Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 7, Abgabe bis Freitag, 11.12.2015, 10.00 Uhr

Aufgabe 1: *Poiseuille Fluss* (5 Punkte)
Das Gesetz von Poiseuille beschreibt einen Volumenstrom (also das geflossene Volumen pro Zeit) einer Flüssigkeit durch ein Rohr mit Radius a und Länge l. Der Volumenstrom P wird in einer Dimension beschrieben durch

$$-\frac{dP}{dz} + \eta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) = 0, \tag{1}$$

wobei $\frac{dP}{dz}$ den Druckgradienten $(P_1 - P_0)$, also den Unterschied des Drucks zwischen Anfang und Ende des Rohrs beschreibt.

- Leiten Sie die Darstellung der Stokes Gleichungen (mit Viskosität η) in Zylinderkoordinaten her.
- Der Fluss sei statisch (keine Änderung in der Zeit), die Radialen und Wirbelanteile seien null, der Fluss sei Axensymmetrisch und weiter sei $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$. Leiten Sie mit diesem Annahmen Gleichung (1) her.
- Leiten Sie aus der Lösung

  $$u_z(r) = \frac{1}{4\eta}\frac{dP}{dz}(r^2 + c_1 \ln(r) + c_2)$$

  eine konkrete Lösung für die Randwerte $u_z \neq \infty$ bei $r = 0$ und $u_z = 0$ bei $r = a$ her und interpretieren sie die Lösung. Wo ist der Volumenfluss am größten (u_{max})?
- Berechnen Sie für einen Schnitt durch das Rohr die totale Flussrate

  $$Q = \int_0^a 2\pi r u(r) dr.$$

  Wie ist diese Lösung zu interpretieren?

Aufgabe 2: *Loesungen der gedaempften Wellengleichung* (4 Punkte)
Berechnen Sie durch Separation der Variablen die Lösungen der gedämpften Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \lambda\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{in} \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T),$$

mit den Randwerten $u(0,t) = u(1,t) = 0$.

Aufgabe 3: *Asymptotische Entwicklung der Randschicht* (3 Punkte)
Wir betrachten die 1-dimensionale Gleichung

$$-\epsilon u''(x) + u(x) = 1$$

auf $\Omega = [0, 1]$ mit den Randwerten $u(0) = 0$ und $u(1) = 1$.

- Lösen Sie die Gleichung exakt
- Führen Sie eine asymptotische Entwicklung mit dem Ansatz $u(x) = \mathcal{U}(\frac{x}{\delta})$ für x nahe bei null durch. Wie müssen Sie $\delta(\epsilon)$ wählen, dass Sie eine plausible Asymptotik erhalten, die die Randschicht beschreibt. Argumentieren Sie damit die Grössenordnung der Ranschicht abhängig von ϵ und vergleichen Sie ihr Resultat mit der exakten Lösung.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 18.12.2015, 4 Punkte)
Programmieren Sie die Gleichung aus Aufgabe 3 für verschiedene ϵ und Gitterweiten. Vergleichen Sie die Ergebnisse, auch im Hinblick auf Aufgabe 3.

Hinweis: $u''(x) \approx \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{2h}$