

# Kapitel 4

## Zufall und Ordnung: Diffusion

Im folgenden werden wir uns mit dem wichtigen Konzept von Diffusion beschäftigen. Zum ersten Mal haben wir einen Diffusionseffekt durch die Viskosität in den Navier-Stokes Gleichungen (3.24) gesehen, wir wollen nun ein bisschen näher die Hintergründe von Diffusion und auch von Drift diskutieren. Dazu werden wir drei verschiedene Ansätze betrachten: die Asymptotik aus einem diskreten Sprungprozess, die Herleitung aus den Langevin-Gleichungen für Brown'sche Bewegung und eine direkte Herleitung im Kontinuum. Diffusion und Brown'sche Bewegung haben vielfältige Anwendungen, von der Wärmeleitung bis zur Modellierung von Aktienpreisen und Derivaten auf Finanzmärkten, die wir ebenfalls noch kurz diskutieren wollen.

### 4.1 Diskrete Sprungprozesse - Random Walks

Wir werden nun im folgenden einfache Random Walks betrachten auf einem Gitter der Form  $h\mathbb{Z}^2$ , mit einer Schrittweite  $h > 0$ , die eine Skalierung des Gitters bedeutet. Wir nehmen an, dass wir in einem kleinem Zeitschritt  $\tau > 0$  nur einen Gitterpunkt weiter springen dürfen und dass die Wahrscheinlichkeit dies zu tun klein sind, bzw. ihre Summe sinnvollerweise kleiner oder gleich eins.

Wir spezifizieren im Folgenden die Wahrscheinlichkeiten für Sprünge in einem Zeitintervall der Länge  $\tau$ :

- Die Wahrscheinlichkeit von  $(x, y)$  nach  $(x + h, y)$  zu springen, sei  $\alpha$ .
- Die Wahrscheinlichkeit von  $(x, y)$  nach  $(x - h, y)$  zu springen, sei  $\beta$ .
- Die Wahrscheinlichkeit von  $(x, y)$  nach  $(x, y + h)$  zu springen, sei  $\gamma$ .
- Die Wahrscheinlichkeit von  $(x, y)$  nach  $(x, y - h)$  zu springen, sei  $\delta$ .
- Die Wahrscheinlichkeit bei  $(x, y)$  zu bleiben, ist folglich  $1 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$ .

Damit haben wir schon implizit eine Markov-Eigenschaft angenommen, d.h. die Sprungwahrscheinlichkeit ist nur abhängig vom aktuellen Zustand  $(x, y, t)$ , nicht aber von der Geschichte. Im Fall konstanter Übergangsraten  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\delta$  ist die Sprungwahrscheinlichkeit sogar unabhängig vom aktuellen Zustand. Wir beschreiben den Prozess nun wieder durch die Wahrscheinlichkeit  $P(x, y, t)$  zur Zeit  $t$  im Punkt  $(x, y)$  zu sein.

Es gilt dann

$$\begin{aligned} P(x, y, t + \tau) &= P(x, y, t)(1 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)) + \\ &P(x + h, y, t)\alpha + P(x - h, y, t)\beta + \\ &P(x, y + h, t)\gamma + P(x, y - h, t)\delta. \end{aligned}$$

Um eine Kontinuumsgleichung zu erhalten, werden wir nun wieder annehmen, dass wir im Grenzwert eine kontinuierliche Dichte  $\rho(x, y, t)$  für  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  und  $t \in \mathbb{R}_+$  erhalten. Dann können wir für kleine  $h$  und  $\tau$  eine Taylor-Entwicklung durchführen und wieder entsprechende Terme höherer Ordnung vernachlässigen. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \rho(x, y, t + \tau) &= \rho(x, y, t) + \partial_t \rho(x, y, t)\tau + \mathcal{O}(\tau^2) \\ \rho(x + h, y, \tau) &= \rho(x, y, t) + \partial_x \rho(x, y, t)h + \frac{1}{2}\partial_{xx}\rho(x, y, t)h^2 + \mathcal{O}(h^3) \\ \rho(x - h, y, \tau) &= \rho(x, y, t) - \partial_x \rho(x, y, t)h + \frac{1}{2}\partial_{xx}\rho(x, y, t)h^2 + \mathcal{O}(h^3) \\ \rho(x, y + h, \tau) &= \rho(x, y, t) + \partial_y \rho(x, y, t)h + \frac{1}{2}\partial_{yy}\rho(x, y, t)h^2 + \mathcal{O}(h^3) \\ \rho(x, y - h, \tau) &= \rho(x, y, t) - \partial_y \rho(x, y, t)h + \frac{1}{2}\partial_{yy}\rho(x, y, t)h^2 + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

Eingesetzt in die obige Gleichung für  $P$  erhalten wir dann nach dem Kürzen entsprechender Terme (und Vernachlässigung Terme höherer Ordnung)

$$\begin{aligned} \partial_t \rho \tau &= \partial_x \rho(\alpha - \beta)h + \partial_y \rho(\gamma - \delta)h + \\ &\partial_{xx}\rho(\alpha + \beta)\frac{h^2}{2} + \partial_{yy}\rho(\gamma + \delta)\frac{h^2}{2}. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die höchste Ordnung normalerweise durch die ersten Ableitungen beschrieben wird. Dies ändert sich, wenn der Random Walk keine links-rechts bzw. oben-unten Präferenz hat, d.h.  $\alpha = \beta$  und  $\gamma = \delta$ . Dann fallen die Terme erster Ordnung weg und wir erhalten

$$\partial_t \rho = D_1 \partial_{xx} \rho + D_2 \partial_{yy} \rho.$$

mit den Diffusionskoeffizienten

$$\begin{aligned} D_1 &= (\alpha + \beta)\frac{h^2}{2\tau} \\ D_2 &= (\gamma + \delta)\frac{h^2}{2\tau}. \end{aligned}$$

Ist  $D_1 = D_2$  so erhalten wir nach Reskalierung der Zeit den einfachsten Fall einer Diffusionsgleichung (oft wegen der entsprechenden Anwendung auch Wärmeleitungsgleichung genannt)

$$\partial_t \rho = \Delta \rho. \quad (4.1)$$

Sind  $\alpha - \beta$  und  $\gamma - \delta$  sehr klein im Vergleich zu  $\alpha + \beta$  und  $\gamma + \delta$  (sodass man davon ausgehen kann, dass ein Faktor der Ordnung  $h$  dazwischen ist) wird es wichtig auch Drift-Terme zu berücksichtigen, d.h. wir erhalten eine Gleichung der Form

$$\partial_t \rho = C_1 \partial_x \rho + C_2 \partial_y \rho + D_1 \partial_{xx} \rho + D_2 \partial_{yy} \rho \quad (4.2)$$

mit

$$\begin{aligned} C_1 &= (\alpha - \beta) \frac{h}{\tau} \\ C_2 &= (\gamma - \delta) \frac{h}{\tau}. \end{aligned}$$

Ein Drift-Term bedeutet eine Bevorzugung einer gewissen Richtung. Ist z.B.  $\alpha > \beta$ , so werden Sprünge nach rechts bevorzugt, es entsteht also ein Drift nach rechts (und umgekehrt für  $\alpha < \beta$ ). Analog entsteht Drift in der  $y$ -Richtung. Die Gleichung (4.2) ist der einfachste Fall einer sogenannten Fokker-Planck Gleichung. Die allgemeinere Form einer linearen Fokker-Planck Gleichung in  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$  (falls die Sprungraten auch vom Ort abhängen) ist

$$\partial_t \rho = \nabla \cdot (\mathbf{D}(\nabla \rho + \rho \nabla V)). \quad (4.3)$$

Dabei ist  $\mathbf{D} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  ein Diffusionstensor (allgemeine Form eines Diffusionskoeffizienten) und  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  ein potential (entsprechend einer potentiellen Energie). Gleichung (4.2) lässt sich in dieser Form schreiben mit

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \\ V &= \frac{C_1}{D_1} x + \frac{C_2}{D_2} y. \end{aligned}$$

Im Fall eines sehr grossen Unterschieds  $\alpha - \beta$  und  $\gamma - \beta$  (von ähnlicher Grössenordnung wie  $\alpha + \beta$  und  $\gamma + \beta$ ) sind natürlich nur die Terme erster Ordnung wichtig. Dann erhalten wir im Grenzwert die Transportgleichung

$$\partial_t \rho = C_1 \partial_x \rho + C_2 \partial_y \rho, \quad (4.4)$$

also wieder einen Spezialfall von (3.21) mit dem Geschwindigkeitsfeld  $u = -(C_1, C_2)^T$ . In diesem Fall sind die Lösungen tatsächlich nur durch den Drift gegeben, es lässt sich leicht zeigen, dass die Lösung durch

$$\rho(x, y, t) = \rho(x + C_1 t, y + C_2 t, 0)$$

gegeben ist.

Wir bemerken auch, dass man auch die allgemeine Fokker-Planck Gleichung wieder als Spezialfall von (3.21) schreiben kann, mit dem Geschwindigkeitsfeld

$$u = -\mathbf{D} \left( \frac{1}{\rho} \nabla \rho + \nabla V \right) = -\mathbf{D} \nabla (\log \rho + V). \quad (4.5)$$

Die letzte Form ist auch nützlich, um die stationäre Lösung zu bestimmen. Es gilt im stationären Fall  $u = \text{konstant}$ , d.h.

$$\log \rho + V = c_0$$

oder

$$\rho = c e^{-V},$$

wobei die Konstante  $c$  aus der Integralbedingung  $\int \rho \, dx = 1$  zu bestimmen ist.

Die stationäre Lösung minimiert das zugehörige Entropie-Energiefunktional

$$E(\rho) = \int \rho \log \rho \, dx + \int \rho V \, dx \quad (4.6)$$

über der Mannigfaltigkeit der Wahrscheinlichkeitsmaße. Dabei bezeichnet der erste Term eine klassische logarithmische Entropie, während der zweite Term einer potentiellen Energie (mit Potential  $V$  entspricht). Die Analogie zum Fall der Teilchenmechanik erhält man dabei über eine empirische Dichte

$$\rho^N = \frac{1}{N} \sum_j \delta(x - x_j).$$

Dann gilt

$$\int \rho^N V \, dx = \frac{1}{N} \sum_j V(x_j),$$

d.h. wir erhalten ein externes Potential. Der Fall der Wechselwirkung ist schwieriger zu beschreiben - wir haben ja auch bisher nur ein Teilchen betrachtet. Der obige Zugang lässt sich verallgemeinern, in dem man für jedes Teilchen den Random Walk betrachtet und den Drift-Term entsprechend abhängig von den anderen Teilchen betrachtet. Eine exakte Analyse ist wieder extrem kompliziert, da man für  $N$  Teilchen wieder alle möglichen Konfigurationen betrachten müsste. Vereinfachte Modelle erhält man wieder durch eine entsprechende Abschlussrelation, dieses Mal schon für den Random Walk. Die einfachste solche Relation ist eine *Mean-Field* Annahme, die sich wieder aus der Kraft im Teilchenmodell motivieren lässt.

## 4.2 Langevin Gleichungen - Wiener Prozesse

In diesem Abschnitt werden wir erneut Diffusionsgleichungen und Fokker-Planck Gleichungen herleiten, dieses Mal jedoch mit einem etwas anderen Ansatz. Wir verwenden dazu kein Gitter, sondern betrachten direkt einen stochastischen Prozess basierend auf der Zufallsvariable  $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dabei spezifizieren wir eine Verteilung für die Updates von  $W$ . Für kleine Zeitschritte  $\tau$  soll der Unterschied  $W(t+\tau) - W(t)$  bis auf Terme höherer Ordnung in  $\tau$  normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz  $\tau$ . Dazu nehmen wir natürlich wieder eine Markov-Eigenschaft an. Man beachte dabei, dass die Varianz eine quadratische Variable ist, die Standardabweichung wächst damit mit  $\sqrt{t}$ . Der Grenzwert der Zufallsvariable für  $\tau \rightarrow 0$  ist sehr irregulär, eine sogenannte *Brown'sche Bewegung* bzw. *Wiener Prozess*.

Wir betrachten wiederum die Wahrscheinlichkeitsdichte von  $W(t)$ , bezeichnet durch  $\rho(x, t)$ , wobei  $\rho(x, t)dxdt$  der Wahrscheinlichkeit entspricht, dass  $W$  im Zeitintervall  $(t, t + dt)$  im Intervall  $(x, x + dx)$  ist. Es gilt dann

$$\rho(x, t + \tau) = \int_{\mathbb{R}} \rho(y, t) \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\tau}} dy + \mathcal{O}(\tau^{3/2}), \quad (4.7)$$

da wir alle  $y$  und die Wahrscheinlichkeit einer Änderung von  $y$  nach  $x$  betrachten müssen. Um eine Formel im Grenzwert zu erhalten, führen wir eine Variablentransformation von  $y$  zu  $z = \frac{y-x}{\sqrt{\tau}}$  durch. Es gilt dann

$$\rho(x, t + \tau) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x + \sqrt{\tau}z, t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \mathcal{O}(\tau^{3/2}).$$

Da  $\tau$  klein ist, können wir wieder eine Taylor-Entwicklung durchführen. Dies ist deshalb gerechtfertigt, da wir eigentlich nur  $z$  der Ordnung eins (genauer der Ordnung  $\sqrt{-\log \tau} \ll \frac{1}{\sqrt{\tau}}$ ) betrachten müssen, für grosse  $z$  fällt der exponentielle Term  $e^{-\frac{z^2}{2}}$  schnell genug ab. Also gilt

$$\begin{aligned}\rho(x, t + \tau) &= \int_{\mathbb{R}} \rho(x, t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \\ &\int_{\mathbb{R}} \partial_x \rho(x, t) \sqrt{\tau} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \\ &\int_{\mathbb{R}} \partial_{xx} \rho(x, t) \frac{\tau z^2}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \mathcal{O}(\tau^{3/2}).\end{aligned}$$

Diese Identität lässt sich über die Momente einer Standard-normalverteilten Zufallsvariable  $Z$  ausdrücken:

$$\rho(x, t + \tau) = \rho(x, t) E[Z^0] + \partial_x \rho(x, t) E[Z^1] \sqrt{\tau} + \partial_{xx} \rho(x, t) E[Z^2] \frac{\tau}{2} + \mathcal{O}(\tau^{3/2}).$$

Für eine Standard-Normalverteilung gilt

$$E[Z^0] = 1, \quad E[Z^1] = 0, \quad E[Z^2] = 1.$$

Also erhalten wir (mit Taylor-Entwicklung in  $t$ )

$$\rho(x, t) + \partial_t \rho(x, t) \tau = \rho(x, t) + \partial_{xx} \rho(x, t) \frac{\tau}{2} + \mathcal{O}(\tau^{3/2}),$$

also im Grenzwert wiederum die Diffusionsgleichung

$$\partial_x \rho = \frac{1}{2} \partial_{xx} \rho. \quad (4.8)$$

Die Normalverteilung der Abstände ist ein klassisches Modell für molekulare Bewegung - die sogenannte Brown'sche Bewegung. Im realistischeren Fall modelliert man solche mit den Newton'schen Bewegungsgleichungen, dabei entsteht eine Störung des externen Kraftfelds durch Temperatur-abhängige Bewegung und eine Dämpfung. Man hat dann formal

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = F(x) - \lambda v + \sqrt{D} \frac{dW}{dt}, \quad (4.9)$$

bzw. als Grenzwert in der Langzeit-Skalierung

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\lambda} \left( F(x) + \sqrt{D} \frac{dW}{dt} \right). \quad (4.10)$$

Die Schreibweise  $\frac{dW}{dt}$  ist dabei problematisch, da  $W$  eben nicht differenzierbar ist. Die Updates von  $W$  verhalten sich ja eher wie die Standardabweichung, für den Differenzenquotienten wäre dann mit hoher Wahrscheinlichkeit

$$\frac{W(t + \tau) - W(t)}{\tau} \sim \frac{1}{\sqrt{\tau}}$$

zu erwarten. Deshalb verwendet man eher die Schreibweise

$$dX = a(X, t)dt + b(X, t)dW \quad (4.11)$$

und nennt (4.11) eine *stochastische Differentialgleichung*. Die Theorie stochastischer Differentialgleichungen ist sehr ähnlich zu der gewöhnlicher Differentialgleichungen, es gelten analoge Aussagen wie z.B. der Satz von Picard-Lindelöf (wenn  $a$  und  $b$  Lipschitz-stetig sind). Die technische Schwierigkeit besteht dabei nur die Lösung nicht mehr als Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}_+$  zu betrachten, sondern als Zufallsvariable auf  $\mathbb{R}_+$ . Da eine Normalverteilung (und damit auch der Wiener Prozess) symmetrisch um Null ist, würden wir bei Änderung des Vorzeichens die selbe Lösung erhalten. Deshalb kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $b \geq 0$  gilt.

Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen möchte man auch bei stochastischen Differentialgleichungen oft die Evolution von Funktionalen der Lösung, d.h.  $\phi(X(t), t)$  mit  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten. Dazu benötigt man ein Analogon der Kettenregel, das sogenannte *Ito-Lemma*. Um dieses herzuleiten betrachten wir (unter der Annahme, dass  $\phi$  glatt ist) den Update

$$\begin{aligned} \phi(X(t+\tau), t+\tau) - \phi(X(t), t) &= \partial_t \phi(X(t), t) \tau + \partial_x \phi(X(t), t) (X(t+\tau) - X(t)) \\ &\quad + \partial_{xx} \phi(X(t), t) \frac{(X(t+\tau) - X(t))^2}{2} + \\ &\quad \partial_t \phi(X(t), t) + \mathcal{O}(\tau^{3/2}), \end{aligned}$$

wobei wir für das Restglied wieder verwendet haben, dass sich der Update wie die Standardabweichung verhält. Setzen wir nun noch die stochastische Differentialgleichung ein, so gilt

$$\begin{aligned} \phi(X(t+\tau), t+\tau) - \phi(X(t), t) &= \partial_t \phi(X(t), t) \tau \\ &\quad + \partial_x \phi(X(t), t) (a(X(t), t) \tau + b(x, t) (W(t+\tau) - W(t))) + \\ &\quad \partial_{xx} \phi(X(t), t) \frac{(a(X(t), t) \tau + b(x, t) (W(t+\tau) - W(t)))^2}{2} + \\ &\quad \mathcal{O}(\tau^{3/2}) \\ &= (\partial_t \phi(X(t), t) + \partial_x \phi(X(t), t) a(X(t), t) + \\ &\quad \partial_{xx} \phi(X(t), t) b(X(t), t)^2 \frac{(W(t+\tau) - W(t))^2}{2\tau}) \tau + \\ &\quad \partial_x \phi(X(t), t) b(X(t), t) (W(t+\tau) - W(t)) + \mathcal{O}(\tau^{3/2}) \end{aligned}$$

In der letzten Formel haben wir oben die Terme erster Ordnung in  $\tau$  gesammelt und unten den Term von Ordnung  $\tau^{1/2}$ . Dieser letzte Term macht keine Schwierigkeiten, da er im Grenzwert einfach ein Vielfaches eines Wiener-Prozesses  $dW$  wird. Es bleibt nur noch der Grenzwert von  $\frac{(W(t+\tau) - W(t))^2}{\tau} \approx \frac{dW^2}{dt}$  zu verstehen. Der Erwartungswert dieses Terms ist genau die Varianz einer Standard-Normalverteilung, also gleich eins. Die Standardabweichung dieses Terms ist wieder von der Ordnung  $\sqrt{\tau}$  und da er auch noch mit  $\tau$  multipliziert wird, sind die stochastischen Effekte von der Ordnung  $\mathcal{O}(\tau^{3/2})$ . Es erscheint daher gerechtfertigt, diese im Vergleich zum zweiten stochastischen Term (mit Standardabweichung  $\sqrt{\tau}$ ) und den deterministischen Termen der Ordnung  $\tau$  zu vernachlässigen. Formal haben wir also  $dW^2 = dt$  und dies liefert die *Ito-Formel*

$$\begin{aligned} d\phi(X(t), t) &= (\partial_t \phi(X(t), t) + \partial_x \phi(X(t), t) a(X(t), t) + \partial_{xx} \phi(X(t), t) \frac{b(X(t), t)^2}{2}) dt + \\ &\quad \partial_x \phi(X(t), t) b(X(t), t) dW. \end{aligned} \tag{4.12}$$

In der Finanzmathematik verwendet man typischerweise *geometrische Brown'sche Bewegungen* der Form

$$dX = \mu X dt + \sigma X dW \quad (4.13)$$

um die Entwicklung eines Aktienwerts (zumindest für relativ kurze Zeit) zu modellieren. Dabei ist zu beachten, dass Drift und Diffusion von  $X$  abhängen, d.h. sowohl Schwankungen als auch deterministische Änderungen steigen mit  $X$ . Ein positiver Nebeneffekt dieser Modellierung ist, dass der Wert  $X$  immer positiv bleibt - auch bei sehr grossen negativen Schwankungen des Wiener Prozesses. Der Drift entspricht dem einfachen deterministischen Fall einer Verzinsung

$$dX = rX dt, \quad (4.14)$$

mit Zinsrate  $r > 1$ . Der Faktor  $\sigma$  wird üblicherweise als *Volatilität* bezeichnet, und ist ein Maß für die typischen Schwankungen einer Achse. Die Schätzung der Volatilität aus Daten ist ein wichtiger Aspekt in der Praxis, um das Risiko beim Kauf einer Aktie bewerten zu können. Ein typisches Funktional von  $X(t)$ , das man in diesem Zusammenhang betrachtet, ist der Wert von Derivaten wie Optionen auf diese Aktie, deren Modellierung wir noch genauer diskutieren werden.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Lösung einer stochastischen Differentialgleichung der Form (4.13) kann wiederum über eine Drift-Diffusionsgleichung der Form

$$\partial_t \rho = -\partial_x(a\rho) + \partial_x x \left(\frac{b^2}{2}\rho\right) \quad (4.15)$$

berechnet werden. Man beachte dabei, dass der resultierende Diffusionskoeffizient immer positiv (oder gleich null im deterministischen Fall) ist - eine wichtige Eigenschaft für die sinnvolle Lösbarkeit einer Diffusionsgleichung. Mit einfachen Transformationen kann (4.15) wieder als Fokker-Planck Gleichung geschrieben werden.

Für den Anfangswert zur Zeit  $t = 0$  ist zu unterscheiden, ob der Anfangswert von  $X$  zufällig oder deterministisch gewählt wurde. Im zufälligen Fall ist  $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ , wobei  $\rho_0$  die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Anfangswert angibt. Im deterministischen Fall  $X(0) = x_0$  ist  $\rho(x, 0) = \delta(x - x_0)$ . Da aber bei einer Normalverteilung auch beliebig grosse Änderungen eine positive Wahrscheinlichkeit haben, gilt dennoch  $\rho(x, t) > 0$  für alle  $x$ , sobald  $t > 0$  ist (unter der Annahme, dass  $b \neq 0$  gilt). Durch die Glättungseigenschaften einer Diffusionsgleichung existiert für  $t > 0$  auch immer eine beschränkte Wahrscheinlichkeitsdichte. Am einfachsten ist dies wieder im Fall der Brown'schen Bewegung zu sehen. Dort erhält man bei deterministischem Anfangswert die Fundamentallösung

$$\rho(x, t) = \mathcal{F}(x, t; x_0) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x-x_0)^2/2t}. \quad (4.16)$$

Im Fall eines stochastischen Anfangswert erhält man die Überlagerung der Fundamentallösung mit der Wahrscheinlichkeit für den jeweiligen Anfangszustand als Lösung, d.h.

$$\rho(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(x, t; x_0) \rho_0(x) dx. \quad (4.17)$$

### 4.3 Diffusion und Wärmeleitung im Kontinuum

Im Rahmen der kinetischen Gastheorie (cf. [4, 5]) kann Wärmeleitung als Energietransport durch die Teilchen interpretiert werden. Neben dem Energietransport können auch Masse

und Impuls transportiert werden, diese Effekte haben wir ja schon im Falle von Strömungen gesehen.

Wir betrachten nun den Energietransport in einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  für positive Zeit  $t > 0$ . Zur makroskopischen Beschreibung verwenden wir kontinuierliche Dichten, d.h. für die Enthalpie  $h$  und für die Temperatur  $u$ , als Funktionen

$$h, u : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+. \quad (4.18)$$

Die Grundlage für die Modellierung ist der erste Hauptsatz der Thermodynamik. Betrachten wir ein beliebiges Teilgebiet  $D \subset \Omega$ , dann ist die (zeitliche) Änderung der Enthalpie in  $D$  gleich der zugeführten Wärmemenge. Wärmezufuhr kann durch verteilte Wärmequellen (beschrieben durch ihre Dichte  $f(x, t) \in \mathbb{R}$ ) oder Wärmefluss über den Rand des Teilgebietes (beschrieben durch den Flussvektor  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ ) auftreten. Damit erhalten wir

$$\frac{d}{dt} H(D, t) = \frac{d}{dt} \int_D h(x, t) \, dx = \int_D f(x, t) \, dx + \int_{\partial D} \mathbf{q}(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) \, dS(x).$$

Mit Hilfe des Gauss'schen Satzes erhalten wir daraus die Identität

$$\int_D (\partial_t h - \operatorname{div} \mathbf{q} - f) \, dx = 0. \quad (4.19)$$

Da das Teilgebiet  $D$  beliebig gewählt war, erhalten wir aus der schwachen Form (4.19) eine starke Form, nämlich die Differentialgleichung

$$\partial_t h - \operatorname{div} \mathbf{q} = f \quad (4.20)$$

in  $\Omega \times \mathbb{R}_+$ . Man nennt (4.20) auch *Transportgleichung*. Die rechte Seite  $f$  kann als bekannte Funktion (bestimmt durch externe Quellen) angesehen werden, die Funktionen  $h$  und  $\mathbf{q}$  sind aber noch unbekannt. In der obigen Form ist die Beschreibung auch noch unabhängig von der Temperatur  $u$ . Man benötigt deshalb *Materialgesetze* (im Englischen auch *constitutive relations*), die solche Relationen herstellen. Im Gegensatz zu Relationen wie (4.20), die wir nur aus dem fundamentalen Prinzip der Energieerhaltung hergeleitet haben, sind Materialgesetze jeweils abhängig von den speziellen Situationen, die betrachtet werden.

Die Beziehung zwischen der Enthalpie und der Temperatur kann in vielen Fällen als linear modelliert werden, man erhält dann die Beziehung

$$h(x, t) = \rho c u(x, t), \quad (4.21)$$

wobei  $\rho$  die Dichte und  $c$  die spezifische Wärmekapazität des betrachteten Materials darstellen. Im einfachsten Fall sind  $\rho$  und  $c$  gegebene Konstante, in manchen Situationen ist es aber wichtig, Relationen der Form  $\rho = \rho(x, u)$  und  $c = c(x, u)$  zu betrachten. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn man es mit einer Mischung mehrerer Materialien zu tun hat, die verschiedene (konstante) Dichten und Kapazitäten haben. Die effektive Dichte und Kapazität sind dann ortsabhängige Funktionen, bestimmt durch das Material an der jeweiligen Position. Manche Materialien dehnen sich auch stark aus wenn die Temperatur steigt. In solchen Fällen ist es wiederum wichtig, die Relation  $\rho = \rho(u)$  zu berücksichtigen.

Die Beziehung zwischen dem Wärmefluss  $\mathbf{q}$  und der Temperatur wird im allgemeinen durch Wärmeausgleich bestimmt, d.h., die Teilchen bewegen sich (mikroskopisch mittels einer Brown'schen Bewegung) bevorzugt in Richtungen des stärksten Temperaturgefälles um lokale

Schwankungen der Temperatur auszugleichen. Da das lokal stärkste Temperaturgefälle in Richtung des Temperaturgradienten auftritt, ergibt sich daraus das *Fick'sche Gesetz* (auch *Fourier'sches Abkühlungsgesetz*)

$$\mathbf{q}(x, t) = \lambda \nabla u(x, t), \quad (4.22)$$

wobei  $\lambda > 0$  den Wärmeleitkoeffizienten bezeichnet. Die spezielle Modellierung von  $\lambda$  hängt wieder von der jeweiligen Situation ab, und im allgemeinen die Form  $\lambda = \lambda(x, u)$  annimmt. In manchen Situationen muss man auch Abhängigkeiten von  $\nabla u$  berücksichtigen.

Falls das Material *anisotrop* ist, muss man die verschiedenen Transporteigenschaften in verschiedene Richtungen berücksichtigen und man erhält das anisotrope Fick'sche Gesetz

$$\mathbf{q}(x, t) = \Lambda \nabla u(x, t), \quad (4.23)$$

wobei  $\Lambda \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  eine symmetrisch positiv definite Matrix (bestimmt durch die Hauptrichtungen der Anisotropie) ist.

### Die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten nun den Fall konstanter skalarer Werte von  $\rho$ ,  $c$  und  $\lambda$ . Dann erhalten wir die Differentialgleichung

$$\partial_t u - D \Delta u = f, \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (4.24)$$

wobei  $D = \frac{\lambda}{c\rho}$  der (*Temperatur-*) *Leitwert* ist. Die lineare Wärmeleitungsgleichung (4.24) ist eine parabolische Differentialgleichung zweiter Ordnung. Aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen wissen wir, dass die Lösung nur dann eindeutig bestimmt ist, wenn wir Anfangswerte und Randbedingungen vorschreiben. Die natürliche Anfangsbedingung ist von der Form

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.25)$$

für eine gegebene Anfangstemperatur  $u_0$ .

### Randbedingungen

Um die Randbedingungen zu erhalten betrachten wir den Wärmefluss über den Rand  $\partial\Omega$  und nehmen an, dass ausserhalb von  $\Omega$  eine Umgebungstemperatur  $u^*$  gegeben ist. Im allgemeinen erfolgt die Wärmeübertragung mit der Umgebung durch Strömung (*Konvektion*). Dabei wird die Wärme in ein oder aus einem Fluid / Gass übertragen, indem das Fluid / Gas die Oberfläche eines anderen Volumens überströmt und dabei eine Temperaturangleichung erfolgt. Da der Wärmefluss über den Rand die Temperaturdifferenz auszugleichen versucht, erhalten wir

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -\alpha (u - u^*) \quad (4.26)$$

mit einem positiven *Wärmeübergangskoeffizienten*  $\alpha = \alpha(x, u; u^*)$ . Für die Temperatur  $u$  bedeutet dies eine *Robin-Randbedingung* der Form

$$\lambda \partial_{\mathbf{n}} u = -\alpha (u - u^*). \quad (4.27)$$

Besonders interessant sind zwei Grenzwerte von  $\beta := \frac{\alpha}{\lambda} \rightarrow 0$ :

- Für  $\beta \rightarrow 0$  erhalten wir eine homogene Neumann-Randbedingung  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ , d.h., es erfolgt kein Austausch von Wärme mit der Umgebung. Dies ist bei einem *isolierten Rand* der Fall.
- Für  $\beta \rightarrow \infty$  erhalten wir eine Dirichlet-Randbedingung  $u = u^*$ , d.h., der Wärmeaustausch mit der Umgebung ist so stark, dass sich die Temperatur am Rand jener der Umgebung anpasst.

Man beachte auch, dass man für  $f = 0$  und im Fall eines isolierten Randes ein abgeschlossenes System erhält. Es gilt dann die Energieerhaltung

$$\frac{d}{dt}H(\Omega, t) = \int_{\Omega} \partial_t h(x, t) dx = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{q} dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dx = 0.$$

Eine weitere wichtige Form des Wärmeübergangs, vor allem in Luft, ist jener durch Strahlung, d.h., Wärme wird durch elektromagnetische Strahlung transportiert. Für Strahlung gilt das Stefan-Boltzmann'sche Gesetz

$$\lambda \partial_{\mathbf{n}} u = -\sigma \epsilon (u^4 - (u^*)^4), \quad (4.28)$$

mit der Konstanten  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \frac{J}{sm^2K^4}$  und einem Materialparameter  $\epsilon \in [0, 1]$ .

## Skalierung

Nun können wir die Wärmeleitungsgleichung (4.24) skalieren und in eine dimensionslose Form bringen. Der Einfachheit halber ignorieren wir innere Wärmequellen ( $f = 0$ ). Dazu wählen wir eine typische Länge  $\ell$  für das Gebiet  $\Omega$  und Zeitskala  $\tau$  (zunächst noch unbestimmt) und transformieren die Variablen zu

$$\tilde{x} = \ell^{-1}x, \quad \tilde{t} = \tau^{-1}t.$$

Weiters transformieren wir die Temperatur mittels einer Abschätzung  $T_0$  für die auftretende Minimaltemperatur und einer Abschätzung  $\Delta T$  der Temperaturschwankung zu

$$\tilde{u} = (\Delta T)^{-1}(u - T_0).$$

Mittels der Kettenregel erhalten wir daraus die skalierte Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = \frac{D\tau}{\ell^2} \Delta_{\tilde{x}} \tilde{u}$$

mit der Randbedingung

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\alpha \ell}{\lambda} (\tilde{u} - \tilde{u}^*).$$

und einer Anfangsbedingung  $\tilde{u}(x, 0) = \tilde{u}_0(x)$ , wobei wir  $\tilde{u}^*$  und  $\tilde{u}_0$  mittels derselben Skalierung erhalten wie  $\tilde{u}$ .

Wir haben nun zwei effektive Parameter, aber die Zeitskala ist noch nicht festgelegt. Es scheint naheliegend,  $\tau$  so zu wählen, dass der Diffusionskoeffizient gleich eins ist, d.h.,  $\tau = \frac{\ell^2}{D}$ . Damit erhalten wir

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = \Delta_{\tilde{x}} \tilde{u}$$

und der einzig verbleibende Parameter ist der dimensionslose Wärmeübergangskoeffizient  $\beta = \frac{\alpha \ell}{\lambda}$ .

## 4.4 Eigenschaften von Diffusionsgleichungen

Im Folgenden betrachten wir zunächst die skalierte Form der linearen Wärmeleitungsgleichung, d.h.,

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \Delta u && \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_{\mathbf{n}} u &= -\beta(u - u^*) && \text{auf } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u &= u_0 && \text{in } \Omega \times \{0\} \end{aligned} \quad (4.29)$$

und betrachten einige ihrer Eigenschaften.

Wir multiplizieren nun die Gleichung mit  $u$  und integrieren über  $\Omega$ , woraus wir mit dem Gauss'schen Satz und dem Einsetzen der Randbedingung die Identität

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t u \, u \, dx &= \int_{\Omega} \Delta u \, u \, dx = - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, u \, dS \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \beta \int_{\partial\Omega} (u - u^*) \, u \, dS \end{aligned}$$

erhalten. Wir können nun den ersten Term als

$$\int_{\Omega} \partial_t u \, u \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 \, dx$$

schreiben und erhalten nach Integration über  $t$

$$\int_{\Omega} u^2 \, dx|_{t=s} + 2 \int_{\sigma}^s \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \beta \int_{\partial\Omega} u^2 \, dS \right) ds = \int_{\Omega} u^2 \, dx|_{t=\sigma} + 2 \int_{\sigma}^s \beta \int_{\partial\Omega} u^* \, u \, dS \, dt.$$

Für  $u^* = 0$  impliziert dies den monotonen Abfall des Funktionals  $s \mapsto V(s) := \int_{\Omega} u^2 \, dx|_{t=s}$ , das wegen  $u \sim h$  auch als Varianz der Enthalpie interpretiert werden kann. Wegen der Poincaré-Ungleichung der Form

$$C \int_{\Omega} u^2 \, dx \leq 2 \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \beta \int_{\partial\Omega} u^2 \, dx \right)$$

für eine Konstante  $C > 0$  erhalten wir sogar

$$\frac{dV}{dt} \leq -CV(t)$$

und daraus den exponentiellen Abfall  $V(t) \leq e^{-Ct}V(0)$ . Als Konsequenz daraus erhalten wir die Konvergenz  $u(\cdot, t) \rightarrow 0$  in  $L^2(\Omega)$ . Die Funktion  $\hat{u}(x) = 0$  ist die entsprechende *stationäre Lösung*, sie erfüllt  $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = 0$  und  $\Delta \hat{u} = 0$  sowie die Randbedingungen. Man beachte, dass für beliebige Anfangswerte die Temperatur sehr schnell gegen das immer gleiche Equilibrium konvergiert, was auch die irreversible Natur der Wärmeleitung mittels Diffusion zeigt.

Für allgemeinere zeitunabhängige Werte  $u^*$  können wir ebenfalls eine stationäre Lösung konstruieren, indem wir  $\Delta \hat{u} = 0$  in  $\Omega$  unter den obigen Randbedingungen lösen. Es lässt sich dann (ebenso wie oben) leicht der exponentielle Abfall des Funktionals  $s \mapsto V(s) := \int_{\Omega} (u - \hat{u})^2 \, dx|_{t=s}$  zeigen. Für die elliptische Gleichung wissen wir, dass  $\hat{u}$  das Funktional

$$J(v) := \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx + \beta \int_{\partial\Omega} v^2 \, dS \right) - \int_{\partial\Omega} v \, u^* \, dS$$

minimiert. Dieses Funktional wird auch während der Wärmeleitung reduziert, was man durch Multiplikation der Gleichung mit  $\frac{\partial u}{\partial t}$  und Integration über  $\Omega$  und  $t$  sieht. Daraus erhalten wir die Identität

$$J(u)|_{t=s} = J(u)|_{t=\sigma} - \int_{\sigma}^s \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt.$$

Abschließend können wir noch den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik betrachten, der Einfachheit halber im Fall  $\beta = 0$ . Die Entropie erfüllt  $\frac{dS}{dH} = -\frac{1}{T}$  und wegen  $H \sim T$  ist  $S \sim -\ln T$ . Wir nehmen an, dass  $u \geq 0$  so skaliert ist, dass es eine Wahrscheinlichkeitsdichte über  $\Omega$  entspricht. Dies haben wir ja auch schon in den ersten stochastischen Herleitungen von Diffusionsgleichungen gesehen. Dann können wir den Erwartungswert der Entropie in  $\Omega$  als

$$S = - \int_{\Omega} u \ln u dx$$

auffassen. Es gilt dann

$$\frac{dS}{dt} = - \int_{\Omega} (\ln u + 1) \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \ln u dx.$$

Durch Multiplikation der Gleichung mit  $\ln u$  (auf der Menge  $\{u > 0\}$ ) und Anwendung des Gauss'schen Satzes erhalten wir

$$\frac{dS}{dt} = - \int_{\{u>0\}} \Delta u \ln u dx = \int_{\{u>0\}} \frac{|\nabla u|^2}{u} dx \geq 0.$$

Solange  $\nabla u \neq 0$  ist in diesem Fall  $\frac{dS}{dt} > 0$ , d.h., der Prozess ist irreversibel.

Ähnliche Dissipationsrelationen für die Entropie lassen sich auch für allgemeine Fokker-Planck Gleichungen zeigen und sogar für nichtlineare Diffusionsgleichungen. Wir betrachten dazu den Fall eines Diffusionskoeffizienten abhängig von  $u$ , d.h.

$$\partial_t u = \nabla \cdot (D(u) \nabla u).$$

Definieren wir eine Funktion  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f'(s) = \frac{D(s)}{s}$ , dann gilt (beachte  $f(s) = \log s$  im linearen Fall)

$$\partial_t u = \nabla \cdot (u \nabla f(u)).$$

Unter der sinnvollen Annahme, dass  $D$  nichtnegativ ist, gilt  $f' \geq 0$  auf  $\mathbb{R}_+$ , d.h.  $f$  ist monoton. Die entsprechende Entropie ist gegeben durch

$$E(u) = \int F(u(x, t)) dx, \tag{4.30}$$

mit der konvexen Funktion  $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $F'(s) = f(s)$ . Man sieht leicht

$$\frac{d}{dt} E(u) = \int f(u) \partial_t u dx = \int f(u) \nabla \cdot (u \nabla f(u)) dx = - \int u |\nabla f(u)|^2. \tag{4.31}$$

## 4.5 Der Wert einer Option: Das Black-Scholes Modell

In diesem Abschnitt werden wir die obige Modellierung von Diffusionsprozessen auf die Bewertung von Optionen anwenden. Eine Option ist ein Recht eine Aktie zu einem gewissen Zeitpunkt  $T$  zu einem gewissen Preis  $K$  (Strike-Preis) zu kaufen (Call-Option) oder zu verkaufen (Put-Optionen). Es stellt sich dabei die Frage wieviel man zu einer gewissen Zeit  $t$  abhängig vom aktuellen Preis der zugrunde liegenden Aktie (Underlying)  $X(t)$  für eine Option bezahlen sollte? Dies bezeichnet man als Wert  $u(X(t), t)$  der Option. Wir betrachten hier den einfachsten Fall einer europäischen Call-Option. Dabei kann man wirklich nur zum Zeitpunkt  $T$  kaufen und wird die Kaufentscheidung von folgender Überlegung abhängig machen:

- Ist  $K < S(t)$  so kann man die Option ausüben, die Aktie zum Preis  $K$  kaufen und könnte sie sofort wieder zum Marktwert  $S(t)$  verkaufen. Damit hat man einen Gewinn von  $S(t) - K$ .
- Ist  $K \geq S(t)$  wird man die Option nicht ausüben, dann man würde die Aktie auf dem Markt ja günstiger erhalten.

Es gibt noch verschiedenste andere Optionen (Amerikanische, Asiatische ...), die sich durch den Ausübungsmechanismus unterscheiden. So kann etwa man bei einer amerikanischen Option die Aktie auch schon zu jeder beliebigen Zeit  $t < T$  kaufen (early Exercise).

Aus der obigen Überlegung erhalten wir den Wert der Option zum Zeitpunkt  $T$  als

$$u(S, T) = \max\{S - K, 0\}. \quad (4.32)$$

Um den Wert der Aktie für  $t < T$  zu bestimmen, konstruieren wir ein Portfolio aus einer Call-Option und einer (eventuell negativen) Anzahl von Aktien (des Underlyings). Damit ist der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt  $t$  gegeben durch

$$\Pi = u(X(t), t) - \alpha X(t).$$

Wir nehmen an, dass  $X(t)$  wie oben durch eine geometrische Brown'sche Bewegung gegeben ist. Um die Veränderung des Werts in der Zeit zu berechnen, verwenden wir Ito's Lemma (4.12) und erhalten

$$\begin{aligned} d\Pi &= dU - \alpha dX \\ &= (\partial_t u + \mu x \partial_x u + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \partial_{xx} u - \alpha \mu x) dt + (\partial_x u - \alpha) \sigma x dW. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass für  $\alpha = \partial_x$  der stochastische Teil wegfällt. In diesem Fall ist  $\Pi$  ein Portfolio ohne Risiko, und man nimmt üblicherweise an, dass sich ein Portfolio ohne Risiko wie ein Sparbuch verhält, d.h. einfach mit dem Zinssatz  $r$  verzinst wird (Vollständige Markt Hypothese). Also folgt

$$\partial_t u + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \partial_{xx} u dt = d\Pi = r\Pi dt = r(u - \partial_x u x) dt,$$

und wir erhalten die Black-Scholes Gleichung für die Bewertung einer europäischen Option

$$\partial_t u = -\frac{\sigma^2 x^2}{2} \partial_{xx} u - r x \partial_x u + r u. \quad (4.33)$$

Man beachte, dass die Lösung nicht vom Drift  $\mu$  abhängt, sondern nur von der Volatilität  $\sigma$  und der Zinsrate  $r$ . In diesem Fall haben wir einen negativen Diffusionskoeffizienten erhalten, allerdings ist zu beachten, dass wir für den Optionswert einen End- und keinen Anfangswert zur Verfügung haben. Durch eine Transformation der Zeit zu  $s = T - t$  erhalten wir

$$\partial_s u = \frac{\sigma^2 x^2}{2} \partial_{xx} u + rx \partial_x u - ru. \quad (4.34)$$

mit dem Anfangswert  $u(x, 0) = \max\{x - K, 0\}$ .

Auch in diesem Fall benötigen wir Randbedingungen. Zunächst erscheint klar, dass  $u(0, t) = 0$  gelten sollte, da eine Option auf eine wertlose Aktie ebenfalls keinen Wert haben kann (man beachte dass dann nach dem Optionsmodell auch  $dX = 0$  gilt). Für sehr grosse Werte von  $X(t) \gg K$  ist es sehr wahrscheinlich, dass man einen Gewinn bei Ausübung der Option erhalten wird, man rechnet also mit  $u(X, t) \sim X - K$  für  $X \rightarrow \infty$  bzw. mit  $\partial_x u(x, t) \rightarrow 1$  für  $x \rightarrow \infty$ .

## 4.6 A oder B ? Ein Modell zur Konsensbildung

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir nun noch die Modellierung des A-B Spiels aus der Vorlesung diskutieren. Wir werden dabei zwei extreme Fälle betrachten - eine Gruppe von Teilnehmern mit sehr schneller Änderung der Meinung sowie eine sehr konservative Gruppe mit nur sehr langsamer Anpassung der Meinung.

In jedem Fall modellieren wir das Verhalten der  $N$  Teilnehmer zunächst durch  $N$  zeitabhängige Zufallsvariable  $X_i(t)$ , die jeweils die Entscheidung des  $i$ -ten Teilnehmers. Dabei steht  $X_i(t) = 0$  für A und  $X_i(t) = 1$  für B. Für die Zufallsvariable nehmen wir in jedem Fall eine Markov-Eigenschaft an, d.h.  $X_i(t + \tau)$  ist nur abhängig von den Entscheidungen  $X_j(t)$ , nicht aber von der Geschichte davor. Da die genaue Entscheidung anderer Teilnehmer nicht bekannt ist, kann man sogar weiter einschränken und annehmen, dass  $X_i(t + \tau)$  nur von  $X_i(t)$  und vom Mittelwert

$$m(t) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_j(t)$$

abhängen.

Die beiden Extremfälle kann man dann in folgender Weise modellieren:

1. Sehr flexible Gruppe: in diesem Fall ist es wegen der hohen Flexibilität eigentlich unnötig die Entscheidung des einzelnen Teilnehmers im letzten Zeitschritt zu berücksichtigen, die Entscheidung wird nur vom Mittelwert abhängen, d.h.

$$P(\{X_i(t + \tau) = 1\}) = g(m(t) - \frac{1}{2}),$$

mit einer geeigneten Funktion  $g$ . Bei dieser Modellierung ist zu beachten, dass die Teilnehmer zwar sehr flexibel sind, aber von den anderen Teilnehmern ein eher konservatives Verhalten (nach dem Mittelwert im letzten Schritt) voraussetzen. Würde man annehmen, dass sich wirklich alle völlig flexibel verhalten, hätte man eigentlich kein rationelles Entscheidungskriterium. Sinnvollerweise sollte  $g$  dann monoton steigen und  $g(0) = \frac{1}{2}$  gelten. Damit ist bei  $m(t) = \frac{1}{2}$  keine Präferenz für A oder B enthalten.

2. Sehr konservative Gruppe: in diesem Fall sollte wegen der Konservativität vor allem die Entscheidung des einzelnen Teilnehmers im letzten Zeitschritt wichtig sein, und es erscheint vernünftiger den Mittelwert nur als Kriterium zur Meinungsänderung zu modellieren, d.h.

$$P(\{X_i(t + \tau) = 1 | X_i(t) = 0\}) = h(m(t) - \frac{1}{2}).$$

Aus Symmetriegründen wird man die umgekehrte Wechselwahrscheinlichkeit als

$$P(\{X_i(t + \tau) = 0 | X_i(t) = 1\}) = 1 - h(m(t) - \frac{1}{2})$$

ansetzen. Aus der Markov-Eigenschaft erhalten wir dann

$$\begin{aligned} P(\{X_i(t + \tau) = 1\}) &= P(\{X_i(t) = 1\})P(\{X_i(t + \tau) = 1 | X_i(t) = 1\}) + \\ &\quad P(\{X_i(t) = 0\})P(\{X_i(t + \tau) = 1 | X_i(t) = 0\}) \\ &= P(\{X_i(t) = 1\})(1 - h(m(t) - \frac{1}{2})) + \\ &\quad (1 - P(\{X_i(t) = 1\}))h(m(t) - \frac{1}{2}) \\ &= P(\{X_i(t) = 1\})(1 - 2h(m(t) - \frac{1}{2})) + h(m(t) - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Die Schwierigkeit bei beiden Modellen ist, dass die Wahrscheinlichkeit für den Wert der Zufallsvariable vom tatsächlichen Wert zum vorherigen Zeitpunkt (und nicht der Wahrscheinlichkeit abhängt). Für hinreichend grosses  $N$  lässt sich aber ein Gesetz der grossen Zahl ansetzen (für den Mittelwert  $N$  gleicher und im wesentlichen unabhängiger Zufallsvariable), d.h.

$$m(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_j(t) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N E[X_j(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N P(\{X_j(t) = 1\}).$$

Damit lässt sich jeweils direkt eine Gleichung für den Mittelwert herleiten, in dem man einfach die Gleichungen für die Wahrscheinlichkeit im nächsten Schritt mittelt. Im flexiblen Fall folgt dann

$$m(t + \tau) = g(m(t) - \frac{1}{2}),$$

während man im konservativen Fall

$$m(t + \tau) = m(t)(1 - 2h(m(t) - \frac{1}{2})) + h(m(t) - \frac{1}{2})$$

erhält.

Im ersten Fall erhält man (zumindest) drei stationäre Punkte, einen bei  $\frac{1}{2}$ , einen darüber und eine darunter. Typischerweise ist (wie man aus linearer Stabilitätsanalyse für passendes  $g$  sieht)  $\frac{1}{2}$  instabil und die anderen beiden stabil. Man sieht wegen der Monotonie von  $g$ , dass für einen Anfangswert grösser als  $\frac{1}{2}$  Konvergenz gegen den grösseren stationären Punkt eintritt, während man für kleineren Anfangswert Konvergenz gegen den kleinsten stationären Punkt erhält. D.h. die (zufällige) erste Entscheidung bestimmt eigentlich schon das Verhalten. Im konservativen Fall ist  $m = \frac{1}{2}$  der einzige stationäre Punkt, d.h. man erhält immer ein unentschlossenes Verhalten für lange Zeit.

Bei einem Mittelwert  $m \approx 0$  oder  $m \approx 1$ , wie man sie im flexiblen Fall als stationäre Lösungen erhält, erübrigt es sich eigentlich die Verteilung der A oder B Stimmen zu analysieren, da entweder fast alle A oder fast alle B wählen. Bei einem Mittelwert  $m = \frac{1}{2}$  ist die Verteilung aber sehr interessant. Deshalb werden wir den konservativen Fall noch etwas genauer analysieren. Wir betrachten dazu die genaue Verteilung

$$p(n, t) = P\left(\left\{\sum_{i=1}^N X_i(t) = n\right\}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

d.h. die Wahrscheinlichkeiten  $n$  Entscheidungen für B zur Zeit  $t$  zu erhalten. Bei einer sehr konservativen Gruppe mit kleinen Zeitschritten ist es realistisch anzunehmen, dass die Wahrscheinlichkeit für mehr als eine Meinungsänderung pro Zeitschritt sehr klein ist. Damit sind wir wieder bei den ursprünglichen Annahmen für die Herleitung einer Diffusionsgleichung. Wir reskalieren wieder die Variable zu  $x = \frac{n}{N}$  und setzen  $q(x, t) = p(n, t)$ . Dann können wir durch Taylor-Entwicklung und Vernachlässigung Terme höherer Ordnung die Gleichung

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\tau}{N} \frac{\partial}{\partial x} ((f_- - f_+)q) + \frac{\tau}{2N^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} ((f_- + f_+)q) \quad (4.35)$$

herleiten, wobei  $f_-$  die Übergangswahrscheinlichkeit von  $B$  nach  $A$  und  $f_+$  jene von  $A$  nach  $B$  bezeichnet. Setzen wir wie oben aus Symmetriegründen  $f_- = f_+ = h(x - \frac{1}{2})$ , so fällt der Konvektionsterm weg und die resultierende Gleichung besteht nur aus einem Diffusionsteil (allerdings mit nichtkonstantem Diffusionskoeffizienten  $h(x - \frac{1}{2})$ ). Die Gleichung kann auch benutzt werden, um eine stationäre Verteilung herzuleiten. Dann ist  $\frac{\partial q}{\partial t} = 0$ , d.h.

$$0 = \frac{d}{dx} ((f_- - f_+)q_\infty) + \frac{1}{2N} \frac{d^2}{dx^2} ((f_- + f_+)q_\infty).$$

Diese Gleichung kann einmal nach  $x$  integriert werden und man überlegt sich leicht, dass die Integrationskonstante gleich Null sein muss. Also folgt

$$0 = ((f_- - f_+)q_\infty) + \frac{1}{2N} \frac{d}{dx} ((f_- + f_+)q_\infty)$$

bzw.

$$\frac{dq_\infty}{dx} = \frac{2N(f_+ - f_-) + \frac{df_+}{dx} + \frac{df_-}{dx}}{f_- + f_+} q_\infty.$$

Diese Gleichung lässt sich zu

$$q_\infty(x) = ce^{F(x)}$$

integrieren, wobei  $c$  eine Normierungskonstante (bestimmt aus der Bedingung  $\int q_\infty dx = 1$ ) und  $F$  die Stammfunktion von  $\frac{2N(f_+ - f_-) + \frac{df_+}{dx} + \frac{df_-}{dx}}{f_- + f_+}$  ist.