_{xxx}| \\
 M_4 &:= \sup_{\Omega} |u_{xxxx}| \quad \text{gilt} \\
 |R_{ij}| &\leq \frac{1}{3}hM_3 + \frac{1}{12}h^2M_4
 \end{aligned}$$

Siehe z.B. Forsythe und Wasow [1960, S. 188].

3.4.3 Beispiel 3: Neumann Bedingungen auf gekrümmten Rändern

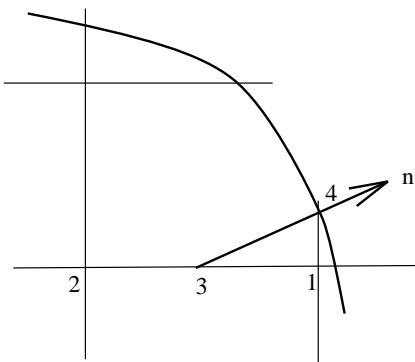


Abbildung 3.10: Approximation von Neumann Bedingungen

Die Normalableitung am Punkt P_4 in Abbildung 3.10 kann folgendermaßen approximiert werden:

$$\frac{\partial u}{\partial n} (P_4) \doteq \frac{u_4 - \tilde{u}_3}{|P_4 - P_3|},$$

wobei

$$\tilde{u}_3 = \frac{u_1 \cdot |P_3 - P_2| + u_2 |P_1 - P_3|}{|P_1 - P_2|}.$$

3.4.4 Beispiel 4:

Die Minimaloberflächengleichung

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0$$

kann folgendermaßen auf einem quadratischen Gitter (Abbildung 3.11) approximiert werden:

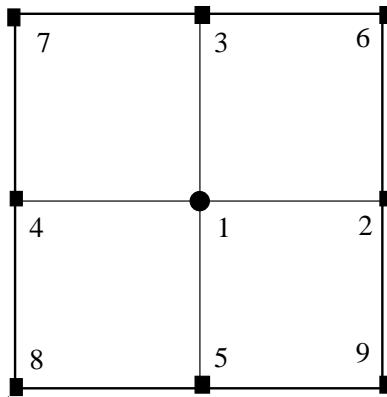


Abbildung 3.11: Nachbarpunkte für die Minimaloberflächengleichung

$$\begin{aligned} u_x &\doteq (u_2 - u_4)/2h \\ u_y &\doteq (u_3 - u_5)/2h \\ u_{xx} &= (u_2 + u_4 - 2u_1)/h^2 \\ u_{yy} &= (u_3 + u_5 - 2u_1)/h^2 \\ u_{xy} &= (u_6 + u_8 - u_7 - u_9)/4h^2. \end{aligned}$$

3.5 Das Maximumprinzip für Differenzengleichungen

Das Maximumprinzip für elliptische partielle Differentialgleichungen lässt sich auf Differenzengleichungen übertragen.

Sei G_h ein Gitter und $S \subset G_h$. Ein linearer Differenzenoperator ℓ , z.B. Δ_h , kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$(\ell u)(P) = \sum_{Q \in S} A(P, Q)u(Q) . \quad (3.27)$$

Man sagt, der Differenzenoperator ℓ sei nichtnegativ an der Stelle $P \in S$, falls

$$(\ell u)(P) = \sum_{Q \in S} A(P, Q)u(Q) , \quad (3.28)$$

$$A(P, P) < 0 , \quad A(P, Q) \geq 0 \quad \text{für } P \neq Q , \quad (3.29)$$

und

$$\sum_{Q \neq P} |A(P, Q)| \leq |A(P, P)| . \quad (3.30)$$

Man setzt

$$\begin{aligned} (\ell u)(P) &= \sum_{Q \in S} B(P, Q)u(Q) + f(P)u(P) \\ &= (mu)(P) + f(P)u(P) \end{aligned} \quad (3.31)$$

mit

$$\sum_{Q \in S} B(P, Q) = 0 . \quad (3.32)$$

In diesem Absatz wird stets angenommen, daß m nichtnegativ ist, d.h.

$$B(P, P) < 0 , \quad (3.33)$$

$$B(P, Q) \geq 0 , \quad Q \neq P , \quad (3.34)$$

$$\sum_{Q \neq P} B(P, Q) = -B(P, P) . \quad (3.35)$$

Die Menge der Nachbarn von $P \in G_h$ bzgl. ℓ wird durch

$$\mathcal{N}(P) := \{Q \in G_h : A(P, Q) \neq 0 , \quad Q \neq P\} \quad (3.36)$$

bezeichnet.

Ist R eine Teilmenge von S , wird ∂R , der Rand von R bzgl. ℓ , erklärt durch

$$\begin{aligned}\partial R &:= \{Q \in S - R : A(P, Q) \neq 0 \text{ für mindestens einen Punkt } P \in R\} \\ \overline{R} &:= R \cup \partial R.\end{aligned}\tag{3.37}$$

Eine Menge $R \subset G_h$ heißt *zusammenhängend* bzgl. ℓ , falls es für jedes Paar $P, Q \in R$ eine endliche Folge P_1, \dots, P_r gibt mit:

$$\begin{aligned}P_1 &= P \\ P_r &= Q \\ A(P_j, P_{j+1}) &\neq 0, \quad 1 \leq j \leq r-1.\end{aligned}\tag{3.38}$$

Sei $H = H(S)$ die Menge aller Gitterfunktionen auf S .

Es gilt

$$\begin{aligned}(mv)(P) &= \sum_{Q \in S} B(P, Q)v(Q) \\ &= \sum_{Q \neq P} B(P, Q)[v(Q) - v(P)] + v(P) \sum_{Q \in S} B(P, Q) \\ &= \sum_{Q \neq P} B(P, Q)[v(Q) - v(P)]\end{aligned}\tag{3.39}$$

Man sagt, daß $v \in H$ ein lokales Maximum/Minimum bzgl. ℓ an der Stelle P hat, falls

$$\begin{aligned}v(Q) &\leq v(P) \quad \text{für } Q \in \mathcal{N}(P) \\ &\text{bzw.} \\ v(Q) &\geq v(P) \quad \text{für } Q \in \mathcal{N}(P).\end{aligned}\tag{3.40}$$

Lemma 3.1 $v \in H$ habe ein lokales Maximum an der Stelle P . Dann gilt $(mv)(P) \leq 0$.

Beweis:

$$\begin{aligned}(mv)(P) &= \sum_{Q \neq P} B(P, Q)[v(Q) - v(P)] \\ &\leq 0\end{aligned}$$

wegen (3.40) und (3.39).

Satz 3.1 (Das Maximumprinzip) Sei R eine zusammenhängende Teilmenge von S .

1. Falls $mv \geq 0$ in R und v ein Maximum auf \overline{R} in einem Punkt $P \in R$ annimmt, dann ist v konstant auf \overline{R} .
2. Sei $f \leq 0$ und $\ell v \geq 0$ in R , v nehme sein Maximum auf \overline{R} in einem inneren Punkt an, und dieses Maximum sei positiv. Dann ist v konstant auf \overline{R} .
3. Sei $f \leq 0$ und $\ell v \geq 0$ in R und $\partial R \neq \emptyset$. Dann gilt

$$v \leq \max\{0, \max_{\partial R} v\}$$

4. Sei $mv \geq 0$ in R und das Maximum von v auf \overline{R} in einem Punkt $P_0 \in \partial R$ erreicht. Dann ist entweder $v \equiv$ konstant oder $v(P_0) - v(P) > 0$ für $P \in R$.
5. Sei $f \leq 0$ und $\ell v \geq 0$ in R und sei das Maximum von v auf \overline{R} in einem Punkt $P_0 \in \partial R$ erreicht. Ist das Maximum positiv, dann ist entweder $v \equiv$ konstant oder $v(P_0) - v(P) > 0$ für $P \in R$.

Beweis von 1:

Sei $P \in R$ mit

$$v(P) = \mu = \max_{\overline{R}} v .$$

Da v an der Stelle das Maximum erreicht, folgt aus Lemma 3.1, daß $(mv)(P) \leq 0$. Es wurde angenommen, daß $mv(P) \geq 0$. Es folgt $mv(P) = 0$, d.h. $(mv)(P) = \sum_{Q \neq P} B(P, Q)[v(Q) - v(P)] = 0$. Folglich gilt

$$v(Q) = v(P) = \mu , \quad Q \in \mathcal{N}(P) .$$

Aber \overline{R} ist ℓ -zusammenhängend, so daß $v(Q) = \mu$ für alle $Q \in \overline{R}$.

Beweis von 2:

Sei $P \in R$ und $v(P) = \mu = \max_{\overline{R}} v > 0$. Es folgt - wie in dem Beweis von 1 - daß $mv(P) \leq 0$. Es wurde vorausgesetzt, daß $\ell v(P) \geq 0$. Es ergibt sich

$$mv(P) = \ell v(P) - f(P)v(P) \geq 0 ,$$

so daß $mv(P) = 0$. Wie bei dem Beweis von 1 folgt jetzt, daß $v(Q) = \mu$ für $Q \in \overline{R}$.

Beweis von 3:

3 ist nur eine andere Formulierung von 2.

Beweis von 4 und 5:

Sofort einzusehen.

Satz 3.2 Sei R eine ℓ -zusammenhängende Teilmenge von S und $\partial R \neq \emptyset$. Sei ℓ nichtnegativ auf R . Die Funktionen γ und g haben Definitionsbereiche R bzw. ∂R . Dann hat das Problem

$$\begin{aligned} \ell v &= g, \quad \text{in } R \\ v &= \gamma, \quad \text{auf } \partial R \end{aligned} \tag{3.41}$$

eine eindeutige Lösung $v \in H(\overline{R})$.

Beweis:

Nach Voraussetzung gilt

$$\ell v(P) = mv(P) + f(P)v(P)$$

mit $f \leq 0$.

Das Problem (3.41) ist auch ein Problem in linearer Algebra: es gibt $M = |\overline{R}|$ Gleichungen für die M Unbekannten $v(P)$, $P \in \overline{R}$. Es folgt, daß v existiert, falls v eindeutig ist, d.h. falls $V \equiv 0$ die einzige Lösung des folgenden Problems ist:

$$\begin{aligned} \ell V &= 0, \quad \text{in } R \\ V &= 0, \quad \text{auf } \partial R \end{aligned}$$

*

Aber mit Hilfe des Satzes 3.1 sehen wir, daß

$$\begin{aligned} \max_{\overline{R}} V &\leq \max\{0, 0\} = 0, \\ \max_{\overline{R}} (-V) &\leq \max\{0, 0\} = 0, \end{aligned}$$

so daß $V \equiv 0$ wie benötigt.

Satz 3.3 Sei R eine ℓ -zusammenhängende Teilmenge S mit $\partial R \neq \emptyset$. Sei ℓ nichtnegativ auf R . Sei $\phi \in H(\overline{R})$ mit

$$\begin{aligned}\ell\phi &\geq 1, \quad \text{in } R \\ \phi &\geq 0, \quad \text{auf } \overline{R}\end{aligned}\tag{3.42}$$

Sei

$$M = \max_{\partial R} \phi .\tag{3.43}$$

Dann gilt für alle $v \in H$:

$$\max_{\overline{R}} |v(P)| \leq \max_{\partial R} |v(P)| + M \max_R |\ell v| .\tag{3.44}$$

Beweis:

Sei

$$w_{\pm} = v \pm \phi \max_R |\ell v| .\tag{3.45}$$

Man rechnet nach, daß

$$\ell w_- \leq 0 \leq \ell w_+ \quad \text{in } R .$$

Folglich (siehe Satz 3.1):

$$\begin{aligned}w_+ &\leq \max\{0, \max_{\partial R} w_+\} \\ w_- &\geq \min\{0, \min_{\partial R} w_-\}, \quad \text{in } \overline{R}\end{aligned}\tag{3.46}$$

Aus (3.45) und (3.46) mit Hilfe von (3.42) und (3.43) schließt man:

$$\begin{aligned}v \leq w_+ &\leq \max_{\partial R} |w_+| \\ &\leq \max_{\partial R} |v| + M \max_R |\ell v| .\end{aligned}$$

Genauso folgt:

$$v \geq w_- \geq -\max_{\partial R} |w_-| \geq -[\max_{\partial R} |v| + M \max_R |\ell v|] .$$

Damit ist der Satz bewiesen.

3.6 Konvergenzbeweise

Sei Ω ein beschränktes Gebiet und

$$\mathcal{L}u := au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + qu, \quad \text{für } (x, y) \in \Omega$$

gleichmäßig elliptisch mit $q \leq 0$. Sei $a, b, c, d, e, q \in C(\bar{\Omega})$. Sei $\mathbf{h} = \{h_0, h_1, \dots\}$, wo $h_{k+1} < h_k$ und $h_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Für $h \in \mathbf{h}$ sei $S_h \subset \bar{\Omega}$ und ℓ_h ein Differenzenoperator auf $R_h \subset S_h$. Sei im weiteren ℓ_h nichtnegativ, R_h ℓ_h -zusammenhängend, $\partial R_h \neq \emptyset$ und $\partial R_h \subset \partial\Omega$.

$\{\ell_h, R_h, \mathbf{h}\}$ heißt eine gleichmäßig konsistente Approximation zu \mathcal{L} bezüglich $C^{(N)}(\bar{\Omega})$, wenn für alle $u \in C^{(N)}(\bar{\Omega})$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbf{h}}} \max_{R_h} |\ell_h r_h u - s_h \mathcal{L}u| = 0$$

$\{\ell_h, R_h, \mathbf{h}\}$ heißt eine gleichmäßig konsistente Approximation der Ordnung k zu \mathcal{L} bezüglich $C^{(N)}(\bar{\Omega})$, wenn für alle $u \in C^{(N)}(\bar{\Omega})$

$$\max_{R_h} |\ell_h r_h u - s_h \mathcal{L}u| \leq K h^k ; \quad \text{mit } K \text{ von } h \text{ unabhängig} .$$

Beispiel 3.2 Wenn ℓ_h und $\Omega_h = R_h$ wie in Absatz 4.2, konstruiert werden, dann ist $\{\ell_h, R_h, \mathbf{h}\}$ gleichmäßig konsistent der Ordnung 2 bezüglich $C^{(4)}(\bar{\Omega})$.

Lemma 3.2 Sei $\{\ell_h, R_h, \mathbf{h}\}$ eine gleichmäßig konsistente Approximation zu \mathcal{L} . Dann existiert eine Gitterfunktion ϕ , so daß für $h \in \mathbf{h}$, h genügend klein,

$$\phi \geq 0 , \quad \ell_h \phi \geq 1 , \quad \text{in } R_h .$$

Beweis:

Sei $\phi := e^{\alpha x^2}$, wo $\alpha > 0$ eine Konstante ist. Dann ist $\phi \geq 0$. Auch

$$\mathcal{L}\phi = e^{\alpha x^2} [a\alpha^2 + d\alpha + q] .$$

Man wähle α , so daß

$$\mathcal{L}\phi \geq 2 \quad \text{in } \bar{\Omega} .$$

Es folgt für h klein

$$|s_h \mathcal{L}\phi - \ell_h r\phi| \leq 1 \quad \text{in } R_h .$$

Satz 3.4 Sei $\{\ell_h, R_h, \mathbf{h}\}$ eine gleichmäßig konsistente Approximation zu \mathcal{L} bezüglich $C^{(N)}(\overline{\Omega})$.

Sei $u \in C^{(N)}(\overline{\Omega})$ mit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u &= g, \quad \text{in } (\Omega) \\ u &= \gamma, \quad \text{auf } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Sei v_h die Lösung der Differenzengleichungen, deren Existenz und Eindeutigkeit durch Satz 3.2 gewährleistet ist

$$\begin{aligned}\ell_h v_h &= g, \quad \text{in } R_h \\ v_h &= \gamma, \quad \text{auf } \partial R_h.\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{\overline{R}_h} |v_h(P) - u(P)| = 0.$$

Sei zusätzlich $\{\ell_h, R_h, \mathbf{h}\}$ eine gleichmäßig konsistente Approximation der Ordnung k zu \mathcal{L} bezüglich $C^{(N)}(\overline{R})$, dann gilt

$$\max_{\overline{R}_h} |v_h(P) - u(P)| = O(h^k).$$

Beweis:

Sei $w_h := v_h - r_h u$. Aus Lemma 3.2 und Satz 3.3 folgt:

$$\max_{\overline{R}_h} |w_h| \leq \max_{\partial R_h} |w_h| + M \max_{R_h} |\ell_h w_h|$$

mit $M = \max_{\partial\Omega} \phi$.

Da $w_h = 0$ auf ∂R_h und $\ell_h v_h = g = \mathcal{L}u$ in R_h , folgt

$$\max_{\overline{R}_h} |w_h| \leq M \max_{R_h} |\ell_h r_h u - \mathcal{L}u|.$$

Der Satz folgt sofort.

Satz 3.4 stammt von Gershgorin [1930]. Ein Nachteil dieses Satzes ist, daß vorausgesetzt wird, daß der Differenzenoperator ℓ_h den Differentialoperator \mathcal{L} mit der gleichen Genauigkeit überall in R_h approximiert. Es wurde zuerst von Wasow bemerkt, daß die Ordnung des Fehlers ungeändert ist, wenn $\ell_h \mathcal{L}$ mit weniger Genauigkeit in der Gegend von $\partial\Omega$ approximiert. Diese Ideen werden jetzt für die Laplace-Gleichung erklärt:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \quad \text{in } \Omega \\ u &= \gamma, \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Sei G_h ein Gitter mit der Maschenweite h und $R_h = G_h \cap \Omega$. Sei

$$w_h := r_h u - v_h$$

der Fehler, wo v_h die Lösung der noch anzugebenden Differenzengleichungen ist.

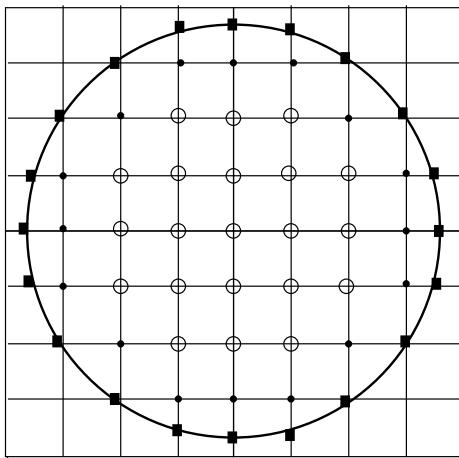
Sei

$$R_h = R'_h \cup R''_h$$

wo

$$\begin{aligned} R'_h &= \text{Menge der "regulären" inneren Punkte} \\ R''_h &= \text{Menge der "nicht-regulären" inneren Punkte} \end{aligned}$$

d.h. Punkte mit mindestens einem Randpunkt als Nachbar. (Siehe Abbildung 3.12.)



- reguläre innere Punkte
- irreguläre innere Punkte
- Randgitterpunkte

Abbildung 3.12: Reguläre und nicht-reguläre Punkte

Zuerst betrachten wir R'_h . Ist $P \in R'_h$, benutzen wir die übliche Fünfpunkt-Formel:

$$\frac{v_h(P_1) + v_h(P_2) + v_h(P_3) + v_h(P_4) - 4v_h(P)}{h^2} = 0$$

mit einem Fehler $O(h^2)$. Folglich - siehe den Beweis von Satz 3.4 - gilt:

$$\|w_h\|_{R'_h} \leq \|w_h\|_{\partial R'_h} + K' h^2 .$$

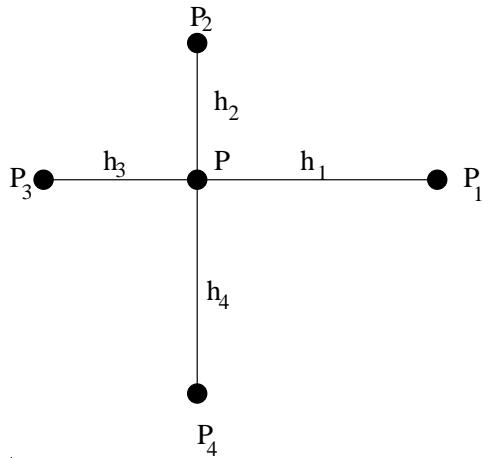


Abbildung 3.13: Die Nachbarn eines nicht-regulären Punktes \$P \in R_h''\$

Aber \$\partial R'_h \subset R_h'' \cup \partial\Omega\$ und \$w_h(P) = 0\$ für \$p \in \partial R \subset \partial\Omega\$, so daß

$$\|w_h\|_{R'_h} \leq \|w_h\|_{R_h''} + K'h^2. \quad (*)$$

Jetzt betrachten wir \$R_h''\$. Ist \$P \in R_h''\$, benutzen wir die Formel (siehe Abbildung 3.13).

$$\begin{aligned}
 A_1 v_h(P_1) + A_2 v_h(P_2) + A_3 v_h(P_3) + A_4 v_h(P_4) - A_0 v_h(P_0) &= 0 \\
 A_1 &= \frac{2}{h_1(h_1 + h_3)}, \quad A_3 = \frac{2}{h_3(h_1 + h_3)} \\
 A_2 &= \frac{2}{h_2(h_2 + h_4)}, \quad A_4 = \frac{2}{h_4(h_2 + h_4)} \\
 A_0 &= \sum_{i=1}^4 A_i
 \end{aligned}$$

mit einem Fehler \$O(h)\$.

\$|w_h|\$ erreiche das Maximum in \$R_h''\$ an der Stelle \$P_0\$. Dann gilt

$$h^2 A_0 |w_h(P_0)| \leq \sum_{i=1}^4 h^2 A_i |w_h(P_i)| + K'' h^3,$$

Es ist leicht einzusehen, daß

1. \$h^2 A_i \geq 1\$
2. \$h^2 A_i \leq 2\$, wenn \$h_i = h\$.
3. Ist \$h_i < h\$, dann ist \$P_i \in \partial R_h\$ und \$w_h(P_i) = 0\$.

Sei

$$\begin{aligned} I' &:= \{i \mid 1 \leq i \leq 4, P_i \in R'_h\} \\ I'' &:= \{i \mid 1 \leq i \leq 4, P_i \in R''_h\} \\ I''' &:= \{i \mid 1 \leq i \leq 4, P_i \in \partial R_h\} \end{aligned}$$

$P_0 \in R''_h$, so daß P_0 mindestens einen Randpunkt als Nachbarn hat und I''' nicht leer ist.

Dann ergibt sich

$$h^2 A_0 |w_h(P_0)| \leq \|w_h\|_{R'_h} h^2 \sum_{I'} A_i + \|w_h\|_{R''_h} \sum_{I''} A_i h^2 + K'' h^3$$

so daß

$$\left(h^2 A_0 - \sum_{I''} h^2 A_i \right) \|w_h\|_{R''_h} \leq \sum_{I'} h^2 A_i \|w_h\|_{R'_h} + K'' h^3 .$$

Da

$$h^2 A_0 - \sum_{I''} h^2 A_i = \sum_{i \in I''} h^2 A_i + \sum_{i \in I'} h^2 A_i \geq 1 + \sum_{I'} h^2 A_i ,$$

folgt

$$\|w\|_{R''_h} \leq \|w\|_{R'_h} \cdot \frac{a}{a+1} + \frac{K'' h^3}{a+1}$$

mit

$$a := \sum_{I'} h^2 A_i .$$

Aber $0 \leq a \leq 6$, so daß

$$\|w\|_{R''_h} \leq \frac{6}{7} \|w\|_{R'_h} + K'' h^3 \quad (**)$$

Wir kombinieren die Ungleichungen (*) und (**):

$$\|w\|_{R'_h} \leq K' h^2 + \frac{6}{7} \|w\|_{R'_h} + K'' h^3 ,$$

so daß

$$\begin{aligned} \|w\|_{R'_h} &\leq 7[K' h^2 + K'' h^3] \\ \|w\|_{R''_h} &\leq 6[K' h^2 + K'' h^3] + K'' h^3 . \end{aligned}$$

D.h. $\|w_h\| = O(h^2)$.

Diese Ideen können natürlich für allgemeinere Operatoren ℓ_h angewandt werden. Eine solche Verallgemeinerung befindet sich in Forsythe und Wasow [1960].

Literatur:

Björck, A. und Dahlquist, G.: Numerische Methoden. Oldenbourg, München, 1979.

Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, 2. Auflage. Springer, 1955.

Courant, R., Friedrichs, K., Lewy, H.: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. *Math. Ann.* 100, 32-74 (1928).

Forsythe, G.E., Wasow, W.R.: Finite Difference Methods for Partial Differential Equations. John Wiley, 1960.

Gerschgorin, S.: Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen. *Z. Angew. Math. Mech.* 10, 373-382 (1930).

Großmann, Ch., Roos, H.-G.: Numerik partieller Differentialgleichungen. Teubner, 1992.

Hackbusch, W.: Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen. Teubner, 1986.

Nörlund, N.E.: Vorlesungen über Differenzenrechnungen. Chelsea, New York, 1954.
[Neudruck eines Buches aus den zwanziger Jahren.]

Richardson, L.F.: The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stresses in a masonry dam. *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* 210 (308-357), 1911.

Runge, C.: Über eine Methode, die partielle Differentialgleichung $\Delta u = \text{Constans}$ numerisch zu integrieren. *Z. Math. u. Phys.* 56 (225-232), 1908.

Strikwerda, J.C.: Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations. Wadsworth and Brooks/Cole, 1989.

Kapitel 4

Iterationsverfahren zur Lösung großer linearer Gleichungssysteme: klassische Verfahren

4.1 Einleitung

Im vorherigen Kapitel sind Randwertaufgaben für elliptische partielle Differentialgleichungen durch finite Differenzen approximiert worden. Das Problem

$$\begin{aligned} Au &= f \quad \text{auf } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.1}$$

wurde dadurch durch das Problem

$$A_h u^h = f_h \tag{4.2}$$

approximiert, wobei

$$A_h : V_h \rightarrow F_h \tag{4.3}$$

und V_h und F_h endlichdimensionale Banachräume sind.

Alle anderen numerischen Methoden zur Approximation der Gleichung (4.1) führen ebenfalls zu einer Gleichung der Gestalt (4.2).

Die Gleichung (4.2) hat mehrere Eigenschaften:

1. Die Dimension N des Raumes V_h kann sehr groß sein, z.B. $N = 10^6$.

2. Wird die Gleichung (4.2) als eine Matrixgleichung betrachtet, dann ist die Matrix A_h oft dünnbesetzt, symmetrisch, positiv-definit und diagonal dominant. (Dies gilt insbesondere für das Modellproblem $\Delta u = f$.)

Es gilt, diese Eigenschaften von A_h auszunutzen. Zur Lösung der Gleichung (4.2) können entweder iterative oder direkte Methoden angewandt werden. In diesem Abschnitt werden iterative Methoden diskutiert.

Die folgenden Themen werden behandelt:

- Das Jacobi Verfahren
- Das Gauß-Seidel Verfahren
- Mehrgittermethoden
- Das konjugierte Gradientenverfahren

4.2 Hilfsmittel

Die folgenden Begriffe und Sätze werden später benötigt (siehe Numerik I):

Definition 4.1 Sind λ_i , $1 \leq i \leq \ell$, die Eigenwerte von $A \in M(n, n)$, so nennt man

$$\rho(A) := \max_{1 \leq i \leq \ell} |\lambda_i|$$

den Spektralradius von A .

Definition 4.2 Eine Matrix $J \in M(r, r)$ heißt Jordanmatrix zum Eigenwert λ , wenn

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & O \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Satz 4.1 (Jordansche Normalform) Sei $A \in M(n, n)$. Es gibt eine reguläre Matrix $S \in M(n, n)$, so daß gilt

$$SAS^{-1} = J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_\ell \end{pmatrix}$$

wobei für $1 \leq r \leq \ell$ $J_r \in Mat(n_r, n_r)$ eine Jordanmatrix ist,

$$J_r = \begin{pmatrix} \lambda_r & 1 & & O \\ & \lambda_r & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Beweis: Siehe Fischer, Lineare Algebra, Anhang B.

Die charakteristischen Polynome $p_r(\lambda) = \det(J_r - \lambda I) = (\lambda_r - \lambda)^{n_r}$ heißen die Elementarteiler von A .

Satz 4.2 Für alle Eigenwerte λ von A gilt

$$|\lambda| \leq \text{lub}(A) := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

für jede Vektornorm $\|\cdot\|$.

Beweis:

Sei (λ, v) ein Eigenpaar von A , d.h. $Av = \lambda v$ mit $v \neq 0$. Dann folgt

$$|\lambda| \|v\| = \|Av\| \leq \|A\| \cdot \|v\| .$$

Satz 4.3 a) Zu jeder Matrix A und jedem $\epsilon > 0$ existiert eine Vektornorm $\|\cdot\|_\wedge$ mit

$$\text{lub}(A)_\wedge = \|A\|_\wedge \leq \rho(A) + \epsilon .$$

b) Hat jeder Eigenwert λ von A mit der Eigenschaft $|\lambda| = \rho(A)$ nur lineare Elementarteiler, so existiert sogar eine Vektornorm $\|\cdot\|_\wedge$ mit

$$\|A\|_\wedge := \text{lub}(A)_\wedge = \rho(A) .$$

Beweis von a):

Sei $SAS^{-1} = J$, wo J in Jordannormalform ist, $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_\ell)$,

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_\ell \end{pmatrix}$$

$$J_r = \begin{pmatrix} \lambda_r & 1 & & O \\ & \lambda_r & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Sei $C(\epsilon) := C := \text{diag}(C_1, \dots, C_\ell)$ mit

$$C_r = C_r(\epsilon) = \text{diag}(1, \epsilon, \dots, \epsilon^{n_r-1}) \in \text{Mat}(n_r, n_r) .$$

Es folgt

$$C^{-1}JC = \text{diag}(C_1^{-1}J_1C_1, \dots, C_\ell^{-1}J_\ell C_\ell) ,$$

mit

$$C_r^{-1}J_r C_r = \begin{pmatrix} \lambda_r & \epsilon & & O \\ & \lambda_r & \epsilon & \\ & & \ddots & \epsilon \\ O & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Es folgt sofort, daß

$$\|C^{-1}JC\|_\infty \leq \rho(A) + \epsilon ,$$

so daß gilt

$$\|TAT^{-1}\|_\infty \leq \rho(A) + \epsilon$$

mit

$$T := C^{-1}S .$$

D.h. (siehe Hilfssatz)

$$\|A\|_\wedge := \|TAT^{-1}\|_\infty \leq \rho(A) + \epsilon .$$

Beweis von b):

Für

$$\epsilon < \rho(A) - \max_{|\lambda_r| < \rho(A)} |\lambda_r|$$

setze

$$D_r = \begin{cases} C_r(\epsilon) & , \quad |\lambda_r| < \rho(A) \\ I & , \quad |\lambda_r| = \rho(A) \end{cases}$$

$$D = \text{diag}(D_1, \dots, D_\ell) .$$

Dann gilt:

$$\|D^{-1}JD\|_\infty = \rho(A) .$$

Hilfssatz:

Sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm und $T \in \text{Mat}(n, n)$ eine reguläre Matrix. Dann ist $\|\cdot\|_\wedge$,

$$\|x\|_\wedge := \|Tx\|$$

eine Vektornorm und

$$\text{lub}(A)_\wedge = \|TAT^{-1}\| , \quad \text{für alle } A \in \text{Mat}(n, n) .$$

Beweis:

$\|\cdot\|_\wedge$ ist eine Vektornorm, da die drei notwendigen Voraussetzungen offensichtlich erfüllt sind.

Es gilt für $A \in \text{Mat}(n, n)$,

$$\begin{aligned}\text{lub}(A)_\wedge &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\wedge}{\|x\|_\wedge} \\ &= \sup_{y \neq 0} \frac{\|AT^{-1}y\|_\wedge}{\|T^{-1}y\|_\wedge} \\ &= \sup_{y \neq 0} \frac{\|TAT^{-1}y\|}{\|y\|} \\ &= \|TAT^{-1}\|\end{aligned}$$

Satz 4.4 Sei $A \in \text{Mat}(n, n)$. Der Limes

$$R(A) := \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}$$

existiert und ist gleich $\rho(A)$.

Beweis:

Sei

$$R_k := \|A^k\|^{1/k}$$

und (λ, x) ein Eigenpaar von A . Dann gilt:

$$R_k \geq \left[\frac{\|A^k x\|}{\|x\|} \right]^{1/k} = |\lambda|,$$

so daß

$$R_k \geq \rho(A). \quad (*)$$

Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig. Es folgt aus Satz 4.3, daß es eine Norm $\|\cdot\|_\epsilon$ gibt mit

$$\|A\|_\epsilon \leq \rho(A) + \epsilon.$$

Alle Normen auf dem \mathbb{R}^n sind äquivalent, es gibt deshalb eine Konstante $m = m(\epsilon)$ mit

$$\frac{1}{m} \|x\| \leq \|x\|_\epsilon \leq m \|x\|.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}R_k &= \left[\sup_{x \neq 0} \frac{\|A^k x\|}{\|x\|} \right]^{1/k} \\ &\leq \left[\sup_{x \neq 0} \frac{m^2 \|A^k x\|_\epsilon}{\|x\|_\epsilon} \right]^{1/k} \\ &= m^{2/k} \cdot [\|A^k\|_\epsilon]^{1/k} \\ &\leq m^{2/k} \cdot \|A\|_\epsilon \\ &\leq m^{2/k} \cdot (\rho(A) + \epsilon)\end{aligned} \quad (**)$$

Für alle $m > 0$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m^{2/k} = 1.$$

Der Satz folgt deshalb sofort aus den Ungleichungen (*) und (**).

Bemerkung 4.1 Es folgt aus diesem Satz, daß der Spektralradius $\rho(A)$ nicht nur die Konvergenz des Verfahrens $x^{k+1} = Ax + b$, sondern auch dessen asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit bestimmt.

Bemerkung 4.2 a) $\rho(A) \leq \|A\|$

b) $\rho(A) < 1$ und $\rho(B) < 1$ impliziert i.a. nicht $\rho(AB) < 1$.

Beispiel 4.1 a)

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 100 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad A^k = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^k & 100(\frac{1}{2})^{k-1} \\ 0 & (\frac{1}{2})^k \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 100 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 100 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 10^4 + 1/4 & 50 \\ 50 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \rho(B) = 1/2, \\ \rho(AB) &> 1. \end{aligned}$$

Genauere Information über die Potenzen A^m einer Matrix A erhält man aus der Jordanschen Normalform.

Satz 4.5 *A sei eine $n \times n$ -Matrix mit $\rho(A) > 0$. Dann gilt:*

$$\|A^m\| \sim \nu \binom{m}{p-1} [\rho(A)]^{m-(p-1)}, \quad m \rightarrow \infty,$$

wo p die größte Ordnung aller Jordanschen Blockmatrizen J von A mit $\rho(J) = \rho(A)$ und ν eine positive Konstante ist.

Beweis: Siehe Varga, Matrix Iterative Analysis, S. 65.

Beispiel 4.2

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A^m = \begin{pmatrix} \lambda^m & m\lambda^{m-1} \\ 0 & \lambda^m \end{pmatrix}.$$

4.3 Das Jacobi-, Gauß-Seidel-, SOR- und SSOR-Verfahren - eine Einleitung

In diesem Abschnitt werden vier wichtige Iterationsverfahren zur Lösung des Gleichungssystems

$$Ax = b \quad (4.4)$$

vorgestellt. Im nächsten Abschnitt wird die Konvergenz dieser Verfahren untersucht.

4.3.1 Anwendung auf ein Modellproblem

Als Beispiel nehmen wir

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 1 \quad \text{auf } \partial\Omega \\ \Omega &:= (0, 1) \times (0, 1) \end{aligned}$$

werde unter Anwendung des Fünfpunktsterns mit Schrittweite $h = \frac{1}{3}$ approximiert. Die Numerierung der Knoten sei dabei wie in Abbildung 4.1a).

Es ergibt sich nach Elimination der vorgeschriebenen Randwerte:

$$A_h u_h = f_h$$

$$A_h := \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

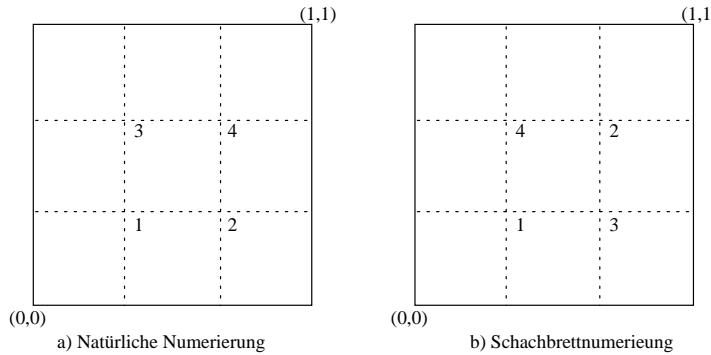


Abbildung 4.1: Mögliche Numerierungen

$$f_h = \begin{pmatrix} g(h, 0) & + & g(0, h) \\ g(2h, 0) & + & g(1, h) \\ g(h, 1) & + & g(0, 2h) \\ g(2h, 1) & + & g(1, 2h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A_h, u_h und f_h werden natürlich durch die Numerierung der Gitterpunkte beeinflußt. Eine Änderung der Numerierung führt dazu, daß A_h, u_h und f_h durch \tilde{A}_h, \tilde{u}_h und \tilde{f}_h ersetzt werden, wobei

$$\tilde{A}_h = P^T A_h P, \quad \tilde{u}_h = P^T u_h, \quad \tilde{f}_h = P^T f_h$$

und P eine Permutationsmatrix ist.

Für die Numerierung in Abbildung 4.1b) gilt:

$$\tilde{A}_h = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_h = f_h, \quad \tilde{u}_h = u \quad (4.6)$$

mit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bei allen drei Verfahren wird A als Differenz von zwei Matrizen M und N dargestellt,

$$A = M - N , \quad (4.7)$$

wobei gilt:

1. M sei regulär
2. M sei "leicht invertierbar", d.h. die Gleichung $My = c$ sei für beliebiges c leicht zu lösen.

Das Gleichungssystem (4.4) kann dann in der Gestalt

$$Mx = b + Nx$$

oder

$$x = M^{-1}b + M^{-1}Nx$$

geschrieben werden. Es liegt deshalb nahe, das Iterationsverfahren

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d , \quad k \geq 0 \quad (4.8)$$

zu benutzen mit

$$\begin{aligned} B &:= M^{-1}N , \\ d &:= M^{-1}b . \end{aligned}$$

Es ist manchmal sinnvoll, die folgende Zerlegung von A zu benutzen:

$$\begin{aligned} A &= D - L - R \quad \text{mit} \\ D &= \text{diag}(A) \\ L &= \text{linke Dreiecksmatrix} \\ R &= \text{rechte Dreiecksmatrix} \end{aligned}$$

4.3.2 Das Jacobi-Verfahren oder Gesamtschrittverfahren

Zur Lösung von

$$Ax = b$$

wird die Zerlegung

$$\begin{aligned} A &= M - N , \\ M &:= D = \text{diag}(A) , \\ N &:= D - A = L + R \end{aligned}$$

benutzt. Es folgt

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d$$

mit

$$\begin{aligned} d &= D^{-1}b \\ B &= D^{-1}(D - A) \\ &= D^{-1}(L + U) \\ &= I - D^{-1}A . \end{aligned}$$

Es folgt weiter:

$$Dx^{(k+1)} + (A - D)x^{(k)} = b .$$

Dies ist die Gleichung, der die Bezeichnung "Gesamtschrittverfahren" zugrunde liegt.

Die Matrix $B = I - D^{-1}A$ wird oft als Jacobi-Matrix bezeichnet.

Beispiel 4.3 Wir betrachten das Modellproblem $Ax = b$ mit $A = \tilde{A}_h$, $b = \tilde{f}_h$, $x = \tilde{u}_h$ aus (4.6). Dann gilt für das Jacobi-Verfahren

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Mit

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= (0, 0, 0, 0)^T \quad \text{gilt:} \\ x^{(1)} &= (0, 5, 0, 5, 0, 5, 0, 5)^T , \\ x^{(2)} &= (0, 75, 0, 75, 0, 75, 0, 75)^T \\ x^{(10)} &= (0, 999023, 0, 999023, 0, 999023, 0, 999023)^T \\ &\vdots \\ x^{(20)} &= (0, 9999, 0, 9999, 0, 9999, 0, 9999)^T \end{aligned}$$

Bemerkung 4.3 Bei Verwendung der Numerierung wie in Abbildung 4.1a) erhält man folgende Jacobimatrix:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3.3 Das Gauß-Seidel-(Einzelschritt-) Verfahren

$$\begin{aligned} M &= D - L , \\ N &= R , \\ B &= G := (D - L)^{-1}R , \\ (D - L)x^{k+1} &- Rx^{(k)} = b \end{aligned}$$

Beispiel 4.4 Mit

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= (0, 0, 0, 0)^T \quad \text{gilt:} \\ x^{(1)} &= (0, 5, 0, 5, 0, 75, 0, 75)^T \\ x^{(2)} &= (0, 875, 0, 875, 0, 9375, 0, 9375)^T \\ x^{(10)} &= (0, 99998, 0, 99998, 0, 99999, 0, 99999)^T \end{aligned}$$

4.3.4 Das S.O.R.-Verfahren

$$\begin{aligned} \omega &\in (0, 2) , \\ M &= \frac{1}{\omega} D - L , \\ N &= \frac{1-\omega}{\omega} D + R , \\ B(\omega) &= L_\omega := (D - \omega L)^{-1}((1-\omega)D + \omega R) , \\ (D - \omega L)x^{(k+1)} &- ((1-\omega)D + \omega R)x^{(k)} = c \end{aligned}$$

Beispiel 4.5 Mit

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= (0, 0, 0, 0)^T \\ \omega &= 1, 5 \quad \text{gilt:} \\ x^{(1)} &= (0, 75, 0, 75, 1, 3125, 1, 3125)^T , \\ x^{(10)} &= (0, 99882, 0, 99882, 1, 00002, 1, 00002)^T . \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= (0, 0, 0, 0)^T \\ \omega &= 1, 0718 \quad \text{gilt:} \\ x^{(1)} &= (0, 535898, 0, 535898, 0, 823085, 0, 823085)^T \\ x^{(7)} &= (1, 0000, 1, 0000, 1, 0000, 1, 0000)^T \end{aligned}$$

4.3.5 Das SSOR-Verfahren

Dieses Verfahren besteht aus der Zusammenfassung eines Vorwärts- und eines Rückwärts-SOR-Verfahrens.

$$\begin{aligned}
\omega &\in (0, 2) \\
M_v &= \frac{1}{\omega}D - L \\
N_v &= \frac{1-\omega}{\omega}D + R \\
M_r &= \frac{1}{\omega}D - R \\
N_r &= \frac{1-\omega}{\omega}D + L \\
S(\omega) &= M_r^{-1}N_rM_v^{-1}N_v \\
d &= M_r^{-1}b + B_rM_v^{-1}b
\end{aligned}$$

Der große Vorteile des SSOR-Verfahrens ist, daß $S(\omega)$ ähnlich zu einer symmetrischen Matrix ist, wenn A symmetrisch ist, so daß dann die Eigenwerte von $S(\omega)$ reell sind.

Mit

$$\begin{aligned}
x^{(0)} &= (0, 0, 0, 0)^T \\
\omega &= 1,5 \quad \text{gilt:} \\
x^{(1)} &= (0, 86719, 0, 86719, 0, 65625, 0, 65625)
\end{aligned}$$

$$x^{(10)} = (0, 99995, 0, 99995, 0, 99918, 0, 99918)$$

4.4 Allgemeine Konvergenzbetrachtungen

Definition 4.3 Das Iterationsverfahren

$$\begin{aligned}
x^{k+1} &= Bx^k + d, \\
B &= M^{-1}N, \quad d = M^{-1}b
\end{aligned}$$

zur Lösung des Gleichungssystems

$$Ax \equiv (M - N)x = b$$

heißt konvergent, falls für alle Startvektoren $x^{(0)}$ und Vektoren b die Folge $\{x^{(k)}\}$ gegen die exakte Lösung $x = A^{-1}b$ konvergiert.

Wir können jetzt notwendige und hinreichende Bedingungen für Konvergenz herleiten. Der folgende Satz ist sowohl eine Erweiterung (da eine hinreichende Bedingung

gegeben wird) als auch eine Spezialisierung (da nur lineare Abbildungen betrachtet werden) des Banachschen Fixpunktsatzes.

Satz 4.6 Das Iterationsverfahren

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d \quad (*)$$

ist genau dann konvergent, wenn

$$\rho(B) < 1 .$$

Beweis:

a) Sei (*) konvergent. Für jedes d konvergiert die Folge $x^{(0)} := 0$, $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d$.
Sei

$$x := \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} .$$

Es gilt $x = Bx + d$, so daß die Gleichung

$$y = By + d$$

für jedes d eine Lösung hat. D.h. die Abbildung $F := I - B$,

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ist surjektiv und deshalb bijektiv (Fischer, S. 86).

Für den Fehler $f^{(k)} := x - x^{(k)}$ gilt:

$$f^{(k+1)} = Bf^{(k)} .$$

Wähle $x^{(0)}$ so, daß $f^{(0)} = v$, wobei $\{\lambda, v\}$ ein Eigenpaar für B ist:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &:= 0 , \\ d &:= (I - B)v \end{aligned}$$

Es folgt:

$$f^{(k)} = \lambda^k v , \quad k \in \mathbb{N} ,$$

und daher $|\lambda| < 1$.

b) Sei umgekehrt $\rho(B) < 1$.

Es folgt aus Satz 4.3 (§2.2), daß eine Norm existiert mit $\|B\| < 1$. Es folgt, daß die Abbildung $g(u) := Bu + d$ kontrahierend ist. Man benutzt jetzt den Banachschen Fixpunktsatz.

Eine einfache aber oft nützliche notwendige Bedingung für die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens wird jetzt hergeleitet.

Definition 4.4 Die Matrix $A \in Mat(n, n)$ erfüllt das starke Zeilensummenkriterium falls

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Satz 4.7 Die Matrix A erfülle das starke Zeilensummenkriterium. Dann konvergiert das Gesamtschrittverfahren.

Beweis:

Es gilt für die Jacobi-Matrix $B = (b_{ij})$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| / |a_{ii}| < 1, \quad 1 \leq i \leq n, \\ b_{ii} &= 0, \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned} \tag{*}$$

Es gibt jetzt zwei einfache Methoden, um zu zeigen, daß $\rho(B) < 1$.

Methode 1:

Wegen (*) gilt:

$$\rho(B) < \|B\|_\infty < 1.$$

Methode 2:

Sei $\{\lambda, v\}$ ein Eigenpaar von B . Wähle k , so daß

$$|v_k| = \|v\|_\infty = \max_j |v_j|$$

und betrachte die k -te Gleichung des Gleichungssystems $\lambda v = Bv$:

$$\begin{aligned} |\lambda v_k| &= \sum_{j=1}^n |b_{ij}| |v_j| \\ &\leq \|v\|_\infty \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \\ &< \|v\|_\infty \end{aligned}$$

Es folgt, daß $|\lambda| < 1$.

Satz 4.8 Sei $A \in Mat(n, n)$, A regulär und L_ω die zugehörige SOR-Iterationsmatrix. Dann gilt:

$$\rho(L_\omega) \geq |\omega - 1|.$$

Beweis:

$$L_\omega = (D - \omega L)^{-1}((1 - \omega)D + \omega R) .$$

Es folgt:

$$(D - \omega L)L_\omega = (1 - \omega)D + \omega R .$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \det(D) \cdot \det(L_\omega) &= \det(D - \omega L) \cdot \det(L_\omega) \\ &= \det((D - \omega L)L_\omega) , \\ &= \det((1 - \omega)D + \omega R) , \\ &= (1 - \omega)^n \cdot \det(D) , \quad \text{so daß} \\ \det(L_\omega) &= (1 - \omega)^n . \end{aligned}$$

Das Produkt der evtl. vielfältigen Eigenwerte von L_ω ist gleich dem konstanten Term von $\det(\lambda I - L_\omega)$:

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(-L_\omega) = (\omega - 1)^n .$$

Bemerkung 4.4 Es folgt aus Satz 4.8, daß das SOR-Verfahren nur für $\omega \in (0, 2)$ konvergent ist.

Satz 4.9 (Ostrowski-Reich)

Sei $A = D - E - E^*$ eine $n \times n$ hermitesche Matrix, D eine positiv definite hermitesche Matrix, $D - \omega E$ nicht singulär für $0 \leq \omega \leq 2$. Sei

$$L_\omega = (D - \omega E)^{-1}((1 - \omega)D + \omega E^*) .$$

- a) Wenn A positiv definit ist und $\omega \in (0, 2)$, dann ist $\rho(L_\omega) < 1$.
- b) Falls E eine linke untere Dreiecksmatrix und D eine Diagonalmatrix ist, gilt auch die Umkehrung.

Beweis:

Zuerst wird eine Hilfsgleichung hergeleitet. Die Fehler $e^m := x - x^m$ erfüllen die Gleichungen:

$$e^{m+1} = L_\omega e^m \tag{4.9}$$

$$(D - \omega E)e^{m+1} = (\omega E^* + (1 - \omega)D)e^m \tag{4.10}$$

Sei

$$\delta^m := e^m - e^{m+1}, \quad m \geq 0 . \tag{4.11}$$

Aus (4.10) folgt

$$(D - \omega E)\delta^m = [(D - \omega E) - (\omega E^* + (1 - \omega)D)]e^m = \omega Ae^m \quad (4.12)$$

und

$$\begin{aligned} \omega Ae^{m+1} &= \omega(D - E - E^*)e^{m+1} \\ &= [(\omega - 1)D - \omega E^*]e^{m+1} + (D - \omega E)e^{m+1} \\ &= [(1 - \omega)D + \omega E^*](e^m - e^{m+1}) \\ &= (1 - \omega)D\delta^m + \omega E^*\delta^m. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Werden Gleichungen (4.12) und (4.13) mit e^{m*} bzw. e^{m+1*} multipliziert, wobei * jeweils die konjugierte Transposition bedeutet, dann folgt, daß

$$S_1 := e^{m*}[D - \omega E]\delta^m = \omega e^{m*}Ae^m \quad \text{und} \quad (4.14)$$

$$S_2 := e^{m+1*}[(1 - \omega)D + \omega E^*]\delta^m = \omega e^{m+1*}Ae^{m+1} \quad (4.15)$$

Sei

$$S := S_1 - S_2. \quad (4.16)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} S &= e^{m*}[D - \omega E]\delta^m - e^{m+1*}[(1 - \omega)D + \omega E^*]\delta^m \\ &= e^{m*}[D - \omega E]\delta^m - (e^m - \delta^m)^*[(1 - \omega)D + \omega E^*]\delta^m \\ &= \delta^{m*}[(1 - \omega)D + \omega E^*]\delta^m + e^{m*}[\omega D - \omega E - \omega E^*]\delta^m \\ &= \delta^{m*}[(1 - \omega)D + \omega E^*]\delta^m + e^{m*}\omega A\delta^m \\ &= \delta^{m*}[(1 - \omega)D + \omega E^*]\delta^m + \delta^{m*}\omega Ae^m. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Mit Hilfe der Gleichung (4.12) folgt:

$$\begin{aligned} S &= \delta^{m*}\{[(1 - \omega)D + \omega E^*] + [D - \omega E]\}\delta^m \\ &= (2 - \omega)\delta^{m*}D\delta^m. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Aus (4.14), (4.15), (4.16) und (4.18) folgt:

$$(2 - \omega)\delta^{m*}D\delta^m = \omega\{e^{m*}Ae^m - e^{m+1*}Ae^{m+1}\}. \quad (4.19)$$

Diese Gleichung ist der Schlüssel zum Konvergenzbeweis, da daraus folgt, daß unter bestimmten Voraussetzungen die Zielfunktion $e^{m*}Ae^m$ monoton fallend ist.

Wähle ein Eigenpaar (λ, v) von L_ω und setze $e^0 = v$. Dann folgt aus (4.19):

$$e^1 = L_\omega e^0 = \lambda e^0 \quad (4.20)$$

$$\delta^0 = (1 - \lambda)e^0 \quad (4.21)$$

$$(2 - \omega)|1 - \lambda|^2 e^{0*}De^0 = \omega(1 - |\lambda|^2)e^{0*}Ae^0. \quad (4.22)$$

Wir können jetzt den Beweis durchführen.

a) Sei A positiv definit und $\omega \in (0, 2)$. Die Matrix D ist positiv definit. Wegen $e^0 = v \neq 0$ gilt $e^{0*} De^0 > 0$. Es folgt aus (4.22), daß entweder $\lambda = 1$ oder $1 - |\lambda|^2 > 0$.

Wäre $\lambda = 1$, dann folgte aus (4.21), daß $\delta^0 = 0$ und folglich aus (4.12), daß $e^{0*} Ae^0 = 0$, was der Annahme $e^0 = v \neq 0$ widerspricht.

Es gilt deshalb

$$|\lambda| < 1.$$

Da λ einen beliebigen Eigenwert darstellt, ist $\rho(B) < 1$.

b) Sei nun $\rho(L_\omega) < 1$, E eine untere Dreiecksmatrix und D eine Diagonalmatrix. Dann konvergiert die Folge $\{x^k\}$ für jedes x^0 , so daß $e^m \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$.

Es ist bekannt aus Satz 4.8, daß

$$|\omega - 1| \leq \rho(L_\omega) < 1,$$

d.h. $\omega \in (0, 2)$.

Es gilt, da $\omega \neq 0$,

$$A = \frac{1}{\omega} (D - \omega E)(I - L_\omega),$$

so daß A regulär ist.

Wäre A nicht positiv definit, hätte A mindestens einen negativen Eigenwert λ mit Eigenvektor v . Setze $e^0 := v$. Es gelte:

$$e^{0*} Ae^0 < 0.$$

Es würde dann aus (4.19) folgen, daß

$$e^{m+1*} Ae^{m+1} \leq e^{m*} Ae^m \leq \dots \leq e^{0*} Ae^0 < 0,$$

was der Konvergenz der Folge $\{e^m\}$ gegen Null widerspricht.

Zusammenfassend mußgelten:

$$\begin{aligned} \omega &\in (0, 2), \\ A &\text{ positiv definit.} \end{aligned}$$

4.5 Die Gershgorin Sätze

Gershgorin¹ hat einige Sätze bewiesen, die manchmal bei der Abschätzung von Eigenwerten sehr nützlich sind.

Satz 4.10 (Gershgorin) *Die Vereinigung aller Kreisscheiben*

$$K_i := \{ \mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{ik}| \}$$

enthält alle Eigenwerte der $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ik})$.

Ist die Vereinigung $M_1 = \bigcup_{i=1}^k K_i$ disjunkt von der Vereinigung M_2 der übrigen Kreise, so enthält M_1 genau k Eigenwerte von A und M_2 genau $n - k$ Eigenwerte.

Beweis: Stoer und Bulirsch II, S. 77 und 78.

Für das Modellproblem 1 haben die vier Gershgorin Kreise alle den Mittelpunkt $(0, 0)$ und den Radius $\frac{1}{2}$, so daß $\rho(J) \leq \frac{1}{2}$.

Dieses Beispiel ist aber eine Ausnahme, weil keine echten inneren Gitterpunkte existieren. Sobald alle fünf Gitterpunkte eines Sterns innere Gitterpunkte sind, liefert Satz 4.10 nur die Abschätzung $\rho(J) \leq 1$, was die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens nicht garantiert. Es ist deshalb notwendig, einige weitere Begriffe einzuführen.

Eine $n \times n$ -Matrix A heißt unzerlegbar (irreduzibel), falls es keine Permutationsmatrix P gibt, so daß $P^T AP$ die Gestalt

$$P^T AP = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$$

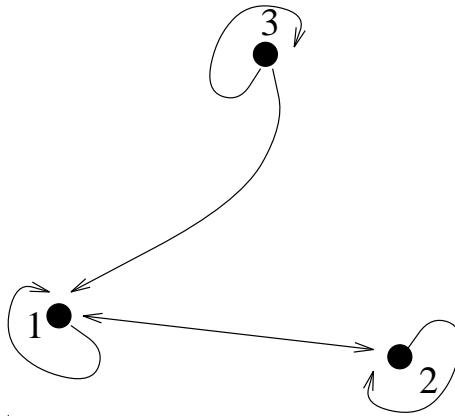
besitzt, wo \tilde{A}_{11} eine $p \times p$ -Matrix, \tilde{A}_{22} eine $q \times q$ -Matrix mit $p + q = n$, $p > 0$, $q > 0$ ist.

Die Unzerlegbarkeit einer Matrix A kann man häufig leicht mit Hilfe des der Matrix A zugeordneten (gerichteten) Graphen $G(A)$ prüfen. Wenn A eine $n \times n$ -Matrix ist, so besteht $G(A)$ aus n Knoten P_1, \dots, P_n , und es gibt eine gerichtete Kante $P_i \rightarrow P_j$ in $G(A)$ genau dann, wenn $a_{ij} \neq 0$.

Z.B. ist der Graph von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¹Gershgorin, S.: Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 7, 749-754 (1931)

Abbildung 4.2: Der Graph $G(A)$

in Abbildung 4.2 dargestellt.

A ist genau dann unzerlegbar, wenn der Graph $G(A)$ in dem Sinne zusammenhängend ist, daß es für jedes Knotenpaar (P_i, P_j) in $G(A)$ einen gerichteten Weg von P_i nach P_j gibt.

Die Matrix A ist also genau dann unzerlegbar, wenn es für jedes i, j mit $1 \leq i, j \leq n$ eine Folge $i_0 i_1 \cdots i_m$ gibt mit

$$\begin{aligned} i_0 &= i \\ i_m &= j \\ a_{i_k i_{k+1}} &\neq 0 \end{aligned}$$

für $0 \leq k < m$.

Behauptung 4.1 Die Matrix A_h entstehe durch die Benutzung des Fünfpunktesystems auf dem Gitter G_h . Dann ist die Matrix A_h genau dann unzerlegbar, wenn G_h zusammenhängend ist.

Satz 4.11 $A \in Mat(n \times n, \mathbb{C})$ sei unzerlegbar. Sei λ Eigenwert von A , $\lambda \in \partial K$, wobei K die Vereinigung aller Gerschgorin Kreisscheiben ist. Dann gilt:

$$\lambda \in \partial K_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Beweis:

Sei (λ, x) ein Eigenpaar von A mit $\lambda \in \partial K$. O.E. gibt es r mit

$$|x_r| = 1 \geq |x_i|, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Aus

$$Ax = \lambda x$$

folgt

$$\sum_{i=1}^n a_{ri}x_i = \lambda x_r$$

und

$$\begin{aligned} |a_{rr} - \lambda| &\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}} |a_{rj}| \cdot |x_j| \\ &\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}} |a_{rj}| \\ &= \text{Radius von } K_r , \end{aligned}$$

also $\lambda \in K_r$. Die Voraussetzung, daß $\lambda \in \partial K$, führt dazu, daß $\lambda \in \partial K_r$ und

$$|a_{rj}| \neq 0 \Rightarrow |x_j| = 1 , \quad 1 \leq j \leq n .$$

Da A unzerlegbar ist, gibt es ein $p \neq r$ mit $a_{rp} \neq 0$, so daß $|x_p| = 1$. Durch Wiederholung ergibt sich:

$$|x_i| = 1 \quad \text{für } 1 \leq i \leq n ,$$

und $\lambda \in \partial K_i$, für $1 \leq i \leq n$.

Durch Anwendung von Satz 4.11 erhält man:

Satz 4.12 (Schwaches Zeilensummenkriterium) *Falls A unzerlegbar ist und*

$$|a_{ii}| \geq \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \quad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, n ,$$

aber $|a_{i_0,0}| > \sum_{k \neq i_0} |a_{i_0k}|$ für mindestens ein i_0 gilt, dann konvergiert das Gesamtschrittverfahren.

Bemerkung 4.5 Die Jacobi Matrix J ist symmetrisch. Falls J zerlegbar ist, können die einzelnen Untermatrizen J_1, \dots, J_k getrennt betrachtet werden.

Satz 4.13 *Das Gesamtschrittverfahren konvergiert für die Fünfpunkt-Differenzenapproximation zur Lösung des Dirichlet Problems für die Laplace Gleichung.*

Beweis: Siehe Bemerkung oben.

4.6 Das Gesamtschrittverfahren - das Modellproblem

Es wurde im letzten Abschnitt bewiesen, daß das Gesamtschrittverfahren für das Dirichlet Problem konvergiert. Es stellt sich aber heraus, daß die Konvergenzgeschwindigkeit viel zu wünschen übrig läßt, wie das folgende Modellproblem zeigt.

Beispiel 4.6 Zu betrachten ist das Problem:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x, y), \text{ in } \Omega \\ u &= 0, \text{ auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \Omega &:= (0, 1) \times (0, 1) \\ f &\in C(\Omega). \end{aligned}$$

Mit der Maschenweite

$$h = \frac{1}{N+1}$$

entsteht das Differenzengleichungssystem

$$A_h v_h = f_h,$$

wobei A_h eine Blocktridiagonalmatrix ist:

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} H & C & & & \\ C & H & \ddots & O & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & O & \ddots & H & C \\ & & & C & H \end{pmatrix}$$

$H, C \in Mat(N, N, \mathbb{R})$:

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & \ddots & O & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & O & \ddots & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = -I_N = -I.$$

Die entsprechende Jacobi Matrix B ist:

$$B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} F & I & & & \\ I & F & \ddots & O & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & O & \ddots & F & I \\ & & & I & F \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & \ddots & O & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & O & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

mit $B \in Mat(M, M, \mathbb{R})$, $F \in Mat(N, N, \mathbb{R})$, $M := N^2$.

Das Eigenwertproblem

$$Bv = \lambda v$$

ist äquivalent zum Gleichungssystem:

$$\frac{1}{4}[v_{i,j+1} + v_{i,j-1} + v_{i+1,j} + v_{i-1,j}] = \lambda v_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq N,$$

wobei

$$v_{i,j} := 0 \quad \text{für } i = 0, i = N + 1, j = 0, j = N + 1.$$

Der Ansatz

$$v_{i,j}^{k,\ell} = \sin(k\pi h i) \sin(\ell\pi h j)$$

führt zu dem Eigenwert:

$$\begin{aligned} \lambda^{k,\ell} &= \frac{1}{2}[\cos k\pi h + \cos \ell\pi h] \\ &= 1 - \left(\sin \frac{k\pi h}{2}\right)^2 - \left(\sin \frac{\ell\pi h}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Die N^2 Vektoren $v^{k,\ell}$ sind linear unabhängig und bilden eine Basis des \mathbb{R}^{N^2} . Weiter gilt:

$$\rho(B) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi h}{2} = \cos \pi h.$$

Wird das Gesamtschrittverfahren zur Lösung des Gleichungssystems

$$A_h v_h = f_h$$

benutzt, dann folgt mit Hilfe von Satz 4.13 aus dem vorigen Abschnitt, daß

$$\sup_{v_h^0 \neq v_h} \limsup_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{\|v_h^{(k)} - v_h\|}{\|v_h^{(0)} - v_h\|} \right]^{1/k} = \rho(B) ,$$

d.h. im Durchschnitt und für allgemeine Anfangsdaten $v_h^{(0)}$ wird der Fehler $\|v_h^{(k)} - v_h^{(0)}\|$ mit dem Faktor $\rho(B)$ pro Iteration multipliziert. Damit sich der Fehler um einen Faktor $1/e$ verringert, werden im Durchschnitt m Iterationen benötigt, wobei

$$\begin{aligned} [\rho(B)]^m &= 1/e \\ m &= -1/\ln(\rho(B)) \\ &\doteq \frac{2}{\pi^2 h^2} . \end{aligned}$$

Für großes N (kleines h) sind deshalb sehr viele Iterationen nötig. Der durchschnittliche Rechenaufwand, um den Fehler um einen Faktor $1/e$ zu reduzieren, ist

$$O\left(\frac{2}{\pi^2 h^2}\right) \cdot \text{Multiplikationen} + O\left(\frac{2}{\pi^2 h^2} \cdot 3\right) \text{ Additionen} = O\left(\frac{8}{\pi^2} N^2\right) \text{ Operationen} .$$

Die vorherigen Überlegungen können von einem anderen Gesichtspunkt aus betrachtet werden. Für die Gleichung

$$A_h v_h = f_h$$

ist das Gesamtschrittverfahren

$$Dv^{k+1} + (A_h - D)v^k = f_h$$

oder

$$v^{k+1} = Bv^k + D^{-1}f_h$$

mit

$$D := \frac{1}{h^2} \text{diag}(-4) , \quad B = I - \frac{h^2}{4} A_h .$$

Die Fehler

$$e^k := v_h - v^k$$

erfüllen die Gleichung

$$e^{k+1} = Be^k .$$

Seien nun (λ_i, w_i) , $1 \leq i \leq M$, M Eigenpaare von B mit $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_M|$. Der Fehler e^0 lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$e^0 = \sum_{i=1}^M a_i w_i ,$$

so daß

$$e^k = \sum_{i=1}^M a_i \lambda_i^k w_i .$$

Es folgt - wie bei der Vektoriteration - daß der Fehler für großes k sich etwa wie $a_1 \lambda_1^k w_1$ verhält,

$$e^k \sim a_1 \lambda_1^k w_1 .$$

Die asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit wird deshalb durch

$$|\lambda_1| = \rho(B)$$

bestimmt. Für kleines k dagegen ist im allgemeinen die Konvergenzgeschwindigkeit etwas besser, da die Fehlerkomponente $a_2 w_2, \dots, a_M w_M$ sich schneller abbauen lässt. Gerade diese Eigenschaft wird bei Mehrgitterverfahren genutzt.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \cos \pi h = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi h}{2} , \\ w_1 &= v_{i,j}^{1,1} = \sin(\pi hi) \sin(\pi hj) , \end{aligned}$$

so daß w_1 eine nichtnegative Gitterfunktion ist.

Zusammenfassend gelten die folgenden Aussagen für das Modellproblem, aber auch für allgemeinere nichtnegative Differenzenapproximationen:

1. Das Jacobi-Verfahren konvergiert.
2. $\rho(B) \approx 1 - h^2 \mu_1$, mit $\mu_1 > 0$.

3. Der Fehler nach k Schritten

$$e^k = v_h - v_h^{(k)}$$

läßt sich gut durch

$$e^k \approx \text{constant } \rho(B)^k \cdot w_1$$

approximieren, wobei $w_1 > 0$ eine “glatte” Gitterfunktion ist.

4. Die Anzahl der Iterationen, die benötigt werden, um den Fehler durchschnittlich um einen Faktor $1/e$ zu verringern, ist:

$$m = -1/\ln(\rho(B)) \approx \frac{1}{h^2 \mu_1} .$$

4.7 Verallgemeinerungen

Die Aussagen im letzten Abschnitt für das Modellproblem sind richtungsweisend für allgemeine Probleme.

Die Tatsache, daß $\rho(B) \approx 1$ für die Jacobi Matrix B gilt, läßt sich folgendermaßen erklären:

Die Eigenwerte μ und Eigenfunktionen u einer schwingenden Membran mit Oberfläche Ω erfüllen die Bedingungen

$$\begin{aligned} \Delta u &= \mu u, \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{auf } \partial\Omega . \end{aligned}$$

Bekanntlich gibt es unendlich viele Eigenpaare $\{\mu_i, u_i\}$ mit $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$. Weiter gilt: $\mu_i \rightarrow \infty$ für $i \rightarrow \infty$; $\text{Span}\{u_i\} = L_2(\Omega)$ und $\{u_i\}$ ist eine orthogonale Basis für $L_2(\Omega)$. (Michlin [1978, S. 372]; Garabedian [1964, Chapter 11]; Dunford und Schwartz [1963, S. 1743].)

Das diskrete Eigenwertproblem

$$A_h w_h = \mu_h w_h$$

ist eine Approximation für das Membranproblem. Man erwartet, daß die Eigenwerte $\mu_h^{(i)}$ die Eigenwerte $\mu^{(i)}$ approximieren sollen, d.h.

$$\mu_h^{(i)} \approx \mu^{(i)} .$$

Es folgt, da $B = I - \frac{h^2}{4} A_h$, daß

$$\begin{aligned}\lambda_i &= 1 - \frac{h^2}{4} \mu_h^{(i)} \\ &\approx 1 - \frac{h^2}{4} \mu^{(i)} .\end{aligned}$$

Für das Rechteck $\Omega = (0, 1)^2$ ist

$$\begin{aligned}\lambda &= (k^2 + \ell^2)\pi^2 \quad \text{und} \\ u &= \sin(k\pi x) \sin(\ell\pi y)\end{aligned}$$

für $k, \ell \in \mathbb{N}$ ein Eigenpaar für die schwingende Membran. Es folgt

$$\lambda_1 \approx 1 - \frac{h^2\pi^2}{4}(1^2 + 1^2) = 1 - \frac{h^2\pi^2}{2} ,$$

was das exakte Ergebnis

$$\rho(B) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi h}{2}$$

gut widerspiegelt.

Die Berechnung der Eigenwerte von A_h ist eine interessante Aufgabe. Siehe z.B. Cullum und Willoughby [1985].

4.8 Nichtnegative Matrizen

Für das Modellbeispiel ist $A = D - L - R$ und $B = L + R$, wobei B nichtnegativ und unzerlegbar ist. Es gibt eine schöne Theorie der nichtnegativen Matrizen, die viele Anwendungen hat und leider hier nur kurz aufgegriffen werden kann. (Siehe: Varga [1962], Berman und Plemmons [1979], Seneta [1973], Minc [1988], Windisch [1989].)

Folgender schöner Satz von Perron und Frobenius wurde zwischen 1907 und 1912 bewiesen:

Satz 4.14 (Perron, Frobenius) *Sei A eine $n \times n$ unzerlegbare Matrix, die nichtnegativ ist, d.h. die nichtnegative Komponenten hat. Dann gilt:*

1. Es gibt einen Eigenwert λ_+ von A mit $\lambda_+ = \rho(A) > 0$.
2. Zu λ_+ gehört ein Eigenvektor $w_+ > 0$.
3. λ_+ ist ein einfacher Eigenwert von A .
4. Sei $B \geq A$ und $B \neq A$, dann gilt $\rho(B) > \rho(A)$.

Beweis: Siehe z.B. Varga [1962, S. 30].

Satz 4.15 (Perron, Frobenius - Erweiterung) Sei A eine $n \times n$ nichtnegative Matrix. Dann gilt:

1. Es gibt einen Eigenwert λ_+ von A mit $\lambda_+ = \rho(A) \geq 0$.
2. Sei $\lambda_+ = 0$. Dann ist A zerlegbar und die Jordansche Normalform von A ist eine echte rechte Dreiecksmatrix.
3. Zu λ_+ gehört ein Eigenvektor $w_+ \geq 0$.
4. Sei $B \geq A$, dann gilt $\rho(B) \geq \rho(A)$.

Beweis: Siehe Varga [1962, S. 46].

Sei

$$\begin{aligned} A &= D - L - R \\ B &:= D^{-1}(L + R) \\ \mathcal{L}_\omega &:= (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U] , \end{aligned}$$

so daß B die Jacobi Matrix ist, \mathcal{L}_ω die SOR Iterationsmatrix und \mathcal{L}_1 die Gauß-Seidel Iterationsmatrix.

Es kann durch Beispiele gezeigt werden, daß sowohl $\rho(B) < 1 < \rho(\mathcal{L}_1)$ als auch $\rho(\mathcal{L}_1) < 1 < \rho(B)$ möglich ist. Unter zusätzlichen Bedingungen erhält man allerdings mit Hilfe des Perron-Frobenius-Satzes den folgenden Satz:

Satz 4.16 (Stein, Rosenberg) Sei die Matrix $B = L + R$ nichtnegativ (L und R echte linke bzw. rechte Dreiecksmatrizen), dann gilt für B und $\mathcal{L}_1 = (I - L)^{-1}U$ genau eine der folgenden Beziehungen:

1. $\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(B) = 0$
2. $0 < \rho(\mathcal{L}_1) < \rho(B) < 1$

$$3. \rho(\mathcal{L}_1) = \rho(B) = 1$$

$$4. 1 < \rho(B) < \rho(\mathcal{L}_1)$$

Beweis: Siehe Varga, S. 70.

4.9 Das SOR Verfahren

Der Satz von Stein und Rosenberg besagt, daß unter den gegebenen Voraussetzungen das Gauß-Seidel-Verfahren besser als das Jacobi- Verfahren ist.

Es ist i.a. nicht möglich, eine Beziehung zwischen $\rho(B)$ und \mathcal{L}_1 zu finden, wie das folgende Beispiel von Young zeigt. Für das Modellproblem mit $h = 1/3$ und nur vier inneren Gitterpunkten werden die Gitterpunkte auf drei verschiedene Weisen numeriert:

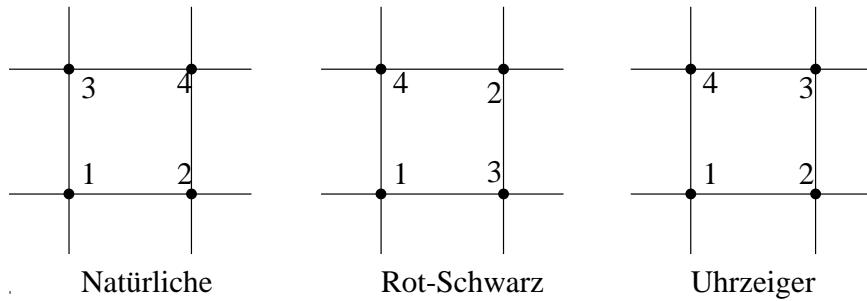


Abbildung 4.3: Verschiedene Numerierungen

Mit der Bezeichnung $\Lambda(A) = \text{Spektrum von } A = \text{Menge aller Eigenwerte von } A$ folgt:

1. Natürliche Numerierung

$$B = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{L}_1 = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rho(B) &= \frac{1}{2} & \rho(\mathcal{L}_1) &= \frac{1}{4} \\ \Lambda(B) &= \{-1/2, 0, 0, 1/2\} & \Lambda(\mathcal{L}_1) &= \{0, 0, 0, 1/4\} \end{aligned}$$

2. Rot-Schwarz-Numerierung

$$B = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{L}_1 = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \rho(B) = \frac{1}{2} & \rho(\mathcal{L}_1) = \frac{1}{4} \\ \Lambda(B) = \{-1/2, 0, 0, 1/2\} & \Lambda(\mathcal{L}_1) = \{0, 0, 0, 1/4\} \end{array}$$

3. Uhrzeiger-Numerierung

$$B = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{L}_1 = \frac{1}{256} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 64 & 0 & 64 \\ 0 & 16 & 64 & 16 \\ 0 & 4 & 16 & 68 \\ 0 & 17 & 4 & 33 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \rho(B) = \frac{1}{2} & \Lambda(\mathcal{L}_1) = \{0, 0, 277, -0, 011 \pm 0, 118i\} \\ \Lambda(B) = \{-1/2, 0, 0, 1/2\} & \end{array}$$

Unter geeigneten Voraussetzungen ist es allerdings möglich, $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ genauer zu beschreiben.

Die folgenden Begriffe sind nützlich:

Definition 4.5 Die Matrix A besitzt die "property A", wenn es eine Permutationsmatrix P gibt, so daß PAP^T die Gestalt

$$PAP^T = \begin{pmatrix} D_1 & M_1 \\ M_2 & D_2 \end{pmatrix}, \quad D_1, D_2 \text{ Diagonalmatrizen}$$

besitzt.

Definition 4.6 Die Matrix $A = D(I - L - R)$, wobei L und R echte linke bzw. rechte Dreiecksmatrizen sind, heißt "konsistent geordnet", falls die Eigenwerte von

$$\alpha L + \alpha^{-1} R, \quad \alpha \neq 0,$$

von α unabhängig sind.

Bemerkung 4.6 Property A \Rightarrow konsistent geordnet.

Satz 4.17 Sei

$$B = \begin{pmatrix} O & B_1 \\ B_2 & O \end{pmatrix}.$$

Sei μ ein Eigenwert von B zum Eigenvektor $(u, v)^T$.

Dann ist $-\mu$ ein Eigenwert von B zum Eigenvektor $(u, -v)^T$.

Beweis: Siehe Birkhoff und Lynch [1984, S. 133].

Satz 4.18 $(u, v)^T$ sei ein Eigenvektor der Jacobi Matrix B zu A , wobei B die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix}$$

habe, mit Eigenwert $\mu \neq 0$. Dann gilt:

- a) $(u, 0)^T$ ist ein Eigenvektor der Gauß-Seidel Matrix \mathcal{L}_1 mit Eigenwert 0 und
 - b) $(u, \mu v)^T$ ist ein Eigenvektor der Gauß-Seidel Matrix mit Eigenwert μ^2 .
- Weiter gilt:
- c) $\text{Kern}(\mathcal{L}_1) \supset \text{Kern}(B)$.

Beweis: (Siehe Birkhoff, Lynch [1984, S. 134].)

Es folgt, daß für Matrizen, die Property A besitzen, das Gauß-Seidel Verfahren zweimal so schnell wie das Jacobi-Verfahren ist. Es entsteht die Frage, ob es möglich ist, ein ω_b zu finden mit

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = \inf_{\omega} \rho(\mathcal{L}_{\omega}).$$

Wir betrachten jetzt symmetrische Matrizen A mit Property A. Für die Jacobi Matrix B gilt dann:

Falls μ ein Eigenwert ist, so ist auch $-\mu$ ein Eigenwert. Die Eigenwerte von \mathcal{L}_1 verteilen sich folgendermaßen:

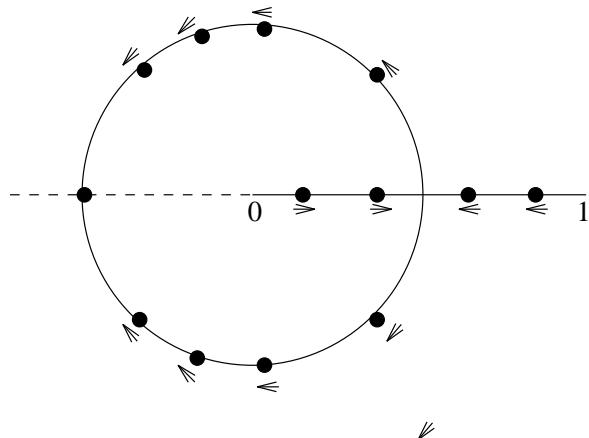
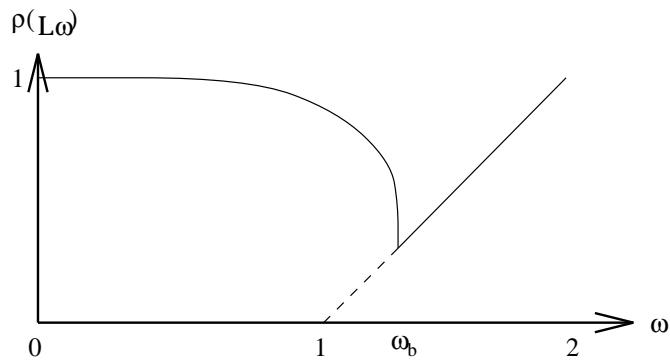
- a) Es gibt eine Menge von Eigenwerten 0.
- b) Die übrigen Eigenwerte sind positiv und liegen zwischen 0 und $\rho(B)^2$.

Es kann bewiesen werden, daß sich die Eigenwerte von \mathcal{L}_{ω} für zunehmendes ω wie in Abbildung 4.4 verhalten: die Nulleigenwerte von \mathcal{L}_1 werden größer, die positiven Eigenwerte von \mathcal{L}_1 werden kleiner. Wenn zwei Eigenwerte sich treffen, bewegen sie sich weiter in der komplexen Ebene auf dem Kreis $|z| = \omega - 1$.

Das Verhältnis von $\rho(\mathcal{L}_{\omega})$ zu ω wird in Abbildung 4.5 dargestellt.

Das SOR Verfahren erreicht den minimalen Wert von $\rho(\mathcal{L}_{\omega})$ bei

$$\omega = \omega_b := 1 + \frac{1 - \sqrt{1 - \rho(B)^2}}{1 + \sqrt{1 - \rho(B)^2}}.$$

Abbildung 4.4: Die Bewegung der Eigenwerte von \mathcal{L}_ω mit zunehmendem ω Abbildung 4.5: Die Funktion $\rho(\mathcal{L}_\omega)$

Satz 4.19 (Young, Varga) *A sei eine konsistent geordnete Matrix. Ferner seien die Eigenwerte von B reell und es gelte $\mu = \rho(B) < 1$. Dann ist*

$$\omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B)^2}}, \quad \rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = \omega_b - 1 = \left(\frac{\rho(B)}{1 + \sqrt{1 - \rho(B)^2}} \right)^2.$$

Allgemein gilt

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) = \begin{cases} \omega - 1 & \text{für } \omega_b \leq \omega \leq 2 \\ 1 - \omega + \frac{1}{2}\omega^2\mu^2 + \omega\mu\sqrt{1 - \omega + \frac{1}{4}\omega^2\mu^2} & \text{für } 0 \leq \omega \leq \omega_b \end{cases}$$

Beweis: Siehe z.B. Stoer und Bulirsch, S. 256.

Für das Modellproblem gilt:

$$\begin{aligned} \rho(B) &\approx 1 - \pi^2 h^2 / 2 \\ \rho(\mathcal{L}_1) &\approx 1 - \pi^2 h^2 \\ \rho(\mathcal{L}_\omega) &\approx 1 - 2\pi h \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeitsverbesserung, die mit SOR erreichbar ist, ist aus Tabelle 4.1 ersichtlich, wobei $N(\mathcal{L}_1)$ die Anzahl der Iterationen ist, die nötig sind, um den Fehler um einen Faktor 1000 zu vermindern.

$1/h$	10	100	200
$\rho(\mathcal{L}_1)$	0,90451	0,99901	0,99975
ρ_{opt} (SOR)	0,52786	0,93909	0,96907
$N(\mathcal{L}_1)$	69	6998	27995
N_{opt} (SOR)	17	195	413

Tabelle 4.1: Vergleich der Gauß-Seidel und SOR Verfahren für das Modellproblem

Literatur:

Berman, A., Plemmons, R.J.: Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Academic Press, 1979.

Birkhoff, G., Lynch, R.E.: Numerical Solution of Elliptic Problems. SIAM 1984.

Cullum, J., Willoughby, R.A.: Lanczos Algorithms for Large Symmetric Eigenvalue Problems. Birkhäuser, 1985. (Programme sind mit Hilfe xnetlib verfügbar.)

Dunford, N, Schwartz, J.T.: Linear Operators. Wiley, 1963.

Garabedian, P.R.: Partial Differential Equations. Wiley, 1964.

Golub, G.H., van Loan, C.F.: Matrix Computations. North Oxford Academic, Oxford, 1983.

Hackbusch, W.: Multigrid Methods and Applications. Springer, 1985.

Hageman, L.A., Young, D.M.: Applied Iterative Methods. Academic Press, 1981.

Jacobi, Carl Gustav (1804-1855): Über eine neue Auflösungsart der bei der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden linearen Gleichungen. Astr.Nachr. 22 Nr. 523 (297-306) 1845.

Michlin, S.G.: Partielle Differentialgleichungen in der mathematischen Physik. Harri Deutsch, 1978.

Minc, H.: Nonnegative Matrices. Wiley, 1988.

Seneta, E.: Nonnegative Matrices, Wiley, 1973.

Smart, D.R.: Fixed Point Theorems. Cambridge, 1974.

Varga, R.S.: Matrix Iterative Analysis. 1962.

Windisch, G.: M-Matrices in Numerical Analysis. Teubner, 1989.

Young, D.: Iterative Solutions of Large Systems, AP 1971.

Kapitel 5

Iterationsverfahren zur Lösung großer linearer Gleichungssysteme: neue Verfahren

Dieses Kapitel befindet sich in Überarbeitung und wird zu einem späteren Zeitpunkt zum Skript hinzugefügt werden.

Kapitel 6

Die Laplace- und Poisson-Gleichung: Methoden der Funktionentheorie

6.1 Zusammenhänge mit der Funktionentheorie

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen der Laplace-Gleichung und der Funktionentheorie.

Definition 6.1 : (Remmert, S. 45)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt holomorph in D , wenn f in jedem Punkt von D komplex differenzierbar ist.

Satz 6.1 : (Remmert, S. 39)

Notwendig für die komplexe Differenzierbarkeit von $f = u + iv$ in $c \in \mathbb{C}$ ist, daß der Realteil u und der Imaginärteil v von f in c partiell differenzierbar ist und daß die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\tag{6.1}$$

erfüllt sind.

Es folgt aus diesem Satz, daß - wenn $f = u + iv$ in D holomorph ist und $u, v \in C^2(D)$ - dann gilt

$$\begin{aligned}\Delta u &= u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ \Delta v &= v_{xx} + v_{yy} = 0,\end{aligned}$$

d.h. u und v sind Lösungen der Laplace-Gleichungen.

Satz 6.2 : Maximum-Prinzip für beschränkte Gebiete (Remmert, S. 203)

Es sei G ein beschränktes Gebiet, und es sei f eine in $\bar{G} := G \cup \partial G$ stetige und in G holomorphe Funktion. Dann nimmt die Funktion $|f|$ ihr Maximum auf dem Rand von G an:

$$\max_{\bar{G}} |f| = \max_{\partial G} |f| .$$

Beweis:

Man stellt fest, daß

$$\begin{aligned}\Delta u^2 &= 2(u_x^2 + u_y^2) \geq 0 \\ \Delta v^2 &= 2(v_x^2 + v_y^2) \geq 0\end{aligned}$$

und wendet das Maximum-Prinzip (für elliptische Gleichungen) auf die Ungleichung

$$\Delta(u^2 + v^2) \geq 0$$

an.

6.2 Transformation der Laplace-Gleichung (siehe z.B. Kantorowitsch und Krylow, S. 331)

Wir betrachten nochmals die Laplace-Gleichung

$$\Delta_{xy}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 . \quad (6.2)$$

Es kommt oft vor, daß Probleme für einfache Gebiete wie Kreis, Quadrat, Kreisring, aufgeschnittene Ebene usw. verhältnismäßig einfach gelöst werden können, während sich bei einer komplizierteren Struktur des Gebietes für die unmittelbare Lösung mitunter sehr große Schwierigkeiten ergeben, selbst für ein so einfaches Problem wie das DIRICHLET-sche.

Man versucht daher, das gegebene Gebiet vorher auf ein einfacheres abzubilden. Bei derartigen Abbildungen ändern sich im allgemeinen nicht nur das Gebiet, für das die Lösung gesucht ist, und die Randbedingungen, sondern auch die Differentialgleichung, die die gesuchte Funktion erfüllen muß.

Die größte Bedeutung haben für die LAPLACEsche Differentialgleichung offensichtlich die Transformationen, denen gegenüber der LAPLACE- Ausdruck invariant bleibt.

Mit Hilfe der Gleichungen

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad (6.3)$$

seien für x und y neue Veränderliche ξ und η eingeführt. Wenn die Veränderlichen x, y im Gebiet D variieren, so variieren die neuen Veränderlichen ξ und η in einem gewissen Gebiet G . Wir wollen untersuchen, wie sich die Differentialgleichung bei dieser Transformation ändert:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\end{aligned}$$

und analog

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Die Differentialgleichung für die Funktion u lautet daher in den Veränderlichen ξ und η

$$\begin{aligned}\Delta_{xy} u &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial u}{\partial \xi} \Delta_{xy} \xi + \frac{\partial u}{\partial \eta} \Delta_{xy} \eta = 0.\end{aligned}\tag{6.4}$$

Damit dies wieder eine LAPLACEsche Differentialgleichung ist, muß offenbar die Transformation (4.3) folgende Forderungen erfüllen:

$$\begin{aligned}\Delta_{xy} \xi &= 0; & \Delta_{xy} \eta &= 0, \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= 0; & \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2.\end{aligned}$$

Die ersten beiden dieser Differentialgleichungen sagen aus, daß ξ und η harmonische Funktionen von x und y sein müssen. Die dritte Differentialgleichung liefert

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} : \frac{\partial \xi}{\partial y} = - \frac{\partial \eta}{\partial y} : \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\mu; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\mu \frac{\partial \xi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \mu \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Wenn man jetzt in der letzten Differentialgleichung an Stelle der Ableitungen von η diese Ausdrücke einsetzt, so erhält man

$$(1 - \mu^2) \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] = 0.$$

Daraus folgt, daß $\mu = \pm 1$ ist, so daß entweder

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (6.5)$$

oder

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (6.6)$$

gilt. Die Differentialgleichungen (4.6) unterscheiden sich von (4.5) lediglich durch Vertauschung von ξ und η und können daher unberücksichtigt bleiben; durch (4.5) wird zum Ausdruck gebracht, daß ξ und η konjugierte harmonische Funktionen sind. Abbildungen, die durch derartige Funktionen vermittelt werden, sind konform, das heißt, im Kleinen ähnlich an allen Stellen der x, y -Ebene, in denen

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \neq 0$$

ist.

Für die Funktion $f(z) = \xi + i\eta$ der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ stellen die Relationen (4.5) die bekannten Regularitätsbedingungen von Cauchy-Riemann dar, und die Laplace-Differentialgleichung erweist sich somit als invariant gegenüber Transformationen, die durch reguläre Funktionen einer komplexen Veränderlichen vermittelt werden. Sei

$$f := \xi + i\eta. \quad (6.7)$$

Dann kann die Gleichung (4.4) folgendermaßen geschrieben werden:

$$\Delta_{xy}u = |f'(z)|^2 \Delta_{\xi\eta}u. \quad (6.8)$$

Insbesondere, ist $\Delta_{xy}u = 0$, dann gilt auch $\Delta_{\xi\eta}u = 0$.

6.3 Konforme Abbildungen

Definition 6.2 Sei $f : D \rightarrow W$. f heißt konform in D , falls f in D holomorph ist und $f'(z) \neq 0$.

Bemerkung 6.1 Sei f eine konforme Abbildung. Sei γ eine Kurve

$$\gamma : z = z(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Die Abbildung von γ unter f ist

$$\gamma' : w = f(z(t)) , \quad \alpha \leq t \leq \beta .$$

Es gilt:

$$w'(t) = f'(z(t)) \cdot z'(t) ,$$

woraus folgt:

1. $w'(t_0) \neq 0$, d.h. γ' hat eine Tangente.
2. $\arg(w'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(z'(t_0))$.
3. $\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{f(z(t)) - f(z_0)}{z(t) - z_0} \right| = |f'(z_0)|$.

Zusammenfassend, die Abbildung f ist winkeltreu, und die Länge wird mit dem Faktor $|f'(z)|$ multipliziert.

Sei $u = u(x, y)$, $\Gamma \subset D$ eine Kurve

$$\begin{aligned} u &= \phi_1 \text{ auf } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \phi_2 \text{ auf } \Gamma . \end{aligned}$$

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine konforme Abbildung $\Gamma' = f(\Gamma)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} u &= \phi_1 \text{ auf } \Gamma' \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= |f'(z)| \cdot \frac{\partial u}{\partial n'} \text{ auf } \Gamma' . \end{aligned}$$

Der Fundamentalsatz lautet (Kantorowitsch und Krylow, S. 332):

Der einfachste Fall einer konformen Abbildung ist der, daß das abzubildende Gebiet einfach zusammenhängend ist. Die Frage nach der Existenz einer eindeutigen Abbildung zweier solcher Gebiete aufeinander wird durch den Riemannschen Abbildungssatz beantwortet:

Sind D und G einfach zusammenhängende schlichte Gebiete in den Ebenen der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ und $\zeta = \xi + i\eta$, die von der Vollebene und der einfach punktierten Ebene verschieden sind, so existiert eine Funktion $\zeta = f(z)$, die in D holomorph ist und die eine konforme eindeutige Abbildung von D auf G vermittelt. Dabei kann man vorschreiben, daß ein in D gegebener Punkt a in einen willkürlich gewählten Punkt α und eine in a gegebene Richtung in eine bestimmte, dem Punkt α

zugeordnete Richtung übergehen sollen.

Durch die Forderung, daß sich zwei innere Punkte und zwei in diesen Punkten gegebene Richtungen entsprechen sollen, ist die Abbildungsfunktion vollständig bestimmt.

Somit hängt die Funktion, die D auf G abbildet, von drei Parametern ab, da der willkürlich vorgegebene Punkt α durch zwei Parameter und die Richtung in ihm durch einen bestimmt ist. Über die Wahl dieser drei Parameter können wir auch anders verfügen, als im Satz von Riemann angegeben. Beispielsweise kann man für Gebiete, die gewissen Einschränkungen unterworfen sind, welche für die praktisch vorkommenden Fälle sicher erfüllt sind, fordern, daß drei vorgegebene Punkte der Berandung des Gebietes D in drei vorgegebene Randpunkte von G übergehen sollen.

6.4 Die Integralgleichung von Theodorsen

Es gibt mehrere Integralgleichungen, deren Lösung eine konforme Abbildung ermittelt (siehe Gaier, S. 6). Wir geben hier nur eine solche Gleichung an:

Real- und Imaginärteil einer in $|z| < 1$ regulären, in $|z| \leq 1$ stetigen Funktion $f(z)$, genommen auf $|z| = 1$, hängen wie folgt zusammen:

Satz 6.3 Es sei $f(z) = u(z) + iv(z)$ (u, v reell) in $|z| < 1$ holomorph, in $|z| \leq 1$ stetig. Dann hat $v(e^{i\varphi})$ folgende Integraldarstellung in $u(e^{i\vartheta})$:

$$v(e^{i\varphi}) = v(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{0(H)}^{2\pi} u(e^{i\vartheta}) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\vartheta .$$

Das Integral ist bezüglich $\vartheta = \varphi$ als Cauchyscher Hauptwert zu nehmen.

Beweis: Gaier, S. 62.

Wir formulieren nun unser Problem der konformen Abbildung und zeigen, wie es auf die Lösung einer Integralgleichung zurückgeführt werden kann.

Vorgelegt sei eine bezüglich $w = 0$ sternige Jordankurve C der w -Ebene, und $\varrho = \varrho(\theta)$ sei ihre Darstellung in Polarkoordinaten. Ihr Inneres heiße G , und es sei die konforme Abbildung $w = f(z)$ von $|z| < 1$ auf G zu bestimmen, die durch $f(0) = 0, f'(0) > 0$ normiert ist.

Nach den Ergebnissen von Caratheodory und Osgood ist $f(z)$ in $|z| \leq 1$ stetig und bildet $|z| \leq 1$ eindeutig auf das abgeschlossene Gebiet \bar{G} ab. Dem Randpunkt $e^{i\varphi}$ entspricht dabei ein Bildpunkt $\varrho(\theta)e^{i\theta}$ mit $\theta = \theta(\varphi)$ auf C . Ist $\theta = \theta(\varphi)$ bekannt, so ist $f(z)$ auf $|z| = 1$ und daher auch für $|z| < 1$ bekannt, etwa auf Grund der Cauchyschen Integralformel. Es ist somit hinreichend, die Ränderzuordnungsfunktion $\theta = \theta(\varphi)$ zu bestimmen.

Diese Funktion $\theta = \theta(\varphi)$ genügt nun einer Integralgleichung. Zu ihrer Ableitung betrachten wir die Hilfsfunktion

$$F(z) = \log \frac{f(z)}{z} = U(z) + iV(z);$$

sie ist durch die Vorschrift, daß $F(0) = \log f'(0)$ reell sei, eindeutig festgelegt, und sie ist in $|z| < 1$ regulär, in $|z| \leq 1$ stetig, ferner $V(0) = 0$.

Weiter ist

$$\begin{aligned} U(z) &= \log \left| \frac{f(z)}{z} \right|, \quad \text{also } U(e^{i\varphi}) = \log \varrho(\theta(\varphi)) \\ V(z) &= \arg \frac{f(z)}{z}, \quad \text{also } V(e^{i\varphi}) = \theta(\varphi) - \varphi, \end{aligned} \tag{6.9}$$

und Satz 4.6 ergibt daher

$$\theta(\varphi) = \varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{0(H)}^{2\pi} \log \varrho(\theta(\vartheta)) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\vartheta \tag{6.10}$$

oder kurz

$$\theta(\varphi) = \varphi + K[\log \varrho(\theta(\varphi))].$$

Dies ist die nichtlineare, singuläre Integralgleichung von Theodorsen zur Ermittlung der gesuchten Ränderzuordnungsfunktion $\theta = \theta(\varphi)$.

6.5 Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip

Satz 6.4 : (siehe z.B. Goluzin, S. 44)

Eine eindeutige konforme Abbildung f eines Gebiets D mit Jordanrand ∂D auf dem offenen Einheitskreis G läßt sich als eine stetige eindeutige Abbildung von \bar{D} auf \bar{G} erweitern.

Ist $\gamma \subset \partial D$ eine offene analytische Jordankurve und $z_0 \in \gamma$, dann ist f holomorph in z_0 und $f'(z_0) \neq 0$.

Satz 6.5 : (Spiegelungsprinzip von Schwarz)

Seien D_z und D_w zwei Gebiete mit $\alpha_z \in \partial D_z$ und $\alpha_w \in \partial D_w$, wo α_z und α_w Geradensegmente sind. Sei $w = f(z)$ eine konforme Abbildung von D_z auf D_w . Sei $f(\alpha_z) = \alpha_w$. Dann läßt sich f über α_z hinaus wie analytisch fortsetzen:

Spiegelt man D_z an α_z und ordnet man dem Spiegelbild z^* von z den durch Spiegelung von $w = F(z)$ und α_w hervorgegangenen Wert w zu, so ist die so definierte

Funktion $w^* = f(z^*)$ in dem gespiegelten Gebiet D_w^* analytisch und somit eine analytische Fortsetzung von f .

Beweis: (siehe z.B. Nehari, S. 184)

O.E. nehmen wir an, daß α_z und α_w Intervalle der reellen Achse sind. D.h., $z^* = \bar{z}$, $w^* = \bar{w}$.

Die Funktion

$$g(z) := \overline{f(\bar{z})}$$

ist holomorph in D_z^* wie man z.B. aus der Cauchy-Riemann-Gleichung sieht. Auf α_z gilt:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= z, \\ \overline{f(\bar{z})} &= f(\bar{z}) = f(z),\end{aligned}$$

da $f(z)$ dort reell ist.

Durch Addition der Integrale

$$\int_{\partial D_z} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

und

$$\int_{\partial D_z^*} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

folgt, daß die Funktion

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & , \quad z \in D_z \cup \alpha_z \\ g(z) & , \quad z \in D_z^* \cup \alpha_z \end{cases}$$

in $D_z^* \cup \alpha_z \cup D_z$ holomorph ist.

6.6 Die Formel von Christoffel-Schwarz

6.6.1 Herleitung (siehe Kantorowitsch und Krylow, S. 475, und Nehari, S. 189)

Es sei $w = f(z)$ eine Funktion, die eine konforme Abbildung der oberen z -Halbebene D auf das Innere G eines gegebenen Polygons A der w -Ebene mit den Innenwinkeln $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$ und den Eckpunkten A_1, A_2, \dots, A_n vermittelt. Die Punkte $A_{nu} (\nu = 1, \dots, n)$ entsprechen dann gewissen Punkten a_1, a_2, \dots, a_n der reellen Achse der z -Ebene, von denen wir annehmen wollen, daß sie alle im Endlichen liegen und in der Ordnung

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

aufeinanderfolgen

Der Rand ∂G des Polynoms ist eine Jordan-Kurve, so daß sich (Satz 4.6 im vorherigen Absatz) die Abbildung f stetig und eindeutig erweitern läßt:

$$f : D \cup \partial D \rightarrow G \cup \partial G .$$

Das Intervall $\alpha = (a_k, a_{k+1})$ ist eine analytische Jordan-Kurve, so daß f auf α holomorph und konform ($f' \neq 0$) ist.

Sei nun $\alpha_z^{(1)} := (a_1, a_2)$, $\alpha_w^{(1)} = f(\alpha_z^{(1)})$. Wegen des Schwarzschen Spiegelungsprinzips läßt sich f durch Spiegelung auf der unteren Halbebene D^* analytisch fortsetzen. Sei f_1 die dadurch gewonnene Funktion:

$$f_1 : D^* \rightarrow G^* .$$

Sei $\alpha_z^{(2)} := (a_2, a_3)$, $\alpha_w^{(2)} = f_1(\alpha_z^{(2)})$.

Wegen des Schwarzschen Spiegelungsprinzips läßt sich f_1 durch Spiegelung auf der oberen Halbebene $(D^*)^* = D$ analytisch fortsetzen. Sei f_2 diese Funktion:

$$f_2 : D \rightarrow (G^*)^* .$$

Das Polygon G kann durch eine Drehung und eine Verschiebung auf $(G^*)^*$ abgebildet werden:

$$\begin{aligned} f_3 &: G \rightarrow (G^*)^* , \\ &z \rightarrow Az + B , \end{aligned}$$

wo A und B komplexe Konstanten sind.

Es folgt:

$$f_2(z) = (f_3 \circ f)(z) = Af(z) + B .$$

Sei g die ‘Schwarzsche Funktion’

$$g(z) := \frac{f''(z)}{f'(z)}.$$

Sei

$$H := \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Da

$$\frac{f_z''(z)}{f_z'(z)} = \frac{f''(z)}{f'(z)}$$

folgt, daß durch die o.a. analytische Fortsetzung von f , g als eindeutige holomorphe Funktion in H definiert wird.

Wir werden jetzt das Verhalten der Funktion $g(z)$ in der Umgebung der Punkte a_1, \dots, a_n untersuchen. Sei

$$h(z) := [f(z) - f(a_1)]^{\frac{1}{\alpha_1}}.$$

Sei

$$\begin{aligned} U_\epsilon &:= \{z = x + iy : y > 0 \text{ und } |z - a_1| < \epsilon\}, \\ \alpha_z^{(1)} &:= \{x : -\epsilon < x - \Re a_1 \leq 0\}, \\ \alpha_z^{(2)} &:= \{x : 0 \leq x - \Re a_1 < \epsilon\}. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(\alpha_z^{(1)}) &= A_n A_1, \\ f(\alpha_z^{(2)}) &= A_1 A_2, \end{aligned}$$

so daß h das Geradensegment $\alpha_z^{(1)} \cup \alpha_z^{(2)}$ auf einem Geradensegment abbildet. Aufgrund des Schwarzschen Spiegelungsprinzips folgt dann, daß h eine volle Umgebung des Punktes a_1 konform und eineindeutig auf eine volle Umgebung des Punktes 0 abbildet. D.h. h ist in $z = a_1$ holomorph.

Sei nun $\mu_1 := 1 - \alpha_1$. Es folgt

$$f(z) = f(a_1) + h(z)^{1-\mu_1}$$

mit $h(z)$ holomorph in $z = a_1$ und $h'(a_1) \neq 0$. D.h.

$$h(z) = (z - a_1)h_1(z)$$

mit h_1 holomorph und $h_1(a_1) \neq 0$. Es folgt

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{-\mu_1}{(z - a_1)} + k(z)$$

mit $k(z)$ holomorph in $z = a_1$. Nach wiederholter Benutzung dieses Arguments können wir folgern, daß

$$g_1(z) := g(z) + \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{k - a_k}$$

in \mathbb{C} holomorph ist. Nach dem Satz von Liouville ist $g_1(z)$ konstant.

In einer Umgebung von $z = \infty$ gibt es eine Entwicklung von $f(z)$,

$$f(z) = f(\infty) + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots,$$

wodurch leicht einzusehen ist, daß

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Wir können sofort daraus schließen, daß $g_1(\infty) = 0$, so daß

$$g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{1 - \alpha_k}{z - a_k}.$$

Durch zweimalige Integration erhält man nacheinander

$$\begin{aligned} \ln f'(z) &= \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \ln(z - a_k) + \ln C_1 = \ln C_1 (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (z - a_n)^{\alpha_n - 1}, \\ f(z) &= C_1 \int_0^z (v - a_1)^{\alpha_1 - 1} (v - a_2)^{\alpha_2 - 1} \cdots (v - a_n)^{\alpha_n - 1} dv + C_2. \end{aligned}$$

Das ist die gesuchte Darstellung der Abbildung $f(z)$. Diese Formel bezeichnet man gewöhnlich als die Formel von Christoffel-Schwarz.

6.6.2 Die Parameterwerte des Christoffel-Schwarzschen Integrals (siehe Kantorowitsch und Krylow, S. 477)

Die Funktion

$$w = C_1 \int_0^z (v - a_1)^{\alpha_1-1} (v - a_2)^{\alpha_2-1} \cdots (v - a_n)^{\alpha_n-1} dv + C_2 , \quad (6.11)$$

welche die obere z -Halbebene auf das Innere eines Polygons der w -Ebene abbildet, enthält $2n+2$ Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, a_1, \dots, a_n, C_1, C_2$. Sind die Werte aller dieser Parameter bekannt, so ist auch das Polygon bestimmt. Die Innenwinkel des Polygons sind gleich $\alpha_1, \pi, \alpha_2\pi, \dots, a_n\pi$. Die Koordinaten b_k der Eckpunkte A_k erhält man aus den Gleichungen

$$b_k = C_1 \int_0^{a_k} (z - a_1)^{\alpha_1-1} (z - a_2)^{\alpha_2-1} \cdots (z - a_n)^{\alpha_n-1} dt + C_2 , \quad 1 \leq k \leq n . \quad (6.12)$$

Für die Länge der Seite $A_k A_{k+1}$ berechnet man

$$\begin{aligned} A_k A_{k+1} &= |b_{k+1} - b_k| = \left| C_1 \int_0^{a_{k+1}} (z - a_1)^{\alpha_1-1} (z - a_2)^{\alpha_2-1} \cdots (z - a_n)^{\alpha_n-1} dt + \right. \\ &\quad \left. + C_2 - \left[C_1 \int_0^{a_k} (z - a_1)^{\alpha_1-1} (z - a_2)^{\alpha_2-1} \cdots (z - a_n)^{\alpha_n-1} dt + C_2 \right] \right| = \\ &= |C_1| \int_{a_k}^{a_{k+1}} (z - a_1)^{\alpha_1-1} (z - a_2)^{\alpha_2-1} \cdots (z - a_k)^{\alpha_k-1} (a_{k+1} - z)^{\alpha_{k+1}-1} \cdots \times \\ &\quad \times \cdots (a_n - z)^{\alpha_n-1} dt . \quad (6.13) \end{aligned}$$

In der Praxis ist gewöhnlich eine Funktion gesucht, die eine konforme Abbildung einer Halbebene auf das Innere eines vollständig bestimmten Polygons vermittelt. Die Parameter

$$a_1, a_2, \dots, a_n, C_1, C_2$$

in der Abbildungsformel müssen dann in entsprechender Weise gewählt werden. Das Verhältnis der 2-ten, 3-ten, ..., $(n-2)$ -ten Seite zur ersten Seite bezeichnen wir mit $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-2}$.

$$\frac{\text{Seitenlänge } A_k A_{k+1}}{\text{Seitenlänge } A_1 A_2} = \lambda_k , \quad 2 \leq k \leq n-1 . \quad (6.14)$$

Wählen wir in der Funktion

$$w^* = \int_0^z (v - a_1)^{\alpha_1-1} (v - a_2)^{\alpha_2-1} \cdots (v - a_n)^{\alpha_n-1} dv$$

die a_1, a_2, \dots, a_n so, daß die Relationen (4.14) erfüllt sind, so vermittelt diese Funktion eine konforme Abbildung der oberen Halbebene auf das Innere eines zu G ähnlichen Polygons G^* . Durch eine lineare Abbildung der Form

$$w = C_1 w^* + C_2$$

kann das Polygon G^* auf G jetzt abgebildet werden.

Zur Bestimmung der Parameter a_1, a_2, \dots, a_n haben wir nur $n - 3$ Gleichungen zur Verfügung. Daher können drei Parameter völlig willkürlich gewählt werden. Dies entspricht der Tatsache, daß wir in dem Integral (4.11) eine linear gebrochene Substitution vornehmen können, welche die obere Halbebene so in sich transformiert, daß drei Punkte der reellen Achse in drei beliebig vorgegebene Punkte derselben übergehen. Diese willkürlichen Punkte seien $z = a_1$, $z = a_2$ und $z = a_n$. Wir bezeichnen sie im Unterschied zu den anderen Punkten, die bestimmt werden müssen, mit p_1, p_2 und p_3 . Die Relationen (4.14) lauten ausführlich geschrieben:

$$\left. \begin{aligned} I_2(a_3, a_4, \dots, a_{n-1}) &= \lambda_2 I_1(a_3, a_4, \dots, a_{n-1}), \\ I_3(a_3, a_4, \dots, a_{n-1}) &= \lambda_3 I_1(a_3, a_4, \dots, a_{n-1}), \\ \dots & \\ I_{n-2}(a_3, a_4, \dots, a_{n-1}) &= \lambda_{n-2} I_1(a_3, a_4, \dots, a_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_{p_1}^{p_2} (z - p_1)^{\alpha_1 - 1} (p_2 - z)^{\alpha_2 - 1} (a_3 - z)^{\alpha_3 - 1} \dots \times \\ &\quad \times \dots (a_{n-1} - z)^{\alpha_{n-1} - 1} (p_3 - z)^{\alpha_n - 1} dt, \\ I_2 &= \int_{p_2}^{a_3} (z - p_1)^{\alpha_1 - 1} (z - p_2)^{\alpha_2 - 1} (a_3 - z)^{\alpha_3 - 1} \dots \times \\ &\quad \times \dots (a_{n-1} - z)^{\alpha_{n-1} - 1} (p_3 - z)^{\alpha_n - 1} dt, \\ \dots & \\ I_{n-2} &= \int_{a_{n-2}}^{a_{n-1}} (z - p_1)^{\alpha_1 - 1} (z - p_2)^{\alpha_2 - 1} (z - a_3)^{\alpha_3 - 1} \dots \times \\ &\quad \times \dots (z - a_{n-2})^{\alpha_{n-2} - 1} (a_{n-1} - z)^{\alpha_{n-1} - 1} (p_3 - z)^{\alpha_n - 1} dt. \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

6.6.3 Die Christoffel-Schwarz-Formel: Ein Beispiel

Das Polygon G sei ein Dreieck mit den Winkeln $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \alpha_3\pi$. Da zwei Dreiecke mit gleichen Winkeln immer ähnlich sind, können wir in diesem Falle die Konstanten a_k beliebig wählen. Wir setzen $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$. Die Abbildungsfunktion hat die Form

$$w = C_1 \int_0^z v^{\alpha_1 - 1} (1 - v)^{\alpha_2 - 1} dv + C_2 .$$

Zu ihrer vollständigen Bestimmung ist es notwendig, die Konstanten C_1 und C_2 zu ermitteln. Wir bestimmen C_1 und C_2 für ein gleichschenklig-rechtwinkelges Dreieck, dessen Ecken die Punkte $A_1(0)$, $A_2(1)$ und $A_3(i)$ sind.

Dem Punkt $z = 0$ möge der Eckpunkt A_1 und dem Punkt $z = 1$ der Eckpunkt A zugeordnet sein. Dann ist $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{4}$, und die Abbildungsfunktion lautet

$$w = C_1 \int_0^z v^{-\frac{1}{2}} (1-v)^{-\frac{3}{4}} dv + C_2 .$$

Da nach Voraussetzung $z = 0$ in $w = 0$ übergeht, ist $C_2 = 0$. Für $z = 1$ müssen wir die Koordinate des Eckpunktes A_2 erhalten. Somit ergibt sich für C_1 die Gleichung

$$C_1 \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-z)^{-\frac{3}{4}} dt = 1 ,$$

das heißt, es ist

$$C_1 = \frac{1}{\int_0^1 z^{-\frac{1}{2}} (1-z)^{-\frac{3}{4}} dz} .$$

Wir wollen das im Nenner stehende Integral

$$I = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-z)^{-\frac{3}{4}} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} (1-z)^{-\frac{3}{4}} dz + \int_{\frac{1}{2}}^1 z^{-\frac{1}{2}} (1-z)^{-\frac{3}{4}} dz = I_1 + I_2$$

berechnen.

Zunächst betrachten wir I_1 . Den Integranden stellen wir in der Form

$$z^{-\frac{1}{2}} (1-z)^{-\frac{3}{4}} = z^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{4} z \right) + z^{-\frac{1}{2}} \left[(1-z)^{-\frac{3}{4}} - 1 - \frac{3}{4} z \right]$$

dar und erhalten

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{4} z \right) dz + \int_0^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} \left[(1-z)^{-\frac{3}{4}} - 1 - \frac{3}{4} z \right] dz .$$

Das erste dieser Integrale lässt sich explizit berechnen; sein Wert ist gleich 1,5910. Das zweite berechnen wir nach der Simpsonschen Formel. Wir bezeichnen

$$z^{-\frac{1}{2}} \left[(1-z)^{-\frac{3}{4}} - 1 - \frac{3}{4} z \right]$$

mit $y(z)$; dann ist

$$\begin{aligned}
y(0) &= 0, & y\left(\frac{1}{16}\right) &= 0,0104, & y\left(\frac{1}{8}\right) &= 0,0328, \\
y\left(\frac{3}{16}\right) &= 0,0644, & y\left(\frac{1}{4}\right) &= 0,1066, & y\left(\frac{5}{16}\right) &= 0,1612, \\
y\left(\frac{3}{8}\right) &= 0,2309, & y\left(\frac{7}{16}\right) &= 0,3198, & y\left(\frac{1}{2}\right) &= 0,4339, \\
\int_0^{\frac{1}{2}} y(z) dt &= 0,0707, \\
I_1 &= 1,5910 + 0,0707 = 1,6617.
\end{aligned}$$

Nun gehen wir zur Berechnung von I_2 über. Den Integranden stellen wir in der Form

$$z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{3}{4}} = (1-z)^{-\frac{3}{4}} \left[1 + \frac{1}{2}(1-z) \right] + (1-z)^{-\frac{3}{4}} \left[z^{-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2}(1-z) \right]$$

dar und erhalten

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{-\frac{3}{4}} \left[1 + \frac{1}{2}(1-z) \right] dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{-\frac{3}{4}} \left[z^{-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2}(1-z) \right] dt.$$

Der Wert des ersten Integrals ist gleich 3,5318.

Das zweite Integral läßt sich ebenso berechnen wie der zweite Teil des Integrals I_1 . Man findet hierfür den Wert 0,0506, so daß

$$I_2 = 3,5824, \quad I = I_1 + I_2 = 5,2441$$

und somit

$$C_1 = \frac{1}{5,2441} = 0,1907$$

ist. Das Problem ist damit vollständig gelöst.

Um unser Resultat nachzuprüfen, berechnen wir noch die Hypotenuse des Dreiecks

$$\begin{aligned}
A_2 A_3 &= 0,1907 \int_1^\infty z^{-\frac{1}{2}}(z-1)^{-\frac{3}{4}} dt; \\
\int_1^\infty z^{-\frac{1}{2}}(z-1)^{-\frac{3}{4}} dt &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{3}{4}}(1-\tau)^{-\frac{3}{4}} d\tau \quad \left(\tau = \frac{1}{z} \right); \\
\int_0^{\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{3}{4}}(1-\tau)^{-\frac{3}{4}} d\tau &= \int_0^{\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{3}{4}\tau \right) d\tau + \int_0^{\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{3}{4}} \left[(1-\tau)^{-\frac{3}{4}} - 1 - \frac{3}{4}\tau \right] d\tau = \\
&= 3,6158 + 0,0922 = 3,7080; \quad A_2 A_3 = 0,1907 \cdot 2 \cdot 3,7080 = 1,4142.
\end{aligned}$$

Der genaue Wert von $A_2 A_3$ ist gleich $\sqrt{2} = 1,4142 \dots$

Literatur

Gaier, D.: Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. Berlin: Springer, 1964.

Kantorowitsch, L.W., Krylow, W.I.: Näherungsmethoden der höheren Analysis. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1956.

Nehari, Z.: Conformal Mapping. New York.

Remmert, R.: Funktionentheorie I (zweite Ausgabe). Berlin: Springer, 1989.

Schwarz, H.A.: Über einige Abbildungsaufgaben. Ges.Math. Abh. 1869 Bd. II, Seite 65-83.

Trefethen, L.N. (Herausgeber): Numerical Conformal Mapping. Amsterdam, North-Holland, 1986.

Kapitel 7

Die Laplace-Gleichung: Integralgleichungen

7.1 Einleitung

Die Lösung partieller Differentialgleichungen mit Hilfe von Integralgleichungen hat eine sehr lange Geschichte. In der Tat sind solche Methoden schon vor der Herleitung der Theorie partieller Differentialgleichungen benutzt worden. Der erste Beweis, daß das Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung lösbar ist, wurde durch Neumann 1866(?) gegeben, und er benutzt Integralgleichungen. Siehe Enzyklopädie der Mathematik wegen der früheren Geschichte dieses Gebietes.

Die numerische Lösung von Randwertaufgaben durch die numerische Lösung von Integralgleichungen ist auch sehr lange bekannt. Z.B. hat Trefftz (1913) die Strömung eines Wasserstrahls auf diese Weise gelöst. In letzter Zeit ist dieses Verfahren als die “Boundary-Element” Methode bekannt geworden.

7.2 Integralgleichungen für die Laplace-Gleichung

Wir betrachten das Dirichlet-Randwertproblem in zwei Dimensionen:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 , \quad \text{in } \Omega , \tag{7.1}$$

$$u = f \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega . \tag{7.2}$$

Es gibt drei bekannte Darstellungen der Lösung u von (5.1) als Integrale auf $\Gamma := \partial\Omega$.

7.2.1 Die Integralgleichung für eine Doppelschicht

(Siehe Kantorowitsch und Krylow, S. 115.)

Bezeichnet man mit r den Abstand zwischen den Punkten $z = x + iy = P(x, y)$ und $\zeta = \xi + i\eta = M(\xi, \eta)$, so ist

$$\begin{aligned} u := \Re(\ln(z - \zeta)) = \ln r &= \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \end{aligned} \quad (7.3)$$

eine Lösung der Laplace-Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (7.4)$$

Die Ableitungen der Funktion u nach den Parametern ξ und η sind ebenfalls harmonisch, beispielsweise gilt für $\frac{\partial u}{\partial \xi}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Daraus folgt, daß auch die Ableitung von u (als Funktion der Variablen ξ und η) in einer beliebigen konstanten Richtung L , die eine Linearkombination von $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ ist, ebenfalls eine harmonische Funktion darstellt.

Wenn man mit φ den Winkel bezeichnet, den der Vektor \vec{PM} mit der Richtung L bildet, so lautet diese Ableitung

$$\frac{\partial u}{\partial L} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial L} = \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Also ist $\frac{\cos \varphi}{r}$ eine harmonische Funktion.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen kommen wir zur Untersuchung des Dirichlet-Problems. Es sei ein endliches Gebiet Ω gegeben, das durch eine einfach geschlossene Kurve $\partial\Omega$ begrenzt ist. Wir nehmen an, daß die Berandung in der Parameterdarstellung

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leq s \leq s_0)$$

gegeben ist; als Parameter verwenden wir die Bogenlänge s . Wir setzen voraus, daß die Funktionen $x(s)$ und $y(s)$ stetige Ableitungen $x'(s)$ und $y'(s)$ besitzen, die nicht gleichzeitig Null werden. Es soll eine Funktion u gefunden werden, die in Ω harmonisch ist und auf der Berandung in eine vorgegebene stetige Funktion $f(s)$ der Bogenlänge s übergeht, das heißt, es sei

$$u = f(s) \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Wir wählen einen beliebigen Punkt $M(\xi, \eta)$ auf $\partial\Omega$ und bezeichnen mit φ den Winkel, der durch den Vektor \vec{PM} und die äußere Normale in M gebildet wird. Nach dem oben

Gesagten ist $\frac{\cos \varphi}{r}$ eine harmonische Funktion der Veränderlichen x und y in Ω . Es sei jetzt $\mu(s)$ eine willkürliche stetige Funktion. Dann ist auch das Integral

$$V(x, y) := \int_0^{s_0} \frac{\cos \varphi}{r} \mu(s) ds \quad (7.5)$$

eine im Gebiet Ω harmonische Funktion der Veränderlichen x und y .

Die Funktion V nennt man das Potential einer Doppelschicht, und $\mu(s)$ heißt seine Dichte. Wir geben V eine andere Form, um die geometrische Bedeutung klarer hervortreten zu lassen. Mit ω bezeichnen wir den Winkel, den der Vektor \vec{PM} mit der positiven x -Achse bildet. Wenn man die Lage des Punktes M ändert, so ist ω eine Funktion von s , und $d\omega$ ist der Winkel, unter dem das Bogenelement ds von P aus gesehen wird. Die Projektion von ds auf das Lot zum Vektor \vec{PM} ist $ds \cos \varphi$. Daher ist der Winkel, unter dem ds vom Punkte P aus erscheint, gleich $\frac{\cos \varphi ds}{r}$, also ist $\frac{\cos \varphi}{r} ds = d\omega$. Man kann somit V die Gestalt

$$V = \int_0^{s_0} \frac{\cos \varphi}{r} \mu(s) ds = \int_{\partial\Omega} \mu(s) d\omega = \int_0^{s_0} \frac{d\omega}{ds} \mu(s) ds \quad (7.6)$$

geben. Dabei ist ω eine Funktion von s, x und y , also $\omega = \omega(s, x, y)$; s_0 bezeichnet die Länge $\partial\Omega$.

Haben wir insbesondere die Dichte $\mu(s) = 1$, dann liefert $V = \int_0^{s_0} d\omega$ offensichtlich den Winkel, unter dem die gesamte Kurve $\partial\Omega$ vom Punkte P aus gesehen wird. Es ist klar, daß dieser Winkel gleich 2π ist, wenn P innerhalb $\partial\Omega$ liegt; er ist gleich π , wenn P ein Punkt der Berandung $\partial\Omega$ ist, und schließlich gleich Null, wenn P außerhalb $\partial\Omega$ liegt:

$$\int_0^{s_0} \frac{d\omega}{ds} ds = \begin{cases} 2\pi & , \text{ falls } P \text{ innerhalb } \partial\Omega , \\ \pi & , \text{ falls } P \text{ auf } \partial\Omega , \\ 0 & , \text{ falls } P \text{ außerhalb } \partial\Omega . \end{cases} \quad (7.7)$$

Wir versuchen jetzt, eine Lösung des Dirichlet-Problems in Form eines Potentials einer Doppelschicht zu ermitteln. Dazu machen wir den Ansatz

$$u(x, y) = \int_0^{s_0} \mu(s) \frac{d\omega}{ds} ds \quad (7.8)$$

und suchen die unbekannte Dichte $\mu(s)$ derart zu bestimmen, daß die Funktion $u(x, y)$ bei Annäherung an die Berandung gegen die Werte von $f(s)$ konvergiert.

Wir wollen also feststellen, welchen Grenzwert $u(x, y)$ hat, wenn $P(x, y)$ gegen einen Punkt $P_0(x(\sigma), y(\sigma)) \in \partial\Omega$ strebt. Man erhält wegen $\int_0^{s_0} \mu(s) d\omega(s, \sigma) = \pi\mu(\sigma)$,

$$\begin{aligned}
 \lim_{P \rightarrow P_0} u(x, y) &= \lim_{P \rightarrow P_0} \int_0^{s_0} \mu(s) d\omega \\
 &= \lim_{P \rightarrow P_0} \left[\int_0^{s_0} [\mu(s) - \mu(\sigma)] \frac{d\omega(s, x, y)}{ds} ds + \mu(\sigma) \int_0^{s_0} \frac{d\omega(s, x, y)}{ds} ds \right] \\
 &= \lim_{P \rightarrow P_0} \left[\int_0^{\sigma-\epsilon} [\mu(s) - \mu(\sigma)] \frac{d\omega(s, x, y)}{ds} ds \right. \\
 &\quad + \int_{\sigma-\epsilon}^{\sigma+\epsilon} [\mu(s) - \mu(\sigma)] \frac{d\omega(s, x, y)}{ds} ds \\
 &\quad \left. + \int_{\sigma+\epsilon}^{s_0} [\mu(s) - \mu(\sigma)] \frac{d\omega(s, x, y)}{ds} ds \right. \\
 &\quad \left. + \mu(\sigma) \int_0^{s_0} \frac{d\omega(s, x, y)}{ds} ds \right], \\
 &= \int_0^{s_0} [\mu(s) - \mu(\sigma)] \frac{d\omega(s, \sigma)}{ds} ds + 2\pi\mu(\sigma) \\
 &= \int_0^{s_0} \mu(s) \frac{d\omega(s, \sigma)}{ds} ds + \pi\mu(\sigma)
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

mit

$$\omega(s, \sigma) := \omega(s, x(\sigma), y(\sigma)).$$

Also muß

$$\pi\mu(\sigma) + \int_0^{s_0} \mu(s) \frac{d\omega}{ds} ds = f(\sigma) \tag{7.10}$$

gelten.

Die erhaltene Relation ist eine Integralgleichung für die unbekannte Funktion $\mu(s)$. Wenn man durch π dividiert, so bekommt man

$$\mu(\sigma) - \int_0^{s_0} K(s, \sigma) \mu(s) ds = \frac{1}{\pi} f(\sigma). \tag{7.11}$$

Die Gleichung (5.11) ist eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art.

Der Kern $K(s, \sigma)$ kann, wenn man den geometrisch evidenten Ausdruck für den Winkel $\omega(s, \sigma)$ benutzt, in der Form

$$K(s, \sigma) = -\frac{1}{\pi} \frac{d\omega}{ds} = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y(s) - y(\sigma)}{x(s) - x(\sigma)} \tag{7.12}$$

geschrieben werden.

Wenn man in (5.11) vor dem Integralzeichen einen Parameter λ einführt,

$$\mu(\sigma) - \lambda \int_0^{s_0} K(s, \sigma) \mu(s) ds = \frac{1}{\pi} f(\sigma), \quad (7.13)$$

so kann man zeigen, daß der Wert $\lambda = 1$, der für uns interessant ist, kein Eigenwert für die gegebene Integralgleichung ist. Daher hat (5.11) auf Grund der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen für beliebiges $f(\sigma)$ genau eine Lösung.

Ist $\partial\Omega$ konvex, so folgt die Behauptung, daß $\lambda = 1$ kein Eigenwert ist und zwar aus der Tatsache, daß

$$K(s, \sigma) \leq 0, \quad \int_0^{s_0} K(s, \sigma) ds = 1,$$

wie schon von Neumann bemerkt. Der Beweis im allgemeinen Fall wurde erst von Fredholm im Jahre 1906 erbracht.

Für die angenäherte Bestimmung der Lösung spielt die Verteilung der Eigenwerte dieser Gleichung eine wesentliche Rolle. Vor allem kann man zeigen, daß diese reell sind. Ferner ist $\lambda = -1$ ein Eigenwert, da eine Konstante $\mu(s) = C$ offenbar die zu (5.13) mit $\lambda = -1$ gehörige homogene Integralgleichung erfüllt. Es gilt nämlich unter Benutzung von (5.7)

$$\pi C - \int_0^{s_0} C \frac{d\omega(s, \sigma)}{ds} ds = 0.$$

Schließlich kann man feststellen, daß es im Intervall $(-1, 1)$ keine Eigenwerte gibt.

Zuletzt schreiben wir (5.11) in noch einer Form. Sei $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, \mathbf{n}_y = äußere Normale zu Γ in der Stelle $\mathbf{y} \in \Gamma$, $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$.

Es läßt sich feststellen, daß

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \\ &= \left(n_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \\ &= (n_1, n_2) \cdot \mathbf{r} / |\mathbf{r}|^2, \\ &= \cos \varphi / |\mathbf{r}|, \end{aligned}$$

so daß

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| ds_y = d\omega_y .$$

Es folgt, daß die Gleichung (5.11) auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$f(x) = \pi\mu(x) + \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| ds_y \quad \text{für } x \in \Gamma . \quad (7.14)$$

7.2.2 Die Integralgleichung für eine einfache Schicht

Gesucht ist eine Lösung u des Dirichlet-Problems

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 , \quad \text{in } \Omega \quad (7.15)$$

$$u = f , \quad \text{auf } \Gamma . \quad (7.16)$$

Für festes $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ ist

$$u(\mathbf{x}) := \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \ln[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{1/2}$$

eine Lösung (5.15). Deshalb ist

$$u(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{y}) \ln|\mathbf{y} - \mathbf{x}| ds_y , \quad x \in \Omega \quad (7.17)$$

eine Lösung Gleichung (5.15) für jedes $\sigma \in C(\Gamma)$. Hierbei ist s_y die Länge entlang Γ .

Damit u die Randbedingung (5.16) erfüllt, ist es erforderlich, daß σ folgende Integralgleichung erfüllt:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{y}) \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| ds_y , \quad x \in \Gamma \quad (7.18)$$

Gleichung (5.18) heißt eine *Integralgleichung Erster Art*.

7.2.3 Anwendung der Greenschen Formel

Für $u, v \in C^2(\bar{G})$ gilt:

$$\iint_G (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial G} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds . \quad (7.19)$$

Für vorgeschriebene $\mathbf{x} \in \Omega$ und $\epsilon > 0$ seien

$$\begin{aligned} v(\mathbf{y}) &:= \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \text{und} \quad \Gamma_\epsilon := \{\mathbf{y} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \epsilon\} , \\ G &:= \Omega \setminus B_\epsilon , \quad B_\epsilon := \{\mathbf{y} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \epsilon\} . \end{aligned}$$

Dann gilt, falls $\Delta u = \Delta v = 0$ in Ω :

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} \left[u(\mathbf{y}) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}_y} - v(\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_y} \right] ds_y + \\ &+ \int_{\Gamma_\epsilon} \left[u(\mathbf{y}) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}_y} - v(\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_y} \right] ds_y = 0 . \end{aligned} \tag{7.20}$$

Durch einen Grenzwertprozeß folgt:

$$-2\pi u(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \left[u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right] ds_y , \quad \mathbf{x} \notin \Gamma \tag{7.21}$$

und deshalb

$$\pi u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \left[f(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right] ds_y , \quad \mathbf{x} \in \Gamma . \tag{7.22}$$

Es ist hiermit möglich, die gemischte Randwertaufgabe

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = \gamma , \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$

zu lösen.

7.3 Numerische Lösung von Integralgleichungen

Im vorherigen Absatz haben wir u.a. folgende Integralgleichung betrachtet:

$$\mu(\mathbf{x}) + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}| ds_y = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (7.23)$$

Dies ist ein spezieller Fall des folgenden Problems: X sei ein Banachraum.

$K \in B(X) := \{ \text{Menge stetiger beschränkter linearer Abbildungen von } X \text{ in sich} \}$.

$f \in X$ sei gegeben. Gesucht ist $x \in X$:

$$(I - K)x = f. \quad (7.24)$$

Naheliegend ist der Ansatz, den Operator K durch eine Folge von Operatoren $K_n \in B(X)$, $n \in \mathbb{N}$ und f durch $\{f_n \in X_n \subset X\}_{n \in \mathbb{N}}$ zu approximieren und x durch die Lösung der Gleichung

$$(I - K_n)x_n = f_n \quad (7.25)$$

zu approximieren.

Satz 7.1 X sei ein Banachraum, $A \in B(X)$, mit $\|A\| < 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (I - A)^{-1} &\in B(X) \\ \|(I - A)^{-1}\| &\leq \frac{1}{1 - \|A\|}. \end{aligned}$$

Beweis:

Die Abbildung $(I - A)$ ist injektiv, weil $(I - A)x_1 = (I - A)x_2$ impliziert

$$\|x_1 - x_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| < \|x_1 - x_2\|.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} T_n &:= I + A + \dots + A^n \\ T_n &: X \rightarrow X. \end{aligned}$$

Es folgt, daß

$$\|T_n\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|} .$$

Für $x \in X$ ist $\{T_n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X , weil

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|A\|^{n+1} / (1 - \|A\|) , \quad \text{für } m > n .$$

Da X ein Banachraum ist, konvergiert $T_n x$. Wir setzen

$$Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x .$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß $T \in B(X)$. Da

$$(I - A)T_n x = T_n(I - A)x = (I - A^{n+1})x ,$$

folgt

$$(I - A)Tx = T(I - A)x = x ,$$

so daß

$$T = (I - A)^{-1} .$$

Satz 7.2 *X sei ein Banachraum, $A, B \in B(X)$. Existiere $A^{-1} \in B(X)$. Wenn*

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} ,$$

dann gilt: $B^{-1} \in B(X)$ und

$$\begin{aligned} \|B^{-1}\| &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|} \\ \|B^{-1} - A^{-1}\| &\leq \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\| \cdot \|B^{-1}\| . \end{aligned}$$

Beweis:

$$B = A - (A - B) = A(I - C) ,$$

wobei

$$C \in B(X) , \quad C := A^{-1}(A - B) .$$

Da $\|C\| < 1$, folgt aus Satz 5.1, daß $(I - C)^{-1} \in B(X)$ und

$$\|(I - C)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|C\|} \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|} .$$

Es folgt, daß

$$B^{-1} = (I - C)^{-1}A^{-1} \in B(X).$$

Die Abschätzung für $\|B^{-1} - A^{-1}\|$ folgt aus der Gleichung

$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A - B)A^{-1}.$$

Satz 7.3 $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge in $B(X)$ mit $\|K - K_n\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Ferner existiere $(I - K)^{-1} \in B(X)$. Dann gilt:

1. Es existiere $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geq n_0$

$$(I - K_n)^{-1} \in B(X).$$

2.

$$\sup\{\|(I - K_n)^{-1}\| : n \geq n_0\} < \infty$$

3.

$$\|(I - K)^{-1} - (I - K_n)^{-1}\| \rightarrow 0 \quad \text{mit } n \rightarrow \infty$$

4.

$$\begin{aligned} \|(I - K_n)^{-1}\| &\leq \frac{\|(I - K)^{-1}\|}{1 - \|(I - K)^{-1}\| \cdot \|K - K_n\|} \\ \|(I - K)^{-1}\| &\leq \frac{\|(I - K_n)^{-1}\|}{1 - \|(I - K_n)^{-1}\| \cdot \|K - K_n\|} \end{aligned}$$

Seien $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in X mit $f_n \rightarrow f \in X$, x die Lösung von (5.24) und für $n \geq n_0$ x_n die Lösung von (5.25).

Dann gilt:

5.

$$\begin{aligned} \|x - x_n\| &\leq \|(I - K_n)^{-1}\| (\|f - f_n\| + \|K - K_n\| \|x\|) \rightarrow 0 \\ \|x - x_n\| &\leq \|(I - K)^{-1}\| (\|f - f_n\| + \|K - K_n\| \|x_n\|) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Beweis:

1 - 4 folgen aus Satz 5.2.5 folgt aus der Identität:

$$\begin{aligned} f - f_n &= (I - K)x - (I - K_n)x_n \\ &= (I - K_n)(x - x_n) + (K_n - K)x. \end{aligned}$$

Satz 7.4 : Banach-Steinhaus (Spezialfall)

Seien X ein Banachraum, $\{S_n\}$ eine Folge Operatoren $S_n \in B(X)$. Dann gilt $1 \Leftrightarrow 2 + 3$, wobei

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n x$ existiere für jedes $x \in X$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n x$ existiere für jedes $x \in Y$ mit $\bar{Y} = X$
3. $\sup_n \|S_n\| < \infty$.

Definition 7.1 S sei eine Untermenge eines Banachraums X . S ist präkompakt, falls für jedes $\epsilon > 0$ eine endliche Anzahl von Elementen $y_k \in X$ existiert, so daß für jedes $y \in S$

$$\inf_k \|y - y_k\| \leq \epsilon .$$

D.h. die Menge der Kugeln S_k mit Radius ϵ und Mittelpunkte y_k enthält S . Die Menge $\{y_k\}$ heißt ϵ -Netz für S .

Definition 7.2 $K : X \rightarrow X$ heißt kompakt, falls KS präkompakt ist für jede beschränkte Menge $S \subset X$. D.h. K bildet beschränkte Mengen in präkompakte Mengen ab.

Satz 7.5 Seien X ein Banachraum, $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge Operatoren, $S_n \in B(X)$, $A \subset X$ präkompakt,

$$S_n x \rightarrow Sx \in X \quad \text{mit } n \rightarrow \infty \quad \text{für jedes } x \in X .$$

Dann gilt: für jedes $\epsilon > 0$ existiere N :

$$\|S_n x - Sx\| \leq \epsilon , \quad \text{für } n \geq N \quad \text{und alle } x \in A .$$

D.h. die Konvergenz der Folge $\{S_n x\}$ ist gleichmäßig für $x \in A$.

Beweis:

Wähle $\epsilon > 0$. Da die Menge A präkompakt ist, gibt es ein ϵ -Netz für A :

$$x_1, \dots, x_m .$$

Sei $Sx = \lim S_n x$. Es folgt (Banach-Steinhaus), daß es eine Konstante M gibt, mit

$$\|S\| \leq M , \quad \|S_n\| \leq M \quad \text{für } n \in \mathbb{N} .$$

Wähle N mit

$$\|Sx_k - S_n x_k\| \leq \epsilon \quad \text{für } 1 \leq k \leq m, \quad n \geq N.$$

Sei nun $x \in A$. Da $\{x_k\}$ ein ϵ -Netz ist, gibt es ein x_k mit

$$\|x - x_k\| \leq \epsilon.$$

Für $n \geq N$ folgt, daß

$$\begin{aligned} \|Sx - S_n x\| &\leq \|S_n x_k - Sx_k\| + \|(S - S_n)(x - x_k)\|, \\ &\leq \epsilon + 2M\epsilon. \end{aligned}$$

Das Projektionsverfahren

$P \in B(X)$ sei eine Projektion (d.h. $P^2 = P$) mit $\tilde{X} := PX$ und $\dim \tilde{X} < \infty$. Als Approximation zur Lösung x der Gleichung (5.24) nehme man $\tilde{x} \in X$ mit

$$P(I - K)\tilde{x} = Pf, \tag{7.26}$$

oder

$$(I - PK)\tilde{x} = Pf. \tag{7.27}$$

Es folgt:

$$\tilde{x} \in X. \tag{7.28}$$

Benutzt man eine Folge von endlichdimensionalen Unterräumen $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und Projektionen $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit jeweils $P_n X = X_n$, erhalten wir Approximationen x_n mit

$$(I - P_n K)x_n = P_n f, \quad x_n \in X_n. \tag{7.29}$$

Satz 7.6 Seien X ein Banachraum, $K \in B(X)$ kompakt, $\{P_n\}$ eine Folge Projektionen, $(I - K)^{-1} \in B(X)$, $P_n x \rightarrow x$ für jedes $x \in X$, $K_n := P_n K$.

Dann gilt: $\|K_n - K\| \rightarrow 0$ mit $n \rightarrow \infty$.

Es gibt $N \in \mathbb{N}$ derart, daß $(I - K_n)^{-1} \in B(X)$ für $n \geq N$. Sei $n \geq N$,

$$(I - K_n)x_n = P_n f, \quad (I - K)x = f.$$

Dann gilt:

$$\|x - x_n\| \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty .$$

Beweis:

Sei B die Einheitskugel um X . Dann ist $A := K(B)$ präkompakt. Es folgt:

$$\begin{aligned} \|K - P_n K\| &= \sup_{x \in B} \|Kx - P_n Kx\| , \\ &= \sup_{y \in A} \|y - P_n y\| \longrightarrow 0 , \quad \text{für } n \rightarrow \infty , \end{aligned}$$

wie aus Satz 5.7 folgt.

Wegen des Banach-Steinhaus Satzes existieren Konstanten $M \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$ derart, daß für $n \geq N$

$$\begin{aligned} (I - K_n)^{-1} &\in B(X) , \\ \|(I - K_n)^{-1}\| &\leq M . \end{aligned}$$

Sei, für $n \geq N$,

$$(I - K)u = f , \quad (I - K_n)u_n = f_n = P_n f .$$

Dann folgt:

$$\|u - u_n\| \leq \|(I - K)^{-1}(K - K_n)u_n\| + \|(I - K)^{-1}\| \cdot \|P_n f - f\| ,$$

so daß

$$\|u - u_n\| \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \longrightarrow \infty .$$

Satz 7.7 Es gelte die Voraussetzung von Satz 5.8.

Falls $\|K_n\| = \|P_n K\| < 1$, erhalten wir:

$$\begin{aligned} Q_n &:= I - P_n \\ (I - P_n K)(u - u_n) &= Q_n(u - x) , \quad \forall x \in X_n , \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\|u - u_n\| \leq \frac{1}{1 - \|K_n\|} \cdot (1 + \|P_n\|) \inf_{x \in X_n} \|u - x\| .$$

Diese Gleichung besagt, daß die Lösung u_n optimal ist.

7.4 Anwendungen

Wir betrachten die Gleichung

$$x(s) - \int_a^b k(s, t)x(t)dt = f(s), \quad a \leq s \leq b, \quad (7.30)$$

d.h.

$$(I - K)x = f \quad (7.31)$$

im Banachraum

$$X := C[a, b].$$

Satz 7.8 Sei $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $K : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$,

$$(Kx)(s) = \int_a^b k(s, t)x(t)dt.$$

Dann ist K ein kompakter Operator.

Beweis:

(siehe auch Hackbusch: *Integralgleichungen*, Teubner Verlag, Satz 3.2.6)

k ist stetig auf einer kompakten Teilmenge von \mathbb{R}^2 und deshalb auch gleichmäßig stetig.

Wähle $\epsilon > 0$. Es gibt $\delta > 0$ mit

$$|k(s_1, t) - k(s_2, t)| \leq \epsilon \quad \text{für alle } t, s_1, s_2 \quad \text{mit } |s_1 - s_2| \leq \delta.$$

Sei

$$a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$$

mit $|s_j - s_{j-1}| \leq \delta$. Sei B die Einheitskugel um X ,

$$B := \{x \in X : \|x\| \leq 1\},$$

und

$$M := |b - a| \cdot \max_{\substack{a \leq s \leq b \\ a \leq t \leq b}} |k(s, t)|.$$

Sei $S := K(B)$. Es gilt:

$$\|y\| \leq M \quad \text{für alle } y \in S.$$

Für jedes $y \in S$ gilt auch:

$$\begin{aligned} |y(s) - y(s_\ell)| &\leq \int_a^b |k(s, t) - k(s_\ell, t)| \cdot |y(t)| dt \\ &\leq \epsilon \cdot (b - a) \quad \text{für } s \in [s_\ell, s_{\ell+1}] . \end{aligned}$$

Teile das Intervall $[-M, +M]$ in m Teilintervalle mit jeweils der Länge kleiner als ϵ ,

$$[-M, +M] = \bigcup_{j=1}^m I_j .$$

Sei

$$S_{k_0 \dots k_n} := \{y \in S : y(s_i) \in S_{k_i}, 0 \leq i \leq n\} .$$

Falls $S_{k_0 \dots k_n} \neq \emptyset$ wähle ein Element $\tilde{y} \in S_{k_0 \dots k_n}$. Es gibt insgesamt nicht mehr als m^{n+1} Elemente \tilde{y} . Sei \tilde{S} die Menge aller \tilde{y} .

Sei nun $y \in S$. Es existiert $\tilde{y} \in \tilde{S}$ mit:

$$|\tilde{y}(s_\ell) - y(s_\ell)| \leq \epsilon, 0 \leq \ell \leq n .$$

Es folgt:

$$\|\tilde{y} - y\| \leq \epsilon + 2\epsilon \cdot (b - a) .$$

Damit ist bewiesen, daß \tilde{S} ein ϵ -Netz für S ist, d.h. S ist präkompakt.

Es gibt natürlich mehrere Möglichkeiten, die Projektionen P_n zu wählen. Hier wird nur eine Möglichkeit kurz erläutert. Sei

$$\begin{aligned} s_i &= a + \frac{b-a}{n} \cdot i, 0 \leq i \leq n, \\ (P_n x)(s) &= \frac{(s - s_i) \cdot x(s_{i+1}) + (s_{i+1} - s) \cdot x(s_i)}{s_{i+1} - s_i}, s_i \leq s \leq s_{i+1} \end{aligned}$$

Um die Lösung x_n der Gleichung

$$(I - P_n K)x_n = P_n f$$

zu bestimmen, genügt es, die Werte von x_n in den Stützpunkten s_i zu berechnen. Es folgt:

$$(I_n - A_n)\mathbf{x} = \mathbf{b}_n ,$$

mit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_n &= (x_n(s_0), \dots, x_n(s_n)) , \\
 \mathbf{b}_n &= (f(s_0), \dots, f(s_n)) , \\
 A_n &= \left(a_{ij}^{(n)} \right) , \\
 a_{i,j}^{(n)} &= \int_{s_{j-1}}^{s_j} k(s_i, t) \cdot \frac{t - s_{j-1}}{s_j - s_{j-1}} \cdot dt + \\
 &\quad + \int_{s_j}^{s_{j+1}} k(s_i, t) \cdot \frac{s_{j+1} - t}{s_{j+1} - s_j} \cdot dt ,
 \end{aligned}$$

wobei das erste bzw. letzte Integral für $j = 0$ bzw. $j = n$ wegfällt.

Kapitel 8

Finite Elemente: Theoretische Vorbereitungen

8.1 Einführung

Die Methode der finiten Elemente unterscheidet sich vom Differenzenverfahren dadurch:

1. Die Approximationen u_h zur gesuchten Lösung u sind “echte” Funktionen und nicht nur Gitterfunktionen.
2. Die Bedingungen, die durch die Approximationen erfüllt werden müssen, werden durch Variationsprinzipien oder Integralbedingungen hergeleitet.
3. Die Approximationen sind Summen von Funktionen, die nur begrenzt oft differenzierbar sind, dafür aber kleine Träger besitzen.

Um die erforderlichen Vorbereitungen zu motivieren, betrachten wir zuerst ein sehr einfaches Beispiel.

Beispiel 8.1 Gesucht ist die Lösung der Randwertaufgabe

$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (8.1)$$

$$u(0) = 0, u(1) = 0 \quad (8.2)$$

mit

$$u \in C^2(0, 1) \cap C[0, 1].$$

Sei $\varphi \in C_0^\infty(0, 1)$, d.h. φ ist unendlich oft differenzierbar und hat einen kompakten Träger in $(0, 1)$. Wird die Gleichung (8.1) mit φ multipliziert und anschließend integriert, so folgt nach partieller Integration, daß

$$\int_0^1 [u'(x)\varphi'(x) + u(x)\varphi(x)]dx = \int_0^1 \varphi(x)f(x)dx , \quad (8.3)$$

oder

$$a(u, \varphi) = \langle b, \varphi \rangle \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(0, 1) , \quad (8.4)$$

wobei

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_0^1 [u'(x)v'(x) + u(x)v(x)]dx , \\ \langle b, \varphi \rangle &:= \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx .. \end{aligned}$$

Die Abbildungen a und b sind nur für stetig differenzierbare Funktionen bzw. stetige Funktionen definiert. Wir setzen jetzt voraus, daß die Definitionsbereiche erweitert werden können.

Sei nun X ein Hilbert-Raum mit

$$X \supset C^2(0, 1) \cap C[0, 1] .$$

Sei a und b eine Bilinearform

$$a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \quad (8.5)$$

bzw. ein lineares Funktional

$$b : X \longrightarrow \mathbb{R} . \quad (8.6)$$

Gesucht wird ein Element $u \in X$ mit

$$a(u, v) = \langle b, v \rangle , \quad \text{für alle } v \in X . \quad (8.7)$$

Zur Lösung von (8.7) kann man das Galerkin-Verfahren anwenden:

1. Wähle

$$X_n = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\} \subset X . \quad (8.8)$$

2. Bestimme $u_n \in X_n$ mit

$$a(u_n, v_n) = \langle b, v_n \rangle \quad \text{für alle } v_n \in X_n . \quad (8.9)$$

Diese Lösungsmethode ist klassisch. Die Finite-Elemente-Methode besteht darin, die Basisfunktionen x_k so zu wählen, daß

1. jedes x_k einen kleinen kompakten Träger besitzt,
2. x_k stückweise glatt ist,
3. x_k durch einfache Funktionen, z.B. Polynome, definiert ist.

Fragen, die jetzt zu beantworten sind, sind folgende:

1. Existiert die Lösung u von (8.7)?
2. Existiert die Lösung u_n von (8.9)?
3. Wie kann ein geeigneter Hilbert-Raum X definiert werden?
4. Wie können geeignete Basisfunktionen definiert werden?
5. Gilt $\|u - u_n\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$?
6. Kann $\|u - u_n\|$ abgeschätzt werden?
7. Welche numerischen Aufgaben müssen gelöst werden?

Die ersten beiden Fragen (Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen u und u_n) werden in diesem Kapitel beantwortet. Die Konstruktion des Raumes X führt unausweichlich zu einer Besprechung über Sobolewsche Räume, die im nächsten Kapitel durchgeführt wird. Erst danach können die üblichen Fragen behandelt werden.

8.2 Variationsgleichungen im Hilbertraum

Ein reeller Hilbertraum H ist ein Vektorraum über \mathbb{R} mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) , der bezüglich der Norm, die durch das Skalarprodukt induziert wird, vollständig ist. Es gilt:

1. $(u, u) \geq 0$, für alle $u \in H$, $(u, u) = 0$ nur für $u = 0$.
2. $(u, v) = (v, u)$, für alle $u, v \in H$.
3. $(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha(u_1, v) + \beta(u_2, v)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $u_1, u_2, v \in H$.

Ein Hilbertraum ist also auch ein Banachraum mit der Norm

$$\|u\| := (u, u)^{1/2}$$

und es gilt:

1. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, (Dreiecksungleichung)
2. $|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$, (Schwarzsche Ungleichungen)

Beweis: Man betrachtet $F(\lambda) := (u - \lambda v, u - \lambda v) \geq 0$ an der Stelle, wo $F'(\lambda) = 0$.

3. $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$, (Parallelogrammidentität)

Eine lineare Abbildung F von einem Banachraum X nach \mathbb{R}^1 heißt ein lineares Funktional.
Ein Funktional F heißt beschränkt, wenn es eine Konstante C gibt, so daß

$$\|Fx\| \leq C\|x\|$$

und

$$\|F\| := \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Fx\|}{\|x\|}$$

heißt die Norm von F .

Eine Abbildung

$$a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt eine Bilinearform (bzw. Sesquilinearform in \mathbb{C}), wenn gilt:

$$\begin{aligned} a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) &= \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v) \\ a(u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) &= \beta_1 a(u, v_1) + \beta_2 a(u, v_2). \end{aligned}$$

a heißt beschränkt, wenn

$$a(u, v) \leq C\|u\| \cdot \|v\|, \quad \text{für alle } u, v \in X$$

und

$$\|a\| := \sup \frac{a(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

a heißt koerziv (X -elliptisch), falls es eine Konstante $\alpha > 0$ gibt, so daß

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 , \quad \text{für alle } u \in X .$$

Sei M eine Teilmenge des Hilbertraums H .

$$M^\perp := \{u \in H : (u, m) = 0 \quad \text{für alle } m \in M\} .$$

Die folgenden Sätze sind in der Funktionalanalysis gut bekannt. Siehe z.B. Gilbarg, Trudinger [1977], S. 76.

Satz 8.1 (Projektionssatz) *Sei M ein abgeschlossener Teilraum des Hilbertraums H . Für jedes $u \in H$ gilt $u = v + w$, wobei $v \in M$ und $w \in M^\perp$.*

Beweis: Ist $u \in M$, setze man $v = u$ und $w = 0$.

Ist $u \notin M$, sei

$$d := \inf_{v \in M} \|u - v\| .$$

Sei $\{v_n\}$ eine minimierende Folge, d.h. $\|u - v_n\| \rightarrow d$ für $n \rightarrow \infty$. Es gilt das Parallelogrammgesetz:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) .$$

Mit $x = u - v_n$, $y = u - v_m$ folgt

$$4 \left\| u - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 = 2\|u - v_n\|^2 + 2\|u - v_m\|^2 . \quad (*)$$

Sei $\epsilon > 0$. Es gibt N mit

$$\|u - v_k\|^2 \leq d^2 + \epsilon , \quad \text{für alle } k \geq N .$$

Wähle $n, m \geq N$. Es folgt aus $(*)$, daß

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\|^2 &\leq 2(\|u - v_n\|^2 + \|u - v_m\|^2, -4 \left\| u - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2) \\ &\leq 2(d^2 + \epsilon + d^2 + \epsilon) - 4d^2 \\ &= 4\epsilon . \end{aligned}$$

D.h. $\{v_n\}$ ist eine Cauchy-Folge. Da H ein Hilbert-Raum und M abgeschlossen ist, gibt es $v \in M$ mit

$$v_n \rightarrow v \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

und

$$\|v - u\| = d .$$

Sei nun $w := u - v$,

$$u = v + w .$$

Sei $z \in M$ und $\alpha > 0$. Dann ist $v + \alpha z \in M$. Folglich

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|u - (v + \alpha z)\|^2 \\ &= \|w\|^2 - 2\alpha(w, z) + \alpha^2\|z\|^2 \\ &= d^2 - 2\alpha(w, z) + \alpha^2\|z\|^2 \end{aligned}$$

D.h.

$$(w, z) \leq \frac{\alpha}{2}\|z\|^2 \quad \text{für alle } \alpha, z$$

oder

$$(w, z) = 0 , \quad \forall z .$$

Satz 8.2 (Riesz) Jedes lineare beschränkte Funktional F auf dem Hilbertraum H ist von der Form

$$F(x) = (x, y) \quad (*)$$

wobei $y \in H$ durch F eindeutig bestimmt ist. Umgekehrt definiert $(*)$ für jedes $y \in H$ ein beschränktes lineares Funktional auf H . Es gilt $\|F\| = \|y\|$.

Beweis: Sei

$$M = \{x : F(x) = 0\} .$$

M ist ein abgeschlossener Teilraum von H . Ist $M = H$, so erfüllt $y = 0$ die Voraussetzungen des Satzes.

Sei $M \neq H$ und $x \in H \setminus M$. Nach dem Projektionssatz gilt

$$x = y + z$$

mit $y \in M$ und $z \in M^\perp$.

Da $x \notin M$, ist $z \neq 0$.

Sei nun $x \in H$ beliebig. Man setze

$$w := x - \frac{F(x)}{F(z)} \cdot z .$$

Es gilt $F(w) = 0$, so daß $w \in M$ und $w \perp z$. D.h.

$$(w, z) = 0 = (x, z) - \frac{F(x)}{F(z)} \cdot \|z\|^2 = 0 .$$

Durch Umformung folgt:

$$F(x) = (x, y)$$

mit

$$y = \frac{F(z)}{\|z\|^2} z .$$

Es ist leicht einzusehen, daß y eindeutig ist.

Zuletzt folgt aus

$$\|F\| = \sup_x \frac{|(x, y)|}{\|x\|} \leq \frac{\|x\| \cdot \|y\|}{\|x\|} = \|y\|$$

und

$$\|F\| = \sup_x \frac{|(x, y)|}{\|x\|} \geq \frac{|(y, y)|}{\|y\|} = \|y\| ,$$

daß $\|F\| = \|y\|$.

Satz 8.3 (Lax-Milgram) *Sei a eine beschränkte, koerzive Bilinearform auf dem Hilbertraum H und F ein beschränktes lineares Funktional auf H . Dann gibt es ein eindeutiges Element $f \in H$, so daß*

$$a(u, f) = F(u) \quad \text{für alle } u \in H .$$

Beweis: Sei $v \in H$. Die Abbildung

$$u \mapsto a(u, v)$$

ist ein beschränktes lineares Funktional. Wegen des Rieszschen Satzes gibt es ein $f_v \in H$ mit

$$a(u, v) = (u, f_v) \quad \text{für alle } u \in H .$$

Die Abbildung $T : H \longrightarrow H$,

$$T : v \longrightarrow f_v$$

ist beschränkt und linear,

a) Beschränktheit

$$\|f_v\|^2 = (f_v, f_v) = a(f_v, v) \leq \|a\| \cdot \|f_v\| \cdot \|v\| ,$$

so daß

$$\|f_v\| = \|Tv\| \leq \|a\| \cdot \|v\|$$

b) Linearität

Sei

$$\begin{aligned} a(u, v_1) &= (u, Tv_1) , \\ a(u, v_2) &= (u, Tv_2) \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$a(u, v_1 + v_2) = (u, Tv_1 + Tv_2) ,$$

d.h.

$$T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2 .$$

Es gilt auch, daß

$$\begin{aligned} \alpha \|v\|^2 &\leq a(v, v) = (v, Tv) \leq \|v\| \cdot \|Tv\| , \\ &\Rightarrow \|Tv\| \geq \alpha \|v\| . \end{aligned}$$

T ist also injektiv und T^{-1} ist beschränkt. Der Wertebereich $R(T)$ ist abgeschlossen.

Es folgt, daß $R(T) = H$, d.h. T ist surjektiv. Denn sonst gibt es wegen des Projektionsatzes mit $M = R(T)$ ein Element

$$\begin{aligned} z &\in H , z \neq 0 , \\ z &\in M^\perp . \end{aligned}$$

D.h.

$$a(z, v) = (z, T v) = 0 \quad \text{für alle } v \in H .$$

Insbesondere

$$a(z, z) = (z, T z) = 0 ,$$

so daß

$$z = 0 .$$

Die inverse Abbildung T^{-1} ist deshalb eine lineare, beschränkte Abbildung von H auf H .

Es gilt:

$$a(u, T^{-1}w) = (u, w) \quad \text{für alle } u, w \in H .$$

Wegen des Rieszschen Satzes gibt es ein Element $g \in H$ mit

$$F(u) = (u, g) \quad \text{für alle } u \in H .$$

Es folgt:

$$F(u) = (u, g) = a(u, T^{-1}g) \quad \text{für alle } u \in H .$$

Man setze $f := T^{-1}g$.

Bemerkung 8.1 Es gibt auch ein eindeutiges Element $u \in H$ mit

$$a(u, v) = F(v) \quad \text{für alle } v \in H .$$

Satz 8.4 Sei a eine beschränkte, symmetrische, koerzive Bilinearform auf dem Hilbertraum H und $F(v) := (b, v)$ mit $b \in H$,

$$E(v) := a(v, v) - 2(b, v) . \tag{*}$$

Dann ist $u \in H$ eine Lösung der Gleichung

$$a(u, v) = (b, v) \tag{**}$$

genau dann, wenn

$$E(u) = \inf_{v \in H} E(v) \tag{***}$$

Es existiert genau ein $u \in V$, das $(***)$ erfüllt.

Beweis:

⇒ Sei u die Lösung von $(**)$ und $v \in H$. Dann folgt

$$\begin{aligned} E(v) - E(u) &= a(v, v) - a(u, u) - 2(b, v - u) \\ &= a(v - u, v - u) + 2[a(u, v - u) - (b, v - u)] \\ &= a(v - u, v - u) \\ &\geq 0 . \end{aligned}$$

⇐ u erfülle $(***)$. Dann gilt:

$$E(u) \leq E(u + \lambda v) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}, v \in H .$$

Es folgt

$$\lambda^2 a(v, v) + 2\lambda a(u, v) - 2\lambda(b, v) \geq 0 .$$

Für $\lambda \downarrow 0$ erhalten wir aus

$$\lambda a(v, v) + 2a(u, v) - 2(b, v) \geq 0$$

daß

$$a(u, v) - (b, v) \geq 0 .$$

Für $\lambda \uparrow 0$ erhalten wir

$$a(u, v) - (b, v) \leq 0 .$$

8.3 Variationsungleichungen: Einleitung

Im letzten Absatz wurde gezeigt, daß die Variationsgleichung

$$a(u, v) = (b, v), \quad v \in H$$

auch als Optimierungsproblem

$$\inf_{v \in H} a(v, v) - 2(b, v)$$

gestellt werden kann. Es gibt eine Erweiterung dieser beiden Probleme, die Variationsungleichung, die sowohl theoretische als auch praktische Anwendung findet. In diesem Absatz betrachten wir ein einfaches Beispiel (siehe Elliot und Ockendon [1982, S. 11]).

Man betrachte das Randwertproblem (RWP)

$$\begin{aligned} -\tilde{u}''(x) &= f(x) := +1, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \tilde{u}(0) &= \tilde{u}(1) = 0 \end{aligned} \tag{8.10}$$

Die Lösung

$$\tilde{u}(x) := \frac{x(1-x)}{2} \tag{8.11}$$

erfüllt die Variationsgleichung (VG):

$$a(\tilde{u}, v) = (f, v), \quad v \in X \tag{8.12}$$

mit

$$a(u, v) := \int_0^1 u_x v_x dx \tag{8.13}$$

$$(f, v) := \int_0^1 f(x)v(x)dx \tag{8.14}$$

und die geeignete Wahl des Raumes X . (Z.B. $X = H_0^1(0, 1)$.) Diese Lösung \tilde{u} wird in Abbildung 8.1a) graphisch dargestellt.

Es wird jetzt vorausgesetzt, daß das Problem (8.10) ein physikalisches Problem darstellt, und zwar die Biegung eines Stabes (man denke an Splines!). Es sei jetzt ein Hindernis $y = \varphi(x) := c(1-x)$ vorhanden, so daß die Lösung $u(x)$ den Wert $\varphi(x)$ nicht überschreiten darf. Man stellt sich jetzt vor, daß eine mögliche Lösung $u(x)$ wie in Abbildung 8.1b) aussehen würde. Zwischen $x = 0$ und $x = x_0$ liegt der Stab unterhalb des Hindernisses und erfüllt die vorgegebene Differentialgleichung. Zwischen $x = x_0$ und $x = 1$ liegt der Stab auf dem Hindernis.

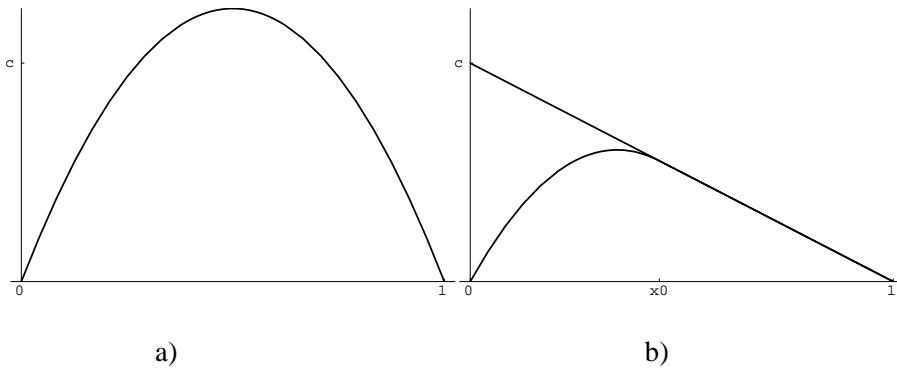


Abbildung 8.1: Elastischer Stab ohne und mit Hindernis

Wenn diese Vorstellung richtig wäre, dann würde u das folgende Problem lösen:

$$-u''(x) = +1, \quad 0 \leq x \leq x_0, \quad (8.15)$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

$$u(x) = \varphi(x), \quad x_0 \leq x \leq 1. \quad (8.16)$$

Eine Lösung des Problems (8.15), (8.16) läßt sich leicht berechnen:

$$u(x) = \begin{cases} c(1-x) - \frac{1}{2}(x-x_0)^2 & , \quad 0 \leq x \leq x_0 \\ c(1-x) = \varphi(x) & , \quad x_0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (8.17)$$

mit

$$x_0 = \sqrt{2c} \quad (8.18)$$

Die Frage stellt sich nun, ob u eine Lösung der Form (8.12) erfüllt. Sei

$$K = \{v \in X : v(x) \leq \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1\}.$$

Offensichtlich gilt $u \in K$.

Sei nun $v \in K$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
a(u, v - u) &= \int_0^1 u_x(v_x - u_x) dx \\
&= \int_0^{x_0} u_x(v_x - u_x) dx + \int_{x_0}^1 u_x(v_x - u_x) dx \\
&= u_x(v - u)|_0^{x_0} + u_x(v - u)|_{x_0}^1 - \int_0^{x_0} u_{xx}(v - u) dx - \int_{x_0}^1 u_{xx}(v - u) dx \\
&= [v(x_0) - \varphi(x_0)][u_x(x_0 - 0) - u_x(x_0 + 0)] + \int_0^{x_0} f \cdot (v - u) dx - \int_{x_0}^1 \varphi_{xx}(v - \varphi) dx .
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
u_x(x_0 - 0) &= u_x(x_0 + 0) = -c \\
\varphi_{xx} &= 0, \quad x_0 \leq x \leq 1 \\
v(x) &\leq \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1
\end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned}
a(u, v - u) &= + \int_0^{x_0} f \cdot (v - u) dx + 0 \\
&\geq \int_0^{x_0} f \cdot (v - u) dx + \int_{x_0}^1 f \cdot (v - u) dx \\
&= (f, v - u) .
\end{aligned}$$

Zusammenfassend ist u die Lösung der Variationsungleichung (VU).

Finde $u \in K$ mit (VU): $a(u, v - u) \geq (f, v - u)$ für $v \in K$

Es gibt zwei weitere Probleme, die zur VU äquivalent sind:

- Die entsprechende Minimierungsaufgabe heißt - in Anlehnung an Probleme in der Optimierung - das Quadratische Programmierungsproblem (QP):

$$E(u) = \inf_{v \in K} E(v)$$

mit

$$E(v) := a(v, v) - 2(f, v) .$$

- Das Lineare Komplementaritätsproblem (LKP):

$$\begin{aligned} Au &\leq f \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u &\leq \varphi \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ [(Au - f)(x)] \cdot [u(x) - \varphi(x)] &= 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

mit

$$(Au)(x) := -u''(x) .$$

Daß u eine Lösung des QP ist, läßt sich leicht bestätigen. Sei

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u) , \quad \text{für alle } v \in K .$$

Es folgt, für $v \in K$,

$$\begin{aligned} E(v) - E(u) &= a(v, v) - a(u, u) - 2(f, v - u) \\ &= a(v - u, v - u) + 2[a(u, v - u) - (f, v - u)] \\ &\geq 0 . \end{aligned}$$

Daß u eine Lösung des LKP ist, kann ebenfalls leicht bewiesen werden, obwohl die Bedeutung der Gleichungen

$$Au \leq f$$

und

$$u \leq \varphi$$

sorgfältig definiert werden muß.

Der Operator A wird mit Hilfe des Rieszschen Satzes wie folgt definiert:

$$a(u, v) = (Au, v) , \quad \text{für alle } v \in K .$$

Sei

$$K = \varphi - Q ,$$

so daß auch folgendermaßen definiert werden kann:

$$Q = \{v \in X : v(x) \geq 0 \text{ f.ü.}\}$$

oder

$$Q = \text{Vervollständigung von } \{\Psi \in C_0^\infty(0, 1) : \Psi \geq 0\}$$

Die Ungleichung

$$u - \varphi \leq 0$$

wird als $-u + \varphi \in Q$ interpretiert. Die Ungleichung

$$Au \leq f$$

impliziert

$$(Au - f, w) \leq 0 \text{ für alle } w \in Q .$$

Sei jetzt nun u die Lösung des VU Problems:

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u) \text{ für alle } v \in K ,$$

d.h.

$$(Au - f, v - u) \geq 0 \text{ für alle } v \in K .$$

Insbesondere ist $v := u - w \in K$ für alle $w \in Q$, so daß

$$(Au - f, w) \leq 0 \text{ für alle } w \in Q ,$$

d.h., wie behauptet,

$$Au - f \leq 0 .$$

Sei $w \in K, w \geq u$. Setzt man $v = w$ in der VU, folgt:

$$(Au - f, w - u) \geq 0 .$$

Setzt man $v = 2u - w$ in die VI ein, folgt:

$$(Au - f, u - w) \geq 0 .$$

Zusammengenommen folgt:

$$(Au - f, u - w) = 0 , \quad \text{für alle } w \in K \quad \text{mit } w \geq u .$$

Betrachte nun eine Folge $\{w_n\} \subset K$, $w_n \geq u$ mit $w_n \rightarrow \varphi$ in $L^2(0, 1)$. Da $Au - f \in \mathcal{L}^2(0, 1)$, folgt

$$\begin{aligned} |(Au - f, u - \varphi)| &\leq |(Au - f, u - w_n)| + |(Au - f, w_n - \varphi)| \\ &\leq \|Au - f\|_2 \cdot \|w_n - \varphi\|_2 , \end{aligned}$$

also $(Au - f, u - \varphi) = 0$, und daraus folgt die dritte Relation des LKP, da beide Faktoren das Vorzeichen in $(0, 1)$ nicht wechseln.

8.3.1 Diskretisierung der Variationsformulierungen

Sei nun

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = 1$$

$n + 2$ Stützpunkte im Intervall $[0, 1]$ mit $x_i = ih$, $h = \frac{1}{n}$ und $S_h \subset X$ die Menge der stetigen stückweisen lineareren Funktionen auf $[0, 1]$ mit Stützpunkten x_0, \dots, x_{n+1} , so daß die Randbedingungen $s(0) = s(1) = 0$ erfüllt werden. Sei

$$K_h := \{v_h \in S_h : v(x_j) \leq \varphi(x_j), \quad 0 \leq j \leq n + 1\} .$$

Wir erhalten die diskrete Variationsungleichung:

Finde $u_h \in K_h$ mit

$$VI_h : a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h) \quad \text{für alle } v_h \in K_h .$$

Sei u_h die Lösung von VI_h . Man setze

$$\mathbf{u}_h := \begin{pmatrix} u_h(x_1) \\ \vdots \\ u_h(x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n ,$$

$$\varphi_h := \begin{pmatrix} \varphi(x_1) \\ \vdots \\ \varphi(x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n ,$$

$$A_h := \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & O \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ O & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \text{mat}(n \times n)$$

$$\mathbf{b}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

$$\tilde{K}_h := \{\mathbf{v}_h \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}_{h,i} \leq \varphi(x_i) , \quad 1 \leq i \leq n\}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \widetilde{VU}_h &: \mathbf{u}_h^T A_h (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \geq \mathbf{b}_h^T (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \quad \text{für alle } \mathbf{v}_h \in \tilde{K}_h \\ \widetilde{QP}_h &: E_h(\mathbf{u}_h) \leq E_h(\mathbf{v}_h) \quad \text{für alle } \mathbf{v}_h \in \tilde{K}_h \end{aligned}$$

mit

$$E_h(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T A_h \mathbf{v} - 2\mathbf{b}_h^T \mathbf{v}_h \quad \text{für alle } \mathbf{v}_h \in \mathbb{R}^n$$

und

$$\begin{aligned} \widetilde{LKP}_h : A_h \mathbf{u}_h &\leq \mathbf{b}_h \\ \mathbf{u}_h &\leq \varphi_h \\ (A_h \mathbf{u}_h - \mathbf{b}_h)^T (\mathbf{u}_h - \varphi_h) &= 0 , \end{aligned}$$

d.h. falls $\mathbf{u}_{h,i} - \varphi_{h,i} < 0$, dann gilt: $(A_h \mathbf{u}_h - \mathbf{b}_h) = 0$.

Die Lösung \mathbf{u}_h kann durch das projektierte S.O.R.-Verfahren berechnet werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h^{(0)} &\leq \varphi_h \quad \text{sonst beliebig} \\ d_{h,i}^{(k)} &= \left(\mathbf{b}_{h,i} - \sum_{j < i} a_{h,ij} \mathbf{u}_{h,j}^{(k+1)} - \sum_{j > i} a_{h,ij} \mathbf{u}_{h,j}^{(k)} \right) / a_{h,ii} - \mathbf{u}_{h,i}^{(k)} \\ \mathbf{u}_{h,i}^{(k+1/2)} &:= \mathbf{u}_{h,i}^{(k)} + \omega d_{h,i}^{(k)} \\ \mathbf{u}_{h,i}^{(k+1)} &= \min \left\{ \varphi_{h,i}, \mathbf{u}_{h,i}^{k+1/2} \right\} \end{aligned}$$

mit $\omega \in (0, 2)$.

Beispiel 8.2

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{8}, \quad h = \frac{1}{3} \\ x_0 &= \sqrt{2c} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Finde $\mathbf{u}_h = (u_{h,1}, u_{h,2})^T$ mit

$$\begin{aligned} [2u_{h,1} - u_{h,2}] &\leq \frac{1}{9} \\ [2u_{h,2} - u_{h,1}] &\leq \frac{1}{9} \\ u_{h,1} &\leq \varphi(h) = \frac{1-h}{8} = \frac{1}{12} \\ u_{h,2} &\leq \varphi(2h) = \frac{1-2h}{8} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Die Lösung ist:

$$u_{h,1} = \frac{11}{144}, \quad u_{h,2} = \frac{1}{24}.$$

Die ersten Gauß-Seidel-Approximationen sind:

k	$u_{h,1}^{(k)}$	$u_{h,2}^{(k)}$
0	0	0
1	0,05555	0,041666
2	0,07388	0,041666

8.4 Variationsungleichungen im Hilbertraum

In diesem Absatz wird die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer Variationsungleichung bewiesen. Wir folgen dem Beweis in Kinderlehrer und Stampacchia [1980]. Damit erhalten wir auch einen neuen Beweis des Satzes von Lax und Milgram.

Satz 8.5 Sei $a(u, v)$ eine koerzive Bilinearform auf einem Hilbertraum H mit der Koerzivitätskonstante α , K eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von H und f ein lineares beschränktes Funktional auf H (d.h. $f \in H'$). Dann existiert ein eindeutiges Element $u \in K$, so daß

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \text{für alle } v \in K \tag{*}$$

Die Abbildung $f \rightarrow u$ ist Lipschitz; seien u_1 und u_2 Lösungen des Problems (*) für f_1 bzw. $f_2 \in H'$, dann gilt

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f_1 - f_2\| \tag{**}$$

Beweis:

Die Ungleichung (**) wird zuerst bewiesen. Seien u_1 und u_2 Lösungen der Gleichung (*):

$$u_i \in K : a(u_i, v - u_i) \geq (f_i, v - u_i) \quad \text{für } v \in K, \quad i = 1, 2.$$

Setze $v = u_2$ in der Variationsungleichung für u_1 und $v = u_1$ in der Variationsungleichung für u_2 und addiere die beiden Ungleichungen. Es ergibt sich

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq (f_1 - f_2, u_1 - u_2).$$

Unter Benutzung der Koerzivität von a folgt:

$$\begin{aligned} \alpha \|u_1 - u_2\|^2 &\leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \\ &\leq \|f_1 - f_2\| \cdot \|u_1 - u_2\|, \end{aligned}$$

so daß (**) bewiesen ist.

Die Existenz der Lösung u wird in zwei Schritten durchgeführt. Zuerst wird die Existenz bewiesen unter der Annahme, daß die Bilinearform a symmetrisch sei. Anschließend wird der Beweis für den allgemeinen Fall gegeben.

Sei nun vorerst a symmetrisch. Sei

$$I(v) := a(v, v) - 2(f, v), \quad v \in H$$

und

$$d := \inf_{v \in K} I(v).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \alpha \|u\|^2 - 2\|f\|_{H'} \cdot \|u\|_H \\ &\geq \alpha \|u\|^2 - (1/\alpha)\|f\|_{H'}^2 - \alpha \|u\|^2 \\ &\geq -(1/\alpha)\|f\|_{H'}^2, \end{aligned}$$

so daß

$$d \geq (1/\alpha)\|f\|_{H'}^2 > -\infty.$$

Sei $\{u_n\}$ eine minimierende Folge für I bzgl. K mit

$$\{u_n \in K : d \leq I(u_n) \leq d + (1/n)\}.$$

Da a symmetrisch und K konvex ist, folgt

$$\begin{aligned}\alpha\|u_n - u_m\|^2 &\leq a(u_n - u_m, u_n - u_m) \\ &= 2a(u_n, u_n) + 2a(u_m, u_m) - 4a\left(\frac{1}{2}(u_n + u_m), \frac{1}{2}(u_n + u_m)\right) \\ &= 2I(u_n) + 2I(u_m) - 4I\left(\frac{1}{2}(u_n + u_m)\right) \\ &\leq 2[(1/n) + (1/m)] ,\end{aligned}$$

wobei wir zunutze gemacht haben, daß

$$4(f, u_n) + 4(f, u_m) - 8\left(f, \frac{u_n + u_m}{2}\right) = 0 .$$

Die Folge $\{u_n\}$ ist deshalb eine Cauchy-Folge, und die abgeschlossene Menge K enthält ein Element u , so daß $\|u_n - u\| \rightarrow 0$. Da die Bilinearform a stetig ist, schließen wir daraus, daß

$$I(u) = d .$$

Wir möchten jetzt beweisen, daß u eine Lösung der Variationsungleichung ist.

Sei $v \in K$, $0 \leq \epsilon \leq 1$. K ist konvex, so daß

$$u + \epsilon(v - u) = (1 - \epsilon)u + \epsilon v \in K$$

und

$$I(u + \epsilon(v - u)) \geq d = I(u) ,$$

d.h.

$$2\epsilon a(u, v - u) + \epsilon^2 a(v - u, v - u) - 2\epsilon(f, v - u) \geq 0$$

oder

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u) - \frac{1}{2}\epsilon a(v - u, v - u) \quad \text{für alle } \epsilon, \quad 0 \leq \epsilon \leq 1 .$$

Man betrachte den Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ und schließe daraus, daß u die Variationsungleichung (*) erfüllt.

Bei den bisherigen Überlegungen wurde vorausgesetzt, daß a symmetrisch ist. Diese Voraussetzung wird jetzt fallengelassen.

Man definiere drei Bilinearformen a_0, b und a_t mit $t \in [0, 1]$:

$$a_t = a_0(u, v) + tb(u, v), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

wo

$$a_0(u, v) = \frac{1}{2}(a(u, v) + a(v, u))$$

und

$$b(u, v) = \frac{1}{2}(a(u, v) - a(v, u)).$$

a_0 und b sind die symmetrischen bzw. unsymmetrischen Teile von a . Man merke:

$$a_1(u, v) = a(u, v)$$

und

$$a_t(v, v) = a(v, v),$$

so daß a_t koerziv ist mit der Konstante α .

Wir zeigen, daß die Gleichung (*) eine Lösung hat, indem wir eine endliche Folge $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ konstruieren, so daß die Ungleichung

$$u \in K : a_{tk}(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad v \in K$$

eine Lösung $u = u_{tk,f}$ für alle $f \in H'$ besitzt. Dies gilt sicherlich für $t_0 = 0$, da a_0 symmetrisch ist. Die Existenz von t_1, \dots, t_n folgt aus dem nächsten Lemma.

Lemma 8.1 *Die Variationsungleichung*

$$u \in K : a_\tau(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad v \in K$$

besitze eine Lösung u für alle $f \in H'$.

Dann ist die Variationsgleichung

$$u \in K : a_t(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad v \in K$$

für alle $f \in H'$ und alle t

$$\tau \leq t \leq \tau + t_0$$

lösbar, wo

$$t_0 = \frac{\alpha}{2M}$$

und

$$M = \sup \frac{|b(u, v)|}{\|u\| \cdot \|v\|} < +\infty.$$

Beweis:

Sei $w \in K$. Definiere das lineare Funktional $F_{t,w} : K \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$(F_{t,w}, v) = (f, v) - (t - \tau)b(w, v)$$

für $\tau \leq t \leq \tau + t_0$. Sei u die Lösung der Variationsungleichung

$$u \in K : a_\tau(u, v - u) \geq (F_{t,w}, v - u), \quad v \in K \quad (***) .$$

Nach den Voraussetzungen existiert u . Daß u eindeutig ist, folgt sofort aus (**). u ist von der Wahl von w und t abhängig. Wir schreiben

$$u = Tw .$$

Der Operator T ist definiert und $T : K \rightarrow K$.

Wir behaupten, daß T kontrahierend ist mit der Konstante $\frac{1}{2}$. Um eben dies zu zeigen, seien $w_1, w_2 \in K$. Sei

$$\begin{aligned} u_1 &= Tw_1 , \\ u_2 &= Tw_2 . \end{aligned}$$

Wegen (***)) erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \|Tw_1 - Tw_2\| &= \|u_1 - u_2\| \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \|F_{t,w_1} - F_{t,w_2}\| \\ &\leq \frac{1}{\alpha} |t - \tau| \sup_{v \in H} \frac{|b(w_1 - w_2, v)|}{\|v\|} \\ &\leq \frac{1}{\alpha} |t - \tau| M \|w_1 - w_2\| \\ &\leq \frac{t_0}{\alpha} M \|w_1 - w_2\| \\ &= \frac{1}{2} \|w_1 - w_2\| \end{aligned}$$

Da $T : K \rightarrow K$ kontrahierend ist, folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz, daß es einen Fixpunkt u gibt, $u = Tu$, d.h (siehe (***))

$$\begin{aligned} a_\tau(u, v - u) &\geq (F_{t,u}, v - u) \\ &= (f, v - u) - (t - \tau)b(u, v - u) \end{aligned}$$

oder

$$a_0(u, v - u) + \tau b(u, v - u) \geq (f, v - u) - (t - \tau)b(u, v - u)$$

oder

$$a_0(u, v - u) + t b(u, v - u) \geq (f, v - u)$$

oder

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u).$$

Literatur:

Alt, H.W.: Lineare Funktionalanalysis. 2. verb. Aufl. Springer, 1992.

Elliot, C.M., Ockendon, J.R.: Weak and Variational Methods for Moving Boundary Problems. Pitman, Boston, 1982.

Gilbarg, D., Trudinger, N.S.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer 1977.

Heuser, H.: Funktionalanalysis. Teubner, 1986.

Kinderlehrer, D., Stampacchia, G.: An Introduction to Variational Inequalities and their Applications. New York, Academic Press, 1980.

Morrey, C.B. Jr.: Multiple Integrals in the Calculus of Variations. Springer, 1966.

Yosida, K.: Functional Analysis, 2nd edition. Springer, 1968.

Kapitel 9

Sobolew-Räume

9.1 Einführung

Im letzten Kapitel wurde die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Variationsgleichung:

$$a(u, v) = (b, v), \quad v \in H$$

bzw. der Variationsungleichung

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \text{für alle } v \in K \quad (*)$$

bewiesen. Vorausgesetzt war die Existenz des Hilbertraumes X . Die Sobolew-Räume sind in vielen Anwendungen geignete Hilberträume.

Spezielle Fälle der Sobolew-Räume wurden auch früher benutzt (siehe z.B. Courant, Friedrichs, Lewy[1928] oder Courant und Friedrichs[1937]), aber wir verdanken Sobolew wertvolle Beiträge insbesondere die Einbettungssätze.

In diesem Kapitel werden die benötigten Begriffe, einschließlich die Grundzüge des Lebesgueschen Integrals, kurz erläutert.

Es gibt mehrere Bücher, die die Theorie der Sobolewschen Räume ausführlich beschreiben. Besonders empfehlungswert ist das Buch von Adams[1975].

9.2 Die Lebesguesche Theorie

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Lebesguesche Theorie zu entwickeln. Wir benutzen hier die Darstellung von Forster und untersuchen folgende Themen:

1. Integrierbare Funktionen
2. Meßbare Mengen
3. Konvergenzsätze

1. Integrierbare Funktionen

Definition 9.1 (*Oberintegral, Unterintegral*)

siehe Forster III, S.54

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine beliebige Funktion. Dann setzt man

$$\begin{aligned}\int^* f(x)dx &:= \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx : \varphi \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n), \varphi \geq f \right\}, \\ \int_* f(x)dx &:= \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx : \psi \in \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n), \psi \leq f \right\}.\end{aligned}$$

Definition 9.2 Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt Lebesgue-integrierbar, falls

$$-\infty < \int_* f(x)dx = \int^* f(x)dx < \infty.$$

Der gemeinsame Wert des Ober- und Unterintegrals heißt dann das Lebesgue-Integral von f und wird mit $\int f(x)dx$ bezeichnet.

Bemerkung 9.1 Jede Funktion $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ ist Lebesgue-integrierbar. Allgemeiner gilt: Eine Funktion $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ bzw. $g \in \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ ist genau dann Lebesgue-integrierbar, falls

$$\int f(x)dx < \infty \text{ bzw. } \int g(x)dx > -\infty.$$

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion. Dann werden Funktionen $f_+, f_- : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ definiert durch

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$f_-(x) := \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) \leq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.

Satz 9.1 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion.

a) f ist genau dann integrierbar, wenn f_+ und f_- integrierbar sind.

b) Ist f integrierbar, so ist auch $|f|$ integrierbar.

Beweis: Forster, S. 60

Definition 9.3 Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. (Die Werte $\pm\infty$ sind hier nicht zugelassen.)

Satz 9.2 Seien $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $\lambda f, f + g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ und es gilt:

$$a) \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

$$b) \int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx.$$

$$c) \text{ Falls } f \leq g, \text{ folgt } \int f(x)dx \leq \int g(x)dx.$$

Beweis: Forster, S. 60

Bemerkung 9.2 Satz 6.7 bedeutet, daß $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ ein Vektorraum ist und das Integral ein lineares monotones Funktional auf diesem Vektorraum darstellt.

Satz 9.3 a) Seien $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$. Die Funktion g sei beschränkt, d.h. es existiere eine Konstante $M \in \mathbb{R}_+$ mit $|g(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $fg \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$.

b) Sei $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ eine beschränkte integrierbare Funktion und $p \geq 1$ eine reelle Zahl. Dann ist auch $|f|^p \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Forster, S. 61

Satz 9.4 Seien $f_1 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ und $f_2 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$. Dann gehört die durch

$$(f_1 \otimes f_2)(x, y) := f_1(x)f_2(y)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ definierte Funktion $f_1 \otimes f_2 : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ zu $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^{n+m})$ und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_1(x)f_2(y)d^n x d^m y = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x)d^n x \cdot \int_{\mathbb{R}^m} f_2(y)d^m y.$$

Satz 9.5 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ integrierbar und seien $A \in GL(n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist auch die Funktion $x \mapsto f(Ax + b)$ integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax + b)dx = \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

2. Meßbare Mengen

Definition 9.4 Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *meßbar* (oder *integrierbar*), falls ihre charakteristische Funktion χ_M integrierbar ist. In diesem Fall ist das Volumen (oder Lebesgue-Maß) von M definiert als

$$\text{Vol}(M) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_M(x) d^n x .$$

Beispiel 9.1 Jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist integrierbar.

Satz 9.6 Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ integrierbare Mengen. Dann sind auch die Mengen $A \cap B$, $A \cup B$ und $A \setminus B$ integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \text{Vol}(A \cup B) &= \text{Vol}(A) + \text{Vol}(B) - \text{Vol}(A \cap B) , \\ \text{Vol}(A \setminus B) &= \text{Vol}(A) - \text{Vol}(A \cap B) . \end{aligned}$$

Beispiel 9.2 Jede beschränkte offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist integrierbar. Denn die abgeschlossene Hülle \bar{U} und der Rand ∂U sind kompakt, also integrierbar. Deshalb ist auch $U = \bar{U} \setminus \partial U$ integrierbar.

Integration über Teilmengen

Definition 9.5 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge. Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt *integrierbar über M* , falls die trivial fortgesetzte Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in M , \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus M , \end{cases}$$

über \mathbb{R}^n integrierbar ist. Man setzt dann

$$\int_M f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) dx .$$

Definition 9.6 Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Nullmenge*, wenn sie integrierbar ist und das Lebesgue-Maß (Volumen) Null hat.

Bemerkung 9.3 Da das Unterintegral der charakteristischen Funktion einer beliebigen Menge stets nicht-negativ ist, ist M genau dann Nullmenge, wenn

$$\int^* \chi_M(x) dx = 0 .$$

Satz 9.7 a) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $N \subset M$. Dann ist auch N eine Nullmenge.

b) Sei $M_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, eine abzählbare Familie von Nullmengen. Dann ist auch die Vereinigung

$$M := \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k$$

eine Nullmenge.

Satz 9.8 Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine integrierbare offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$A \subset U \quad \text{und} \quad \text{Vol}(U) < \epsilon .$$

Satz 9.9 Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine abzählbare Familie $(Q_i)_{i \in I}$ von Quadern (oder Würfeln) $Q_i \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$A \subset \bigcup_i Q_i \quad \text{und} \quad \sum_i \text{Vol}(Q_i) < \epsilon .$$

Satz 9.10 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann ist für jede Nullmenge $A \subset U$ das Bild $F(A)$ eine Nullmenge.

Beispiele von Nullmengen

1. Jeder Punkt im \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) ist eine Nullmenge. Also ist auch jede abzählbare Punktmenge eine Nullmenge.
2. Jede Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge.
3. Der Rand jedes Polyeders ist eine Nullmenge.
4. Sei $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine kompakte Menge und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist der Graph Γ von f ,

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : x \in A, y = f(x)\}$$

eine Nullmenge in \mathbb{R}^n .

Definition 9.7 Gegeben seien zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Wir nennen f und g (Lebesgue-)fast überall gleich, wenn die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$$

eine Nullmenge ist.

Bemerkung 9.4 Sei $f = g$ fast überall. Falls im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ beide Funktionen endlich und stetig sind, gilt $f(a) = g(a)$. Denn in jeder Umgebung U von a gibt es Punkt $x \in U$ mit $f(x) = g(x)$.

Satz 9.11 Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ zwei Funktionen, so daß

$$f = g \quad \text{fast überall}.$$

Ist f integrierbar, so ist auch g integrierbar und es gilt

$$\int f(x)dx = \int g(x)dx.$$

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $N \subset A$ eine Nullmenge. Gilt eine Aussage a für $x \in A \setminus N$, dann sagt man, daß die Aussage fast überall gilt und schreibt:

$$a \quad \text{fast überall}.$$

“fast überall” wird auch als “presque partout” oder “p.p.” oder “almost everywhere” oder “a.e.” geschrieben.

Satz 9.12 (Fubini):

Sei $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine integrierbare Funktion. Dann gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^m$, so daß für jedes fest $y \in \mathbb{R}^m \setminus N$ die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \\ x &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

integrierbar ist. Setzt man

$$F(y) := \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) d^k x \quad \text{für } y \in \mathbb{R}^m \setminus N$$

und definiert $F(y)$ für $y \in N$ beliebig, so ist die Funktion $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{k+m}} f(x, y) d^k x d^m y = \int_{\mathbb{R}^m} F(y) d^m y.$$

3. Konvergenzsätze

Satz 9.13 (Satz von der monotonen Konvergenz von B. Levi).

Sei $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge integrierbarer Funktionen mit $f_k \leq f_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Falls

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx =: M < \infty ,$$

so ist die Funktion

$$f := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$$

integrierbar und es gilt

$$\int f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx .$$

Satz 9.14 (Satz von der majorisierten Konvergenz von H. Lebesgue).

Sei $f_k \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge integrierbarer Funktionen, die fast überall auf \mathbb{R}^n punktweise gegen eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiere. Es gebe eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ mit $\|F\|_{L_1} < \infty$, so daß

$$|f_k| \leq F \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} .$$

Dann ist auch f integrierbar und

$$\int f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx .$$

9.3 Topologische Räume

In diesem Absatz besprechen wir einige Begriffe bzgl. topologischer Räume.

Topologische Räume

Sei X eine Menge. Ein System τ von Untermengen von X ,

$$\tau \subset P^X$$

ist eine Topologie auf X , falls:

1. $\emptyset \in \tau$
2. $X \in \tau$
3. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \tau$. Dann gilt

$$\bigcap_{i=1}^n \alpha_i \in \tau .$$

D.h. der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus τ gehört zu τ .

4. Sei $\alpha_i \in \tau$, $i \in I$. Dann gilt

$$\bigcup_{i \in I} \alpha_i \in \tau.$$

D.h. die Vereinigung beliebig vieler Mengen aus τ liegt in τ .

Die Elemente $\alpha \in \tau$ heißen *offene Mengen* des topologischen Raumes (X, τ) .

Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt *Umgebung* eines Punktes x des topologischen Raumes (X, τ) , falls

1. $x \in M$
2. Es existiert $U \in \tau$ mit

$$x \in U \subset M.$$

Sei X ein linearer Vektorraum. Sei τ eine Topologie auf X . (X, τ) heißt *topologischer Vektorraum*, falls Addition und Multiplikation, d.h. die Abbildungen

$$\begin{aligned} (x, y) &\longmapsto x + y, \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda x, \end{aligned}$$

stetig sind.

Eine Menge \mathcal{B} von Umgebungen von 0 heißt *Nullumgebungsbasis*, wenn jede Umgebung U von 0 ein $V \in \mathcal{B}$ umfaßt.

Ein topologischer Vektorraum heißt *lokal konvex*, falls jede Umgebung eines Punktes eine konvexe Umgebung des Punktes umfaßt.

Satz 9.15 Ein lokalkonvexer Vektorraum X besitzt eine Nullumgebungsbasis mit:

1. Für jedes $U, V \in \tau$ gibt es ein $W \in \tau$ mit

$$W \subset U \cap V.$$

2. Für jedes $U \in \tau$ und $\alpha \neq 0$ gilt $\alpha U \in \tau$.
3. Jedes $U \in \tau$ ist balanciert, konvex und absorbierend, d.h.

$$(a) u, v \in U, \lambda \in [0, 1] \implies \lambda u + (1 - \lambda)v \in U. \text{ (konvex)}$$

- (b) Für jedes $u \in X$ existiert $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha^{-1}u \in U$. (absorbierend)
(c) $u \in U$, $|\alpha| \leq 1 \Rightarrow \alpha U \in U$. (balanciert)

Umgekehrt, jede Menge U mit den Eigenschaften 1 - 3 erzeugt eine Topologie τ , so daß (X, τ) lokalkonvex ist.

Sei

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &:= \{V \subset X : U \subset V \text{ für mindestens ein } U \in \tau\} \\ \mathcal{V}_x &= \{x + V : V \in \mathcal{V}\}.\end{aligned}$$

Dann ist \mathcal{V}_x eine Umgebungsbasis für x .

Beweis: Robertson + Robertson, S. 10.

Sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ heißt *Halbnorm*, falls:

1. $p(x) + p(y) \leq p(x) + p(y)$
2. $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$.

Satz 9.16 Sei p eine Halbnorm auf X und $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Sei

$$M := \{x \in X : p(x) \leq \epsilon\}.$$

Dann gilt:

1. $O \in M$.
2. M ist konvex.
3. M ist balanciert, d.h. sei $x \in M$, $|\alpha| \leq 1$, dann folgt

$$\alpha x \in M.$$

4. M ist absorbierend, d.h. für jedes $x \in X$ existiert $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha^{-1}x \in M.$$

5. $p(x) = \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha M\}$.

Beweis: Robertson + Robertson, S. 13.

Sei $\{p_\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\}$ eine Familie von Halbnormen auf einem Vektorraum X der der Eigenschaft, daß für jedes $x_0 \in X$ eine Halbnorm p_γ existiert mit

$$p_\gamma(x_0) \neq 0.$$

Sei

$$U = U(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n ; \gamma_1, \dots, \gamma_n) = \{x \in X : p_{\gamma_k}(x) \leq \epsilon_k, 1 \leq k \leq n\}.$$

U ist konvex, balanciert und absorbierend. Sei U_0 die Menge aller U .

Behauptung: U_0 ist eine Nullumgebungsbasis für eine Topologie τ . (X, τ) ist ein lokalkonvexer topologischer Raum.

Beweis: Siehe Yosida, S. 25, Robertson, S. 15.

Sei X ein Vektorraum. Sei $\{X_\alpha\}$ eine Familie von Unterräumen, $X_\alpha \subset X$, mit $X = \cup X_\alpha$. Jedes X_α sei ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, so daß - wenn $X_\alpha \subset X_\beta$ - gilt: Die Topologie von X_α ist mit der relativen Topologie von X_α bzgl. X_β identisch. U_0 sei die Menge von allen Mengen $U_0 \subset X$ mit:

1. U_0 ist konvex und balanciert.
2. $U_0 \cap X_\alpha$ ist eine Umgebung von 0 in X_α .

Behauptung: U_0 ist eine Nullumgebungsbasis für eine Topologie τ . Mit dieser Topologie τ ist (X, τ) ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. τ heißt die *induktive Topologie* von X bzgl. $\{X_\alpha\}$.

Beweis: Siehe Robertson + Robertson, S. 79.

9.4 Sobolev-Räume: Definition durch Vervollständigung

Sei Ω eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n . Sei

$C^\infty(\Omega) :=$ Menge aller unendlich oft differenzierbaren reellen Funktionen auf Ω .

Satz 9.17 *Sei X ein metrischer Raum. Dann gibt es einen Fréchet-Raum Y und einen Unterraum $\tilde{X} \subset Y$ mit:*

1. \tilde{X} ist dicht in Y .

2. X und \tilde{X} sind isometrisch und isomorph.

Der Raum \tilde{X} heißt Vervollständigung von X und ist bis auf Isometrie eindeutig.

Beweis: Der Beweis basiert auf Cauchy-Folgen, wie bei der Vervollständigung von Q zu \mathbb{R} .

Definition 9.8 Sei Ω eine offene Teilmenge des \mathbb{R}_n , $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$, $m \geq 0$, $p \geq 1$. Sei $L^p(\Omega)$ der Lebesguesche Raum. Die Elemente dieses Raumes sind Klassen äquivalenter Funktionen $x(t)$, die auf Ω Lebesgue-messbar sind und für die $|x(t)|^p$ Lebesgue-summierbar ist:

$$\begin{aligned}\|x\|_p &= \left[\int_{\Omega} |x(t)|^p dt \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|x\|_{\infty} &= \text{vrai } \max_{t \in \Omega} |x(t)| = \text{ess. sup } |x(t)| \\ &= \inf \{K : |x(t)| \leq K \text{ fast überall}\}. \\ \|u\|_{m,p} &= \left[\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (\|D^\alpha u\|_p)^p \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{m,\infty} &= \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{\infty}. \\ H^{m,p}(\Omega) &:= \text{Vervollständigung von } \{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\} \\ H_0^{m,p}(\Omega) &:= \text{Vervollständigung von } \{u \in C_0^\infty(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\} \text{ bezüglich } \|\cdot\|_{m,p}.\end{aligned}$$

Diese Definitionen von $H^{m,p}(\Omega)$ und $H_0^{m,p}(\Omega)$ sind sehr einfach und oft sehr nützlich. Man kann sie z.B. benutzen, um die Definitionsbereiche der Bilinearform a und des linearen Funktional b zu erweitern:

$$\begin{aligned}a(u, v) &:= \lim_{\substack{\varphi_n \rightarrow u \\ \Psi_n \rightarrow v \\ \varphi_n, \Psi_n \in C^\infty(\Omega)}} a(\varphi_n, \Psi_n).\end{aligned}$$

Es läßt sich leicht feststellen, daß $\{a(\varphi_n, \Psi_n)\}$ eine Cauchy-Folge ist, wenn $\{\varphi_n\}$ und $\{\Psi_n\}$ Cauchy-Folgen sind.

9.5 Sobolev-Räume: Definition mit Hilfe schwacher Ableitungen

Obwohl die Definition von $H^{m,p}(\Omega)$ und $H_0^{m,p}(\Omega)$ mit Hilfe der Vervollständigung sehr schlicht ist, hat sie den Nachteil, daß die funktionstheoretischen Eigenschaften der

Elemente von $H^{m,p}(\Omega)$ nicht geklärt sind. In diesem Absatz wird deshalb ein ganz anderer Weg eingeschlagen.

Sei Ω eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n . Sei

$$\begin{aligned} X &:= C_0^\infty(\Omega) \\ &= \text{die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf } \Omega \text{ mit kompaktem Träger} \end{aligned}$$

Sei $K \subset \Omega$ kompakt,

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\phi \in X : \text{supp}(\phi) \subset K\} .$$

Sei

$$p_{K,m}(\phi) := \sup_{\substack{|\alpha| \leq m \\ x \in K}} |D^\alpha \phi| ,$$

für $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$, $m \geq 0$. $p_{K,m}$ ist eine Seminorm auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Seien $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ positive Zahlen,

$$U(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n ; m_1, \dots, m_n ; K) = \{\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : p_{K,m_j}(\phi) \leq \epsilon_j, 1 \leq j \leq n\} .$$

Mit dieser Nullumgebungsbasis ist $X_K = \mathcal{D}_K(\Omega)$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum.

Definition 9.9 Mit der induktiven Topologie τ bzgl. $\{X_K\}$ ist (X, τ) ein lokalkonvexer topologischer Raum, der mit $\mathcal{D}(\Omega)$ bezeichnet wird.

Bemerkung 9.5 Siehe Yosida, S. 28, für weitere Eigenschaften von $\mathcal{D}(\Omega)$.

Der Raum $\mathcal{D}'(\Omega)$, der duale Raum zu $\mathcal{D}(\Omega)$, besteht aus allen stetigen linearen Funktionalen auf $\mathcal{D}(\Omega)$. Ein Element $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt *Distribution* oder *Verallgemeinerte Funktion*. $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ heißt *Testfunktion*.

Seien nun $S, T, T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $c \in \mathbb{R}$. Es gilt (siehe z.B. Adams, S. 19):

1. $(S + T)(\varphi) = S(\varphi) + T(\varphi), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
2. $(cT)(\varphi) = c(T(\varphi)), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
3. $T_n \rightarrow T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ genau dann, wenn $T_n \varphi \rightarrow T \varphi$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Die Topologie von $\mathcal{D}'(\Omega)$ ist die schwach*-Topologie, d.h. die schwächste Topologie, womit alle Funktionale L_φ , $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} L_\varphi & : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \\ L_\varphi(T) & = \langle T, \varphi \rangle := T(\varphi) \end{aligned}$$

stetig sind. Diese Topologie wird durch die Seminorm

$$p(T) = p(T; \varphi_1, \dots, \varphi_m) = \sup_{1 \leq k \leq m} |T(\varphi_k)|$$

erzeugt.

Definition 9.10 Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, α ein Multiindex. Die Ableitung $D^\alpha T$ ist die Distribution

$$(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi).$$

Sei $u \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$, d.h. $u|_A \in L_1(A)$ für jede messbare Teilmenge $A \subset \Omega$, wofür $\bar{A} \subset \Omega$ und \bar{A} kompakt ist. Sei

$$T_u \varphi := \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx.$$

T_u ist ein lineares Funktional. Weiter ist T_u stetig. D.h. T_u ist eine Distribution, $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Definition 9.11 Sei $u \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$. $v \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$ heißt die schwache Ableitung $D^\alpha u$ von u , falls

$$T_v = D^\alpha(T_u),$$

d.h.

$$\int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Beispiel 9.3 Sei H die Heaviside-Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

$$(D(T_H))(\varphi) = \varphi(0) = \delta_0 \varphi,$$

wo δ_0 die Diracsche Funktion ist.

$$\delta_0 \varphi := \varphi(0).$$

In diesem Beispiel hat die Funktion H keine verallgemeinerte Ableitung.

Bemerkung 9.6 Falls die verallgemeinerte Ableitung $D^\alpha u$ existiert, dann ist sie bis auf Nullmengen eindeutig bestimmt.

Definition 9.12 Sei $m \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. $W^{m,p}(\Omega)$ sei die Menge aller Funktionen u , die schwache Ableitungen $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ besitzen. Man setzt

$$\|u\|_{m,p} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} (\|D^\alpha u\|_p)^p \right]^{1/p}.$$

Satz 9.18 $W^{m,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum.

Beweis: (siehe Yosida, S. 55).

Sei $\{u_k\}$ eine Cauchy-Folge in $W^{m,p}(\Omega)$. D.h., für jedes $\epsilon > 0$ gibt es N mit

$$\|u_n - u_m\|_{m,p} \leq \epsilon \quad \text{für } m, n \geq N.$$

Es folgt, daß die Folgen von schwachen Ableitungen $\{D^\alpha u_k\}$ auch Cauchy-Folgen sind, so daß Elemente $f^{(\alpha)} \in L_p(\Omega)$ existieren mit

$$D^\alpha u_k \longrightarrow f^{(\alpha)} \quad \text{in } L_p(\Omega).$$

Es muß dann gezeigt werden, daß $f^{(\alpha)} = D^\alpha f^{(0)}$ gilt.

9.6 Das Verhältnis zwischen $W^{m,p}(\Omega)$ und $H^{m,p}(\Omega)$

Sei

$$X = C^\infty(\Omega) \cap H^{m,p}(\Omega).$$

X ist dicht in $H^{m,p}(\Omega)$. Jedes Element $x \in X$ liegt auch in $W^{m,p}(\Omega)$. Es folgt:

$$H^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega).$$

Lange Zeit blieb die Frage offen, unter welchen Bedingungen $H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$. 1964 zeigten Meyers und Serrin in einer sehr schönen Arbeit, daß folgendes gilt:

Satz 9.19 Sei $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega).$$

Beweis: Siehe Adams, S. 52.

Der Satz ist falsch für $p = \infty$.

Beispiel 9.4 Sei $n = 1$, $p = 1$, $\Omega = (-1, +1)$, $u(x) := |x|$.

Die schwache Ableitung Du existiert, da für jedes $\varphi \in C_0^\infty(-1, +1)$,

$$\begin{aligned} (-1) \int_{-1}^{+1} u \varphi'(x) dx &= \int_{-1}^0 x \varphi'(x) dx - \int_0^1 x \varphi'(x) dx \\ &= [x \varphi(x)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \varphi(x) dx - [x \varphi(x)]_0^1 + \int_0^1 \varphi(x) dx \\ &= \int_{-1}^{+1} v(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

mit

$$v(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x \leq 0 \\ +1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

D.h. $v = Du$, $u \in W^{1,\infty}(-1, +1)$ und

$$\|u\|_{1,\infty} = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \|D^\alpha u\|_\infty = 1 .$$

Ist $u \in H^{1,\infty}(-1, +1)$? Wenn ja, dann existiert eine Cauchy-Folge $\{\varphi_n\}$ mit

$$\varphi_n \in C^\infty(-1, +1)$$

und

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - u\|_\infty &\longrightarrow 0 , \\ \|\varphi_n' - v\|_\infty &\longrightarrow 0 , \end{aligned}$$

wo $v \in L^1$. Es lässt sich dann zeigen, daß $v = Du$.

Sei aber $\epsilon < 1$. In jedem Intervall $(-\delta, +\delta)$ ist

$$\begin{aligned} \max Du &= 1 , \\ \min Du &= 1 . \end{aligned}$$

Es folgt, daß in so einem Intervall

$$\|\varphi_n' - Du\|_\infty > 1 - \epsilon .$$

9.7 Zusammenhang mit absoluten stetigen Funktionen

Definition 9.13 Eine auf dem Segment $[a, b]$ definierte endliche Funktion $f(x)$ heißt absolut stetig, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für ein beliebiges endliches System von paarweise durchschnittsfremden Intervallen $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ mit der Gesamtlänge

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$$

gilt

$$\left| \sum_{k=1}^n \{f(b_k) - f(a_k)\} \right| < \epsilon .$$

Satz 9.20 Jede absolut stetige Funktion ist unbestimmtes Integral ihrer Ableitung.

Beweis: Siehe Natanson, S. 257.

Satz 9.21 (siehe Smirnov, S. 3326.)

Sei $\Omega := \{x : 0 < x_i < 1, 1 \leq i \leq n\}$. Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $p > 1$.

Dann gibt es eine Funktion φ , die auf $\bar{\Omega}$ definiert ist, so daß

1. φ ist äquivalent zu u auf Ω , d.h. $\varphi(x) = u(x)$ f.ü.
2. φ ist absolut stetig bzgl. x_1 für $0 \leq x_1 \leq 1$ für fast alle x_2, \dots, x_n .
3. Für alle $x_i \in [0, 1]$ gilt:

$$\varphi(x) = \varphi(0, x_2, \dots, x_n) + \int_0^{x_1} \frac{\partial \varphi(t, x_2, \dots, x_n)}{\partial t} dt .$$

Morrey, S. 66, untersucht weitere Zusammenhänge zwischen verallgemeinerten Ableitungen und absoluter Stetigkeit.

9.8 Die Sobolewschen Einbettungssätze

9.9 Der Spur Operator γ

9.10 Die Poincarésche Ungleichung und ihre Anwendungen

Sei

$$|u|_{m,p} = \left[\sum_{|\alpha|=m} (\|D^\alpha u\|_p)^p \right]^{1/p}.$$

Auf $H^{m,p}(\Omega)$ ist $|u|_{m,p}$ eine Halbnorm, da $|1|_{m,p} = 0$. Für $H_0^{m,p}(\Omega)$ ist $|u|_{m,p}$ aber eine Norm, die zu $\|u\|_{m,p}$ äquivalent ist, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 9.22 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $d > 0$. Ω liege zwischen den Ebenen $x_n = 0$ und $x_n = d$. Dann gibt es eine Konstante K mit

$$|u|_{m,p} \leq \|u\|_{m,p} \leq K|u|_{m,p} \quad \text{für alle } u \in H_0^{m,p}.$$

Beweis: (Adams, S. 158)

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Man schreibe $x = (x', x_n)$ mit $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Dann gilt:

$$\varphi(x) = \int_0^{x_n} \frac{d}{dt} \varphi(x', t) dt. \quad (*)$$

Die Ungleichung von Hölder besagt:

$$\int_\Omega |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_p \|v\|_p \quad \text{für } u \in L^p(\Omega), v \in L^{p'}(\Omega), \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Satz 9.23 Sei

$$1 < p < \infty, u \in L^p(\Omega), v \in L^{p'}(\Omega), \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Dann ist $uv \in L^1(\Omega)$ und

$$\int_\Omega |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_{p'}.$$

Beweis:

Sei

$$f(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{1}{p'} - t.$$

Für $t \geq 0$ ist $f \geq 0$ mit $f(1) = 0$. Sei $t = ab^{-p'/p}$. Dann folgt:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \quad (\text{Young's Ungleichung}).$$

Sei $\|u\|_p, \|v\|_{p'} > 0$. Man setze

$$a := \frac{|u(x)|}{\|u\|_p}, \quad b := \frac{|v(x)|}{\|v\|_{p'}}.$$

Mit $u = 1$ und $v = \frac{d}{dt}\varphi(x', t)$ folgt aus (*):

$$\begin{aligned} |\varphi(x)|^p &= \left[\int_0^{x_n} u(t)v(t)dt \right]^p \\ &\leq [\|u\|_{p'} \cdot \|v\|_p]^p \\ &= \left(\int_0^{x_n} 1 dt \right)^{\frac{p}{p'}} \cdot \int_0^{x_n} \left| \frac{d}{dt} \varphi(x', t) \right|^p dt \\ &\leq x_n^{p-1} \cdot \int_0^d \left| \frac{d}{dt} \varphi(x', t) \right|^p dt. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} (\|\varphi\|_{0,p})^p &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_0^d |\varphi(x)|^p dx_n \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_0^d x_n^{p-1} dx_n \int_0^d \left| \frac{d}{dt} \varphi(x', t) \right|^p dt \\ &\leq \frac{d^p}{p} \int_{\mathbb{R}^n} dx' \int_0^d \left| \frac{d}{dt} \varphi(x', t) \right|^p dt \\ &\leq \frac{d^p}{p} (|\varphi|_{1,p})^p \end{aligned}$$

Zusammenfassend

$$|\varphi|_{1,p}^p \leq \|\varphi\|_{1,p}^p = \|\varphi\|_{0,p}^p + |\varphi|_{1,p}^p \leq \left(\frac{d^p}{p} + 1 \right) |\varphi|_{1,p}^p. \quad (**)$$

Die Ungleichung (**) gilt auch, wenn φ durch ihre Ableitungen ersetzt wird. Der Satz folgt nun z.B. durch Induktion.

Bemerkung 9.7 1. Damit $\|\varphi\|_{1,p} \leq \text{const} |\varphi|_{1,p}$ ist nur erforderlich, daß $\varphi = 0$ auf einem Teil Γ_1 von $\partial\Omega$ mit positivem Oberflächenmaß.

2. Das Problem

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & |\varphi|_{0,2} \\ \varphi \in H_0^1(\Omega) & |\varphi|_{1,2} \end{array}$$

führt zu einer Eigenwertaufgabe. Siehe Polya und Szego [1951].

3. *Ungleichungen Poincaréscher Art für Differenzen wurden schon in der Arbeit von Courant, Friedrichs und Lewy angewandt. Siehe auch das Buch von Epstein.*

Als direkte Folgerung aus der Poincaréschen Ungleichung erhält man:

Satz 9.24 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Die Normen $\|\cdot\|_{1,p}$ und $|\cdot|_{1,p}$ sind äquivalente Normen in $H_0^{1,p}$.*

Satz 9.25 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Sei*

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_{\Omega} \operatorname{div} u \cdot \operatorname{div} v \, dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx \end{aligned}$$

für $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

a ist eine beschränkte V-elliptische Bilinearform.

Literatur

Adams, R.A.: Sobolev Spaces. New York: Academic Press, 1975.

Ciarlet, P.G.: The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland, 1978.

Gilbarg, D., Trudinger, N.S.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer 1977.

Hackbusch, W.: Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen. Teubner 1986.

Heuser, H.: Funktionalanalysis. Teubner 1986.

Kelley, J.L. Namioka, I.: Linear Topological Spaces. Springer 1963.

Morrey, C.B. Jr.: Multiple Integrals in the Calculus of Variations. Springer 1966.

Natanson, I.P.: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen.

Robertson, A.P., Robertson, W.J.: Topological Vector Spaces. Cambridge 1964.

Smirnow, W.I.: Lehrgang der Höheren Mathematik, Teil V, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1962.

Sobolev, S.L.: Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics. American Mathematical Society 1963.

Schwarz, H.R.: Methode der finiten Elemente. Teubner 1980.

Strang, G.J.: Fix: An Analysis of the Finite Element Method. Prentice-Hall 1973.

Yosida, K.: Functional Analysis, 2nd edition. Springer 1968.

Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method in Engineering Science. Second edition, McGraw-Hill 1971. (Es gibt eine neuere Ausgabe.)

Kapitel 10

Finite Elemente

10.1 Einführung

10.2 Das Galerkin-Verfahren: Fehlerabschätzungen

Nach diesen langen, aber durchaus spannenden Vorbereitungen können wir uns wieder der Lösung von Randwertaufgaben widmen.

Satz 10.1 Sei X ein reeller Hilbertraum. Sei a und b eine Bilinearform

$$a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

bzw. ein lineares Funktional

$$b : X \longrightarrow \mathbb{R} .$$

Sei a beschränkt und X -elliptisch:

$$\begin{aligned} a(u, v) &\leq M\|u\| \cdot \|v\| , \\ a(u, u) &\geq \alpha\|u\|^2 . \end{aligned}$$

Sei X_h ein Teilraum von X .

Die Gleichungen

$$a(u, v) = \langle b, v \rangle , \quad \forall v \in X$$

und

$$a(u_h, v_h) = \langle b, v_h \rangle , \quad \forall v_h \in X_h$$

haben eindeutige Lösungen u bzw. u_n (Lax-Milgram).

Es gilt:

$$\|u - u_n\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_n \in X_h} \|u - v_n\| .$$

Beweis: Für jedes $v_h \in X_h$ gilt:

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_n\|^2 &\leq a(u - u_n, u - u_n) \\ &= a(u - u_n, u - v_h) + a(u - u_n, v_h - u_n) \\ &= a(u - u_n, u - v_h) + a(u, v_h - u_n) - a(u_n, v_h - u_h) \\ &= a(u - u_n, u - v_h) + \langle b, v_h - u_n \rangle - \langle b, v_h - u_n \rangle \\ &= a(u - u_n, u - v_h) \\ &\leq M \|u - u_n\| \cdot \|u - v_h\| . \end{aligned}$$

Literatur

Adams, R.A.: Sobolev Spaces. New York: Academic Press, 1975.

Ciarlet, P.G.: The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland, 1978.

Gilbarg, D., Trudinger, N.S.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer 1977.

Hackbusch, W.: Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen. Teubner 1986.

Heuser, H.: Funktionalanalysis. Teubner 1986.

Kelley, J.L. Namioka, I.: Linear Topological Spaces. Springer 1963.

Morrey, C.B. Jr.: Multiple Integrals in the Calculus of Variations. Springer 1966.

Natanson, I.P.: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen.

Robertson, A.P., Robertson, W.J.: Topological Vector Spaces. Cambridge 1964.

Smirnow, W.I.: Lehrgang der Höheren Mathematik, Teil V, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1962.

Sobolev, S.L.: Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics. American Mathematical Society 1963.

Schwarz, H.R.: Methode der finiten Elemente. Teubner 1980.

Strang, G.J.: Fix: An Analysis of the Finite Element Method. Prentice-Hall 1973.

Yosida, K.: Functional Analysis, 2nd edition. Springer 1968.

Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method in Engineering Science. Second edition, McGraw-Hill 1971. (Es gibt eine neuere Ausgabe.)