– p. ODE

1. Einführung

Df 1.1 Anfangswertproblem

Sei $f: \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig.

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad t \geq 0$$
$$x(0) = x_0$$

heißt Anfangswertproblem zum AW x_0.

Ist f nicht von t abhängig, so nennen wir (1) autonom, sonst zeitabhängig.

Bem. 1.1: Ex. und Eindeutigkeit

Bestimmte Bed. an f garantieren Ex. und Eindeutigkeit von (lokalen) Lösungen von (1).

Siehe dazu in d. Literatur:

- Satz von Picard-Lindelöf (f Lipschitzstetig $\to$ Ex. + Eind.)
- Satz von Peano (f stetig $\to$ Ex.)

Lösungsmethoden I: Separationsansatz

Def. 2.1: Separierbare DGL

Lässt sich f in (1) als $f(x,t) = g(x) \cdot h(t)$ schreiben, so heißt die DGL <u>separierbar</u>.

Methode 2.1: Separation.

Betrachte

$$(2) \qquad \dot{x}(t) = g(x) \cdot h(t) \; ; \; t \geq 0$$
$$x(0) = x_0 .$$

Dann haben wir (heuristisch)

1) $\dfrac{dx}{dt} = g(x) \cdot h(t) \iff \dfrac{dx}{g(x)} = h(t)\,dt$

2) Integrieren: $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int_0^t h(\tau)\,d\tau$

3) Integrale ausrechnen, nach x auflösen.

Bsp. 2.1: $\dot{x} = t + t x^2$, $x(0) = 0$

$$\frac{dx}{dt} = t(1+x^2) \iff \frac{1}{1+x^2}\,dx = t\,dt$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+\xi^2}\,d\xi = \int_0^t \tau\,d\tau$$

$$\arctan(x) - \underbrace{\arctan(0)}_{=0} = \frac{1}{2}t^2$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \tan\left(\frac{1}{2}t^2\right)$$

Bsp. 2.2.: $\dot{x} = x^2$, $x(t_0) = x_0$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\xi^2}\, d\xi = \int_{t_0}^{t} d\tau$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = t - t_0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{t - t_0 + \frac{1}{x_0}} = \frac{x_0}{1 + x_0(t - t_0)}$$

3. Lösungsmethoden II: Lineare DGLn

Def. 3.1. Lineare DGL

Lässt sich f in (1) in der Form

$$f(t,x) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$$

schreiben, so nennt man die DGL linear. Ist $b(t) \equiv 0$, so spricht man von einer homogenen, andernfalls von einer inhomogenen DGL.

Methode 3.1: Lineare homogene DGL.

Sei also $\dot{x}(t) = a(t)\, x(t)$, $x(t_0) = x_0$. (3)

Wir formen um und lösen wie folgt (heuristisch):

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = a(t) \rightsquigarrow \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)}{x(\tau)}\, d\tau = \int_0^t a(\tau)\, d\tau$$

$\Rightarrow \ln(x(t)) - \ln(x_0) = A(t) - A(t_0)$ (A sei Stammfkt. von a)

Damit ist: $x(t) = x(0) \cdot e^{(A(t) - A(0))}$

Bem. 3.1.: Dasselbe Ergebnis hätten wir hier auch mit einem Sep.-Ansatz erhalten!

Methode 3.2. Inhomogene lineare DGL. Variation der Konstanten

Betrachte die inhomogene lineare DGL

$$(4) \qquad \dot{x}(t) = a(t)\,x(t) + b(t); \quad t \geq 0$$
$$x(0) = x_0.$$

Wir machen den Ansatz $x(t) = c(t)\, e^{\alpha(t)}$, mit $\alpha(t) = \int_0^t a(\tau)\,d\tau$.
(siehe homog. Fall).

Einsetzen in die DGL ergibt

$$\dot{x}(t) = \dot{c}(t)\cdot e^{\alpha(t)} + c(t)\cdot a(t)\, e^{\alpha(t)}$$

$$= \dot{c}(t)\, e^{\alpha(t)} + a(t)\,x(t)$$

$$\Rightarrow \dot{c}(t)\, e^{\alpha(t)} = b(t) \Rightarrow \int_0^t b(\tau)\, e^{-\alpha(\tau)}\, d\tau \overset{+\text{const}}{=} c(t)$$

Also ist $x(t) = e^{\alpha(t)} \cdot \left[\int_0^t b(\tau)\, e^{-\alpha(\tau)}\, d\tau + \text{const} \right]$ eine Lösung von (4).

Bsp. 31

Betrachte die inhomog. DGL

$$\dot{x}(t) = 2t\,x(t) + t^3, \quad t \geq 0$$
$$x(0) = 0$$

Wir haben $\alpha(t) = \int_0^t 2\tau\, d\tau = t^2$, und

$$c(t) = \int_0^t \tau^3 \cdot e^{-\tau^2}\, d\tau = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(t^2+1)\,e^{-t^2} \quad \Big| \text{ Subst. } s = t^2 + \text{partielle Int.}$$

Also $x(t) = e^{t^2} \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(t^2+1)\,e^{-t^2} + \text{const} \right]$

$$\text{const} = 0$$

4. Autonome Systeme

Wir betrachten nun Systeme von linearen autonomen DGL'n.

Def. 4.1: Lineares autonomes DGL System

Sei $x^{(t)} \in \mathbb{R}^n$, $(x: [0,\infty) \to \mathbb{R}^n)$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Das System $\dot{x}(t) = A\,x(t)$

$$x(0) = x_0$$

heißt lineares autonomes System.

Def. 4.2.: Matrix Exponentialfunktion

Die Exponentialreihe konvergiert für jeden linearen Operator $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in der Operatornorm.
Wir definieren daher:

$$e^A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

Lemma 4.1: Lösung linearer autonomer Systeme

Für eine Matrix $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Abbildung

$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{At} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

differenzierbar und es gilt $\frac{d}{dt} e^{At} = A\,e^{At}$.

Bem. 4.1.:

Hat A Diagonalgestalt, $\rightarrow A = \mathrm{Diag}(A_1, \ldots, A_n)$ so gilt

$$e^A = \mathrm{Diag}(e^{A_1}, \ldots, e^{A_n}).$$

Def. 4.3 Gleichgewichtspunkt.

Betrachte wieder allgemein die GDGL

$$\dot{x} = f(x). \quad (5)$$

Die konstante Lösung $x(t) = x_e$ mit $\dot{x}_e = f(x_e) = 0$ heißt Gleichgewichtspunkt des Systems (5)

Def. 4.4. Stabilität

- Ein Ggp x_e heißt stabil, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : x_0 \in B_\delta(x_e) \Rightarrow x(t) \in B_\varepsilon(x_\varepsilon), \; t \geq 0$$

- Ein Ggp x_e heißt asymptotisch stabil, wenn x_e stabil ist und zudem $\lim_{t \to \infty} x(t) = x_e \quad \forall x_0$ gilt.

Lemma 4.2: Stabilität linearer autonomer Systeme

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Für das System $\dot{x} = Ax$ sind äquivalent:

1) Die Ruhelage $x(0) = 0$ ist asymptotisch stabil.

2) Alle Eigenwerte $\lambda_i, i = 1,..,n$ von A erfüllen $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$.

3) Es gibt Konstanten $\alpha > 0$ und $k \geq 1$ mit

$$\| e^{At} \| \leq k e^{-\alpha t}.$$

Bsp. 4.1

Betrachte $\dot{x}(t) = a x(t),\ t \geq 0,\ x(0) = x_0$.

Wir haben gesehen, dass

$$x(t) = x_0 e^{at}.$$

Falls $a < 0$, so ist x_0 GGP und $\lim\limits_{t\to\infty} x_0 e^{at} = 0$.

Bem. 4.2: Linearisierte Stabilität.

Das Eigenwertkriterium lässt sich auch auf allgemeine Systeme $\dot{x}(t) = f(x(t))$ anwenden, sofern $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Dann betrachtet man die Ableitung $Df(x_e) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Das explizite Eulerverfahren

Oft sind gewöhnliche DGLn nicht analytisch lösbar.
In dem Fall bieten sich Verfahren zur näherungsweisen Lösung der DGLn an.
Das einfachste solche Verfahren ist das explizite Eulersche Polygonzugverfahren.

Heuristische Herleitung:

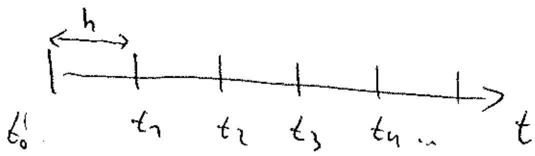
Def. der Ableitung:

$$\dot{x}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = f(t,x)$$

Für kleine h ist also $\dot{x}(t) \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$, und damit

$$x(t+h) = x(t) + h \cdot f(t,x).$$

Unterteile das Zeitintervall:



sodass $t_n = n \cdot h$.

Damit erhalten wir eine iterative Folge

$$x(t_n) = x(t_{n-1}) + h \cdot f(t_{n-1}, x(t_{n-1}))$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Für gegebenen Startwert x_0 und bekanntes f erzeugt man so eine Folge von Näherungswerten $(t_0, x_0), (t_1, x(t_1)), \ldots (t_n, x(t_n))$.