

Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 1, Abgabe bis Freitag, 30.10.2015, 10.00 Uhr

Übungstermine:

Gruppe 1:	Mi.	8-10 Uhr	SR 1B	BK	105	(Patricia Friele)
Gruppe 2:	Mi.	12 - 14 Uhr	SR 1B	BK	120	(Leoni Hoffboll)

Aufgabe 1: *Dimensionslose Variable und Skalierung* (4 Punkte)

Betrachten Sie den Flug eines Teilchens, das auf einer Ebene mit einer Geschwindigkeit $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ abgeschossen wird und eine Ladung Q besitzt. Weiterhin ist im Punkte $\mathbf{P} = (P_1, P_2)$ eine fixe Ladung Q_P angebracht. Es gilt $QQ_P < 0$, d.h. die Ladungen ziehen sich an.

- (a) Entwickeln Sie ein mathematisches Modell. Benutzen Sie dafür die Newton'sche Bewegungsgleichung aus dem Skriptum mit der Kraft

$$F(\mathbf{x}) = F_R(\mathbf{v}) + F_C(\mathbf{x}), \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}.$$

Dabei ist $F_R(\mathbf{v}) = -\lambda\mathbf{v}$, $\lambda > 0$, die vereinfachte Reibungskraft und F_C die Coulomb-Kraft mit

$$F_C(\mathbf{x}) = -k_C QQ_P \frac{\mathbf{x} - \mathbf{P}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{P}\|^3}$$

und Coulomb-Konstante $k_C > 0$.

- (b) Wählen Sie eine geeignete Skalierung und überführen Sie das Modell in eine dimensionslose Form.

Aufgabe 2: *Sensitivitätsanalyse* (4 Punkte)

Verwenden Sie im Modell aus Aufgabe 1 die Ortskoordinaten $\mathbf{x}(T)$ des Teilchens zur Zeit T als Output und die Ortskoordinaten der fixen Ladung $\mathbf{P}$ als Input. Führen sie dafür eine Sensitivitätsanalyse durch, d.h. leiten Sie Gleichungen für $\frac{\partial x_i}{\partial P_j}$ her.

Aufgabe 3: *Preisanpassung* (4 Punkte)

Ein Käufer und ein Verkäufer verhandeln über den Preis einer Ware. Zu Beginn ($t = 0$) liegt der Verkaufspreis ($P_V(0)$) über dem Angebotspreis ($P_K(0)$) des Käufers. In jedem Zeitschritt Δt verringert der Verkäufer seinen Preis um einen Bruchteil der Differenz, nämlich um $A\Delta t(P_V(t) - P_K(t))$, während der Käufer sein Angebot um einen Bruchteil anhebt, nämlich um $B\Delta t(P_V(t) - P_K(t))$.

- (a) Leiten Sie für kleine Zeitschritte Δt ein asymptotisches Modell basierend auf gewöhnlichen Differentialgleichungen her.
- (b) Berechnen Sie die Lösung des Systems und zeigen sie die exponentielle Konvergenz in der Zeit gegen einen Gleichgewichtspreis.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 6.11.2015, 4 Punkte)

Implementieren sie die diskrete Dynamik der Preisentwicklung in Matlab oder Python und plotten sie die Evolution des von P_K und P_V für verschiedene Werte von A und B . Verwenden Sie sinnvolle Anfangswerte für P_V und P_K und einen geeigneten Zeitschritt. Modifizieren Sie anschliessend das Modell, indem Sie A und B zu jedem Zeitpunkt zufällig gleichverteilt in $[0, M]$ mit geeignetem Maximalwert M wählen, um so einen realistischere Verhandlungsablauf zu simulieren. Machen Sie mehrere Durchläufe und berechnen Sie nach einer hinreichenden Anzahl an Zeitschritten den empirischen Mittelwert und die Varianz von P_V und P_K . Vergleichen Sie diese mit dem Gleichgewichtspreis für $A = B = \frac{M}{2}$.

Hinweis: Benutzen sie `M*rand` um die Zufallszahlen zu erzeugen. Seien $P_K^i(T)$ und $P_V^i(T)$ die Preise der Käufer bzw. Verkäufer zum Zeitpunkt T für verschiedene Durchläufe $i = 1, \dots, N$. Dann ist der empirische Mittelwert definiert durch

$$\overline{P_V} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P_V^i(T), \quad \overline{P_K} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P_K^i(T),$$

und die empirische Varianz durch

$$\sigma_V^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (P_V^i(T) - \overline{P_V})^2, \quad \sigma_K^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (P_K^i(T) - \overline{P_K})^2.$$