

Skript zur Vorlesung
**Homogenisierung und
Mehrskalenmodellierung**
SS 2012

Patrick Henning

Stand: 28. Juni 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Mehrskalenprobleme	1
1.2	Anwendungsbeispiele	1
1.3	Motivation für neue Lösungsverfahren	2
1.4	Das Setting	3
2	Homogenisierung für elliptische Mehrskalenprobleme	5
2.1	Funktionalanalytische Hilfsmittel, Teil 1	5
2.2	Formal asymptotische Entwicklung	11
2.2.1	Das elliptische Mehrskalenproblem	11
2.2.2	Homogenisierung im periodischen Setting	15
2.3	Funktionalanalytische Hilfsmittel, Teil 2	22
2.4	2-Skalen-Konvergenz	35
2.4.1	Homogenisierung mittels 2-Skalen-Konvergenz	35
2.4.2	Zentrale Eigenschaften von $L^1(\Omega, C^\infty_0(Y))$ -Funktionen	52
3	Numerische Mehrskalenmethoden für elliptische Probleme	59
3.1	Framework für Mehrskalenmethoden	59
3.1.1	Motivation und allgemeiner Rahmen	59
3.1.2	Beispiel Realisierungen	62
3.2	Die Heterogene Mehrskalenmethode (HMM)	64
3.2.1	Allgemeine Definition der Methode	64
3.2.2	Die HMM im periodischen Fall	66
3.2.3	Konvergenzbeweise im periodischen Fall	71
3.2.4	A-posteriori Fehlerabschätzung	80
	Literatur	85

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Mehrskalenprobleme

In der Physik, der Hydrologie, den Ingenieurwissenschaften und auch vielen anderen Forschungsbereichen treffen wir auf so genannte *Mehrskalenprobleme*. Bei dieser Art von Problemen sind typischerweise zwei oder mehr 'Skalen' involviert. Wir unterscheiden zwischen Makroskala, Mikroskala und dazwischenliegenden Mesoskalen. Typischerweise beschreibt eine Makroskala eine Größenordnung, auf der sich das globale (bzw. gemittelte) Verhalten einer physikalischen Größe beobachten lässt. Auf einer Mikroskala finden dagegen beispielsweise Prozesse statt, die sehr schnellen Änderungen unterworfen sind und die man 'mikroskopisch genau' untersuchen muss, um sie zu erfassen. Im Folgenden betrachten wir verschiedene Beispiele für *Mehrskalenprobleme*.

1.2 Anwendungsbeispiele

Beispiel 1 (Salzwasserintrusion).

Grundwasser ist eine wichtige Trinkwasserquelle. Wird mehr Grundwasser gefördert, als wie auf natürlichem Wege nachfließen kann, so ändern sich die Druckverhältnisse im Grundwasserleiter. In küstennahen Regionen bedeutet das häufig, dass es zu einem Druckausgleich kommt, indem Meerwasser in die Schichten des Erdreichs vordringt, die zuvor mit Süßwasser gefüllt waren. Diese Art der Verunreinigung von Grundwasser mit Salzwasser wird als *Salzwasserintrusion* bezeichnet. Um nun das genaue Ausmaß der Verunreinigung bestimmen zu können (d.h. die *globale* Ausbreitung der Salzwasserkonzentration) müssen kleine ('mikroskopische') Änderungen in den Gesteinsformationen und Erdschichten berücksichtigt werden. Teilweise bis hinunter zur Porengröße eines Bodentyps.

Beispiel 2 (Schadstofftransport im Grundwasser).

Eine zweites Beispiel, welches dem ersten sehr ähnlich ist, bezieht sich auf die Ausbreitung und den Abbau von Schadstoffen im Erdreich. Hierbei stellen wir uns auch wieder vor, dass Grundwasser verunreinigt wurde. Diesmal beispielsweise durch landwirtschaftliche Rückstände oder industrielle Abwasser. Der Schadstoff ist dann häufig im Grundwasser gelöst und bewegt sich mit dem normalen Grundwasserfluß mit. Um nun die Ausbreitung verfolgen zu können, müssen erneut sehr lokale Effekte, wie Kapillardrücke oder Änderungen der Bodenparameter, berücksichtigt werden. Je nach Struktur des Erdreichs lassen sich hier neben einer Makroskala auch mehrere Mesoskalen unterscheiden.

Beispiel 3 (Faserverstärkte Verbundmaterialien).

Auch in technischen Prozessen tauchen Mehrskalenprobleme auf. Ein Beispiel hierfür sind *faserverstärkte Verbundmaterialien*. Derartige Werkstoffe bestehen aus einem Hauptmaterial (der Matrix), welches durch eine Vielzahl feiner Fasern verstärkt wird. Dabei dient die Matrix als 'Kleber', um die Fasern einerseits in der gewünschten Form und Dichte zusammen zuführen und andererseits um Spannungen zwischen den Fasern zu übertragen. Auf diese Art können neue Materialien mit vorgegebenen Stabilitäts- und Elastizitätseigenschaften konstruiert und gefertigt werden. In manchen Fällen dient eine solche Konstruktion auch dem Hintergrund ein Material leichter zu machen oder aber einfach nur um Produktionskosten oder den Produktionsaufwand zu senken. Anwendungen finden faserverstärkte Verbundmaterialien unter anderem in der Entwicklung von Sportartikeln oder auch in der Luft- und Raumfahrttechnik. Als Beispiel lassen sich glasfaserverstärkte Kunststoffe nennen, bei denen im Allgemeinen eine Harz-Basis mit Glasfasern versetzt wird, um ein hochgradig belastbares Material zu konstruieren, welches beispielsweise zum Verstärken von Bootsrümpfen eingesetzt wird. Als Makroskala hätten wir hier das 'fertige Material' mit dessen effektiv messbaren Eigenschaften, während wir auf der Mikroskala die Matrix und die einzelnen Fasern unterscheiden.

1.3 Motivation für neue Lösungsverfahren

Stellen wir uns nun vor, dass wir explizit an der Lösung eines Mehrskalenproblems interessiert wären und dass die zugrunde liegenden (Mehrskalen-)Gleichungen bereits zur Verfügung stehen. Dann stellt sich nun die Frage nach geeigneten Lösungsverfahren. Zunächst könnte man sich überlegen Standard-Verfahren zu verwenden, wie die Finite Elemente Methode oder Finite Volumen Verfahren. Derartige Methoden setzen aber voraus, dass man das zugrundeliegende Rechengitter so fein macht, dass die Eigenschaften der Datenfunktionen (z.B. der Diffusionskoeffizient) genau genug approximiert werden können. Stellen wir uns zum Beispiel ein

Raumdimension die Gleichung $-(a(x)u'(x))' = f(x)$ vor. Wenn nun zum Beispiel für festes ϵ gilt $|a(x) - a(x + \epsilon)| \gg 0$ (also a ändert sehr schnell seine Eigenschaften), dann ist klar, dass die Gittergröße in jeden Fall unterhalb von ϵ liegen muss, um sinnvolle Approximationen zu erhalten. Ganz allgemein können wir sagen, dass Standard-Verfahren die Mikrostruktur durch ein sehr feines Rechengitter auflösen müssen. Das impliziert jedoch ein sehr großes zu lösendes Gleichungssystem und damit einen erheblichen Rechenaufwand. In vielen Anwendungen wird der Rechenaufwand sogar so groß, dass er selbst durch die schnellsten Computer der Welt nicht mehr zu bewältigen wäre. Man könnte nun annehmen, dass man einfach über die Mikro-Eigenschaften mitteln kann, um am Ende nur ein grobskaliges Problem zu lösen. Schließlich sind wir in vielen Fällen auch nur am grobskaligen Verhalten interessiert. Leider führt auch dieser Ansatz zu falschen Ergebnissen, wie wir in den folgenden Kapiteln noch sehen werden. Wir benötigen also alternative Lösungsstrategien zur Behandlung von Mehrskalenproblemen. Als analytische Ansatz präsentieren wir das Werkzeug der *Homogenisierung*, während wir uns bei den numerischen Methoden vor allem auf die Heterogene Mehrskalenmethode (HMM) konzentrieren.

1.4 Das Setting

Im Folgenden verwenden wir den Parameter ϵ als charakteristische Größe für die feinste Skala im betrachteten Problem. Gehen wir zum Beispiel davon aus, dass die Datenfunktion sehr schnell periodisch oszillieren, so wäre ϵ gerade die Wellenlänge (d.h. die Länge einer Periode). Haben wir es dagegen mit einer heterogenen, nicht-periodischen Struktur zu tun, so sollte ϵ als uneindeutige Größe angesehen werden. Wenn wir signalisieren wollen, dass eine Funktion oder ein Operator Mikroskalen-Eigenschaften besitzt, so wird er im Folgenden mit dem Index ϵ versehen. Typischerweise betrachten wir dann Probleme wie:

$$\text{finde } u^\epsilon \in X \text{ mit } L^\epsilon u^\epsilon = f. \quad (1.4.1)$$

Hier beschreibt $f \in X'$ einen rein makroskopischen Quellterm, während L^ϵ einen Mehrskalen-Operator mit schnellen Oszillationen bezeichnet. Die Lösung u^ϵ hat selbst auch wieder Mehrskalen-Eigenschaften. X ist ein geeigneter Lösungsraum mit Dualraum X' . Bei der Verwendung von ϵ gehen wir immer davon aus, dass ϵ sehr klein ist, im Vergleich zur Ausdehnung des eigentlichen Rechengebiets Ω .

Ziel der Vorlesung ist es nun eine Übersicht an analytischen und numerischen Verfahren zu geben, mit deren Hilfe Gleichungen vom Typ (1.4.1) gelöst werden können. Wir schränken uns dabei zunächst auf elliptische Probleme ein und kommen danach eventuell noch auf parabolische Probleme zu sprechen.

Kapitel 2

Homogenisierung für elliptische Mehrskalenprobleme

In diesem Kapitel untersuchen wir elliptische Mehrskalenprobleme aus rein analytischen Gesichtspunkten. Dabei verwenden wir die Technik der *Homogenisierung*. Dazu führen wir zunächst einfache funktionalanalytische Hilfsmittel in Abschnitt 2.1 ein. Dieser Abschnitt orientiert sich am Skript zur Vorlesung 'Numerik partieller Differentialgleichungen I', gelesen von Prof. Ohlberger im SS 2011. Im Abschnitt 2.2 untersuchen wir erstmals den analytischen Grenzprozess für $\epsilon \rightarrow 0$ in einer elliptischen Gleichung der Form (1.4.1). Dies geschieht zunächst heuristisch mit Hilfe einer formal asymptotischen Entwicklung. In Abschnitt 2.4, der inhaltlich an Allaire [3] und Lukkassen et al. [20] angelehnt ist, wird der heuristische Ansatz schließlich rigoros gerechtfertigt. Dazu sind jedoch weitere funktionalanalytische Hilfsmittel nötig, die in Abschnitt 2.3 eingeführt werden. Für Beweise zu den Sätzen in den Abschnitten 2.1 und 2.3, sowie für weitere Literatur zum Thema Lineare Funktionalanalysis verweisen wir auf das Funktionalanalysis-Buch von Alt [4].

2.1 Funktionalanalytische Hilfsmittel, Teil 1

Wir führen nun einige grundlegende funktionalanalytische Hilfsmittel ein, die wir im Verlauf der Vorlesung benötigen werden. Insbesondere wollen wir im Folgenden schwache Differenzierbarkeit von Funktionen definieren, sowie passende Funktionenräume vorstellen, die wir als Sobolevräume bezeichnen. Wir werden uns dabei im Wesentlichen auf die Angabe von Resultaten und Sätzen beschränken und verweisen für detaillierte Beweise auf [4]. In diesem Abschnitt ist Ω stets eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n .

Definition 2.1.1 ($(L^p(\Omega)$ und $\mathring{C}^\infty(\Omega)$)).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Dann bezeichnet $\mathring{C}^\infty(\Omega)$ den Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktion mit kompaktem Träger in Ω , d.h.

$$\mathring{C}^\infty(\Omega) := \{\phi \in C^\infty(\Omega) \mid \overline{\{x \in \Omega \mid \phi(x) \neq 0\}} \text{ ist kompakt in } \Omega\}.$$

Für $1 \leq p < \infty$ sei

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty\},$$

$$L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und } \exists C \in \mathbb{R} \text{ mit } |f| \leq C \text{ f.ü. in } \Omega\}.$$

$L^p_{loc}(\Omega)$ ist schließlich der Raum der lokalen L^p -Funktionen:

$$L^p_{loc}(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in L^p(K) \quad \forall K \subset \Omega \text{ offen, } \bar{K} \text{ kompakt}\}.$$

Definition 2.1.2 (Schwache Ableitung).

Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex. Eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ besitzt die schwache Ableitung $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$, wenn für alle Testfunktionen $\phi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\alpha \phi.$$

Wir schreiben dann auch $D^\alpha u := v_\alpha$ für die schwache Ableitung.

Beispiel (Schwache Ableitung von $|x|$)

Sei $\Omega = (-1, 1)$ und $u(x) = |x|$. Dann ist $u'(x) = \text{sign}(x)$ die schwache Ableitung von u . Denn: es gilt für beliebige $\phi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u(x) \phi'(x) dx &= \int_{-1}^0 u(x) \phi'(x) dx + \int_0^1 u(x) \phi'(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 (-x) \phi'(x) dx + \int_0^1 x \phi'(x) dx \\ &= - \int_{-1}^0 (-1) \phi(x) dx - [(-x) \phi]_{-1}^0 - \int_0^1 1 \phi(x) dx + [x \phi]_0^1 \end{aligned}$$

$$= \int_{-1}^1 \text{sign}(x)\phi(x) dx.$$

Im Gegensatz zu $|x|$ ist $\text{sign}(x)$ jedoch nicht schwach differenzierbar.

Definition 2.1.3 (Sobolevräume).

Seien $m \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1, \infty]$, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $D^\alpha u$ (schwache partielle Ableitung) existiert für $|\alpha| \leq m$. Dann definieren wir die Sobolevnormen $\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)}$ durch

$$\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

falls $1 \leq p < \infty$ und für $p = \infty$ als

$$\|u\|_{H^{m,\infty}(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Schließlich definieren wir die Sobolevräume $H^{m,p}(\Omega)$ durch

$$H^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^1_{loc}(\Omega) \mid D^\alpha u \text{ existiert für } |\alpha| \leq m, \|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} < \infty\}.$$

Für $p = 2$ schreiben wir auch $H^m(\Omega) := H^{m,2}(\Omega)$. Außerdem definieren wir die Sobolev-Halbnormen durch

$$|u|_{H^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

falls $1 \leq p < \infty$ und für $p = \infty$ als

$$|u|_{H^{m,\infty}(\Omega)} := \max_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Beispiel 1: Seien $\Omega := B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $u(x) := \log|\log|x||$, $x \in \Omega$. Dann gilt: $u \in H^{1,2}(\Omega)$, aber $u \notin C^0(\Omega)$. D.h. Funktionen in H^1 sind in mehreren Raumdimensionen nicht notwendigerweise stetig.

Beispiel 2: Wir betrachten $\Omega := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $u(x) = |x|^s$, für $s \in \mathbb{R}$ und $x \in \Omega$. Dann ist $u \in H^{1,p}(\Omega)$, wenn gilt $s > 1 - \frac{n}{p}$.

Wir haben die Sobolevräume eingeführt, weil die klassischen Funktionenräume bezüglich den L^p -Normen nicht vollständig sind. Für die Sobolevräume gilt hingegen der für uns wichtige Satz:

Satz 2.1.4 (Vollständigkeit der Sobolevräume).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $H^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$ ein Banachraum. $H^m(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Sobolevräume sind also insbesondere vollständig. Dennoch erben Sie viele Eigenschaften von klassischen Funktionenräumen. Dass dies der Fall ist, liegt an der folgenden Approximationseigenschaft von stetig differenzierbaren Funktionen.

Satz 2.1.5.

Sei $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $C^\infty(\Omega) \cap H^{m,p}(\Omega)$ dicht in $H^{m,p}(\Omega)$, d.h. $H^{m,p}(\Omega)$ -Funktionen lassen sich durch beliebig oft differenzierbare Funktionen approximieren.

Bemerkung 2.1.6 (Rechenregeln für schwache Ableitungen).

Aufgrund der Tatsache, dass klassisch differenzierbare Funktionen dicht in $H^{m,p}(\Omega)$ liegen, sieht man leicht ein, dass sich bekannte Rechenregeln für klassische Ableitungen, wie etwa die Produktregel oder die Kettenregel auf schwache Ableitungen übertragen.

Ferner sei bemerkt, dass sich auch der Gaußsche Integralsatz und die daraus resultierenden Formeln zur partiellen Integration direkt auf entsprechend schwach differenzierbare Funktionen in $H^{m,p}(\Omega)$ übertragen.

Da wir uns mit unter anderem mit elliptischen Problemen befassen wollen, bei denen eine homogene Dirichlet-Randbedingung (d.h. Nullrandwerte) vorgeschrieben ist, bleibt zu klären in welchem Sinne wir bei Sobolevräumen von Nullrandwerten reden können, da die Funktionen zunächst nur bis auf Nullmengen definiert sind

und der Rand eines Gebietes eine Nullmenge darstellt, auf der man L^p -Funktionen beliebig abändern kann. In der folgenden Definition wird dies geklärt.

Definition 2.1.7 (Schwache Nullrandwerte).

Für $1 \leq p < \infty$, Ω beschränkt und $m \in \mathbb{N}$ definieren wir die Sobolevräume mit Nullrandwerten $\mathring{H}^{m,p}(\Omega)$ durch

$$\mathring{H}^{m,p}(\Omega) := \overline{C^\infty_0(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^{m,p}(\Omega)}}.$$

Zur Definition von schwachen Nullrandwerten machen wir uns also die Approximation durch klassisch differenzierbare Funktionen mit Nullrandwerten zu nutze. Wichtig ist dabei allerdings, dass die Vollständigkeit nicht verloren geht. Dies drückt sich in folgenden Satz aus.

Satz 2.1.8.

Für $1 \leq p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}$ ist $\mathring{H}^{m,p}(\Omega)$ ein abgeschlossener Teilraum von $H^{m,p}(\Omega)$. Insbesondere ist also $\mathring{H}^{m,p}(\Omega)$ ein Banachraum und die Norm $\|\cdot\|_{H^{m,p}(\Omega)}$ überträgt sich auf $\mathring{H}^{m,p}(\Omega)$.

Als nächstes definieren wir den Sobolevraum der Funktionen mit Mittelwert Null durch:

$$\tilde{H}^{m,p}(\Omega) := \{\phi \in H^{m,p}(\Omega) \mid \int_{\Omega} \phi = 0\}.$$

Satz 2.1.9 (Poincarésche Ungleichung).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend) und $p \in [1, \infty)$. Dann gibt es eine Konstante $c_p \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq c_p \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall v \in \mathring{H}^{1,p}(\Omega) \cup \tilde{H}^{1,p}(\Omega).$$

Bemerkung 2.1.10.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, dann besagt die obige Poincarésche Ungleichung insbesondere, dass die Halbnorm $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ bereits eine echte Norm auf dem Hilbertraum $\mathring{H}^1(\Omega)$ (bzw. $\tilde{H}^1(\Omega)$) ist. Insbesondere ist der $\mathring{H}^1(\Omega)$ (bzw. $\tilde{H}^1(\Omega)$) auch vollständig bzgl. dieser Norm.

Aus dem Satz von Gauß und der Tatsache, dass sich $H^{1,p}$ -Funktionen durch unendlich oft differenzierbare Funktionen approximieren lassen, gilt der folgende Satz.

Satz 2.1.11 (Greensche Formel).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit Lipschitz-Rand. Sei $1 \leq p \leq \infty$, q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $U \in [H^{1,p}(\Omega)]^n$ und $v \in H^{1,q}(\Omega)$, dann gilt:

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot U(x) v(x) dx = \int_{\Omega} U(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\partial\Omega} (U(x) \cdot \nu(x)) v(x) d\sigma(x),$$

wobei ν die äußere Normale an Ω bezeichnet.

Wir kommen zu den letzten beiden Sätzen in diesem Abschnitt. Diese bilden das zentrale Werkzeug, um die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung der zu betrachtenden elliptischen Probleme zu zeigen.

Satz 2.1.12 (Rieszscher Darstellungssatz).

Sei X ein reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_X$. Dann ist durch

$$J(x)(y) := (x, y)_X \quad \text{für } x, y \in X$$

ein isometrischer linearer Isomorphismus $J : X \rightarrow X'$ definiert.

Folgerung 2.1.13.

Sei X reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_X$ und $F \in X'$. Dann gibt es genau ein $x_0 \in X$, so dass

$$F(y) = (x_0, y)_X \quad \forall y \in X.$$

Es gilt $x_0 = J^{-1} \circ F$ mit J aus Satz 2.1.12.

Der Rieszsche Darstellungssatz liefert uns ein nützliches Werkzeug bezogen auf Skalarprodukte von Hilberträumen. Eine Verallgemeinerung davon für nicht notwendigerweise symmetrische Bilinearformen liefert der Satz von Lax-Milgram.

Satz 2.1.14 (Satz von Lax-Milgram).

Sei X ein reeller Hilbertraum und $B : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform, d.h. es existiert eine Konstante $c_1 > 0$, so dass für alle $x, y \in X$ gilt

$$|B(x, y)| \leq c_1 \|x\|_X \|y\|_X.$$

Weiter sei B koerziv, d.h. es existiert eine Konstante $c_0 > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt

$$B(x, x) \geq c_0 \|x\|_X^2.$$

Dann gibt es zu jedem $F \in X'$ genau ein $u \in X$, so dass für alle $\phi \in X$ gilt

$$B(u, \phi) = F(\phi).$$

2.2 Formal asymptotische Entwicklung

2.2.1 Das elliptische Mehrskalenproblem

In diesem Abschnitt setzen wir voraus, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet ist. Alle Betrachtungen werden weitestgehend heuristisch sein. Behandelt wird die folgende elliptische Gleichung: finde u^ϵ mit

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (A^\epsilon \nabla u^\epsilon) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u^\epsilon &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

$u^\epsilon \in C^2(\Omega)$ heißt klassische Lösung.

Mögliche Interpretation der Gleichung - Diffusion eines Schadstoffs im Erdreich:

- Ω beschreibt einen Bodenausschnitt;
- $u^\epsilon(x)$ beschreibt die Konzentration des Schadstoffs im Punkt x ;
- $u^\epsilon(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ besagt, dass sich kein Schadstoff am Rand des Gebiets befindet;

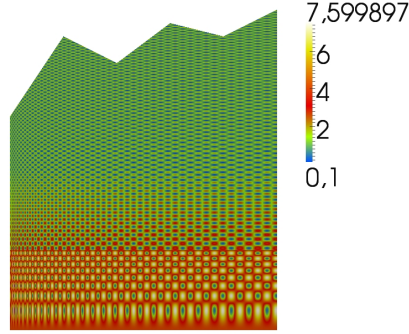


Abbildung 2.1: Beispiel für die Werte von einem schnell oszillierenden A^ϵ in einem $2d$ -Rechengebiet.

- A^ϵ beschreibt eine sich schnell ändernde hydraulischen Leitfähigkeit im Rechengebiet (Siehe z.B. Abbildung 2.2.1);
- f beschreibt äußere Kräfte wie die Gravitation.

Exemplarische formulieren wir nun die zu (2.2.1) gehörige schwache Formulierung und zeigen unter geeigneten Voraussetzungen die Existenz einer schwachen Lösung.

Sei $u^\epsilon \in C^2(\Omega)$ eine Lösung des Problems. Wir starten mit der Gleichung (2.2.1), multiplizieren sie mit einer Testfunktion $\Phi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$, integrieren über Ω und erhalten:

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (A^\epsilon \nabla u^\epsilon) \cdot \nabla \Phi = \int_{\Omega} f \Phi \quad \forall \Phi \in \mathring{C}^\infty(\Omega).$$

Nun verwenden wir die Greensche Formel aus Satz 2.1.11 mit $U = A^\epsilon \nabla u^\epsilon$ und $v = \Phi$. Wir erhalten:

$$\int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u^\epsilon \cdot \nabla \Phi - \int_{\partial\Omega} (A^\epsilon \nabla u^\epsilon \cdot \nu) \Phi = \int_{\Omega} f \Phi \quad \forall \Phi \in \mathring{C}^\infty(\Omega).$$

Da Φ Nullrandwerte besitzt, verschwindet das Randintegral und wir erhalten

$$\int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u^\epsilon \cdot \nabla \Phi = \int_{\Omega} f \Phi \quad \forall \Phi \in \mathring{C}^\infty(\Omega). \quad (2.2.2)$$

Als Letztes nutzen wir die Definition

$$\mathring{H}^1(\Omega) = \overline{\mathring{C}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}},$$

d.h. die Tatsache dass die unendlich oft differenzierbaren Funktionen dicht im $\dot{H}^1(\Omega)$ liegen und können für eine beliebige Funktion $\Phi \in \dot{H}^1(\Omega)$ eine Folge $\Phi_k \in \dot{C}^\infty(\Omega)$ finden, die stark in H^1 gegen Φ konvergiert. Also mittels (2.2.2):

$$\int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u^\epsilon \cdot \nabla \Phi \xrightarrow{\infty \leftarrow k} \int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u^\epsilon \cdot \nabla \Phi_k = \int_{\Omega} f \Phi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f \Phi.$$

Somit gilt für jede Lösung $u^\epsilon \in C^2(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u^\epsilon \cdot \nabla \Phi = \int_{\Omega} f \Phi \quad \forall \Phi \in \dot{H}^1(\Omega).$$

Im Folgenden verwenden wir die obige Gleichung als Ausgangsproblem und suchen die sogenannte *schwache Lösung*: finde $u^\epsilon \in \dot{H}^1(\Omega)$, so dass

$$\int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u^\epsilon \cdot \nabla \Phi = \int_{\Omega} f \Phi \quad \forall \Phi \in \dot{H}^1(\Omega). \quad (2.2.3)$$

Wir werden gleich sehen, dass dieses Problem (unter geeigneten Annahmen an A^ϵ) immer eine eindeutige Lösung in $\dot{H}^1(\Omega)$ besitzt. Existiert nun zufälligerweise auch eine klassische Lösung $u^\epsilon \in C^2(\Omega)$, so ist diese insbesondere auch ein Element von $\dot{H}^1(\Omega)$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung, müssen in diesem Fall klassische und schwache Lösung identisch sein.

Folgerung 2.2.1.

Jede klassische Lösung von (2.2.1) ist auch schwache Lösung von (2.2.3).

Es bleibt die Eindeutigkeit und Existenz einer schwachen Lösung zu zeigen.

Satz 2.2.2.

Sei $f \in L^2(\Omega)$ und $A^\epsilon \in [L^\infty(\Omega)]^{n \times n}$ global elliptisch, d.h. es existiert ein $\alpha > 0$, so dass gilt

$$A^\epsilon(x) \xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \text{und für fast alle } x \in \Omega.$$

Dann existiert genau ein $u^\epsilon \in \dot{H}^1(\Omega)$ mit

$$\int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u^\epsilon \cdot \nabla \Phi = \int_{\Omega} f \Phi \quad \forall \Phi \in \dot{H}^1(\Omega).$$

Beweis.

Nach Satz 2.1.8 und Bemerkung 2.1.10 ist der $\dot{H}^1(\Omega)$ ein Hilbertraum bzgl. der Halbnorm $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$.

Wir wollen nun den Satz von Lax-Milgram (Satz 2.1.14) anwenden. Dabei ist

- $X = \dot{H}^1(\Omega)$,
- $(u, v)_X = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$ (Skalarprodukt induziert die $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ -Norm),
- $F(\phi) := \int_{\Omega} f \phi$,
- $B(u, v) := \int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u \cdot \nabla v$.

Wir müssen lediglich zeigen, dass B stetig und koerziv ist, dann existiert zu $F \in X'$ genau ein $u^\epsilon \in X$ mit

$$B(u^\epsilon, \phi) = F(\phi) \quad \forall \phi \in X.$$

B ist stetig (d.h. $|B(u, v)| \leq c_1 \|u\|_X \|v\|_X$), denn mit der Hölderungleichung gilt

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u \cdot \nabla v \right| \\ &\leq \|A^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \|A^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} |u|_{H^1(\Omega)} |v|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

denn $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = |v|_{H^1(\Omega)}$. B ist auch koerziv ($B(u, u) \geq c_0 \|u\|_X^2$), denn wegen $A^\epsilon(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2$ gilt mit $\xi = \nabla u(x)$

$$A^\epsilon(x) \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) \geq \alpha |\nabla u(x)|^2.$$

Also:

$$B(u, u) = \int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u \cdot \nabla u \geq \int_{\Omega} \alpha |\nabla u|^2 = \alpha |u|_{H^1(\Omega)}^2.$$

□

Wir können also 'guten Gewissens' das folgende Mehrskalenproblem betrachten:

$$\text{finde } u^\epsilon \in \dot{H}^1(\Omega) \text{ mit } \int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u^\epsilon \cdot \nabla \Phi = \int_{\Omega} f \Phi \quad \forall \Phi \in \dot{H}^1(\Omega).$$

Fragestellung: Wie verhält sich diese Gleichung für $\epsilon \rightarrow 0$? Dieser Grenzprozess wird als *Homogenisierungsprozess* bezeichnet. Insbesondere interessiert uns:

1. Existiert ein $u_0 \in \dot{H}^1(\Omega)$, so dass $u^\epsilon \rightarrow u_0$ in einem geeigneten Sinne?
2. Existiert ein elliptisches $A^0 \in (L^\infty(\Omega))^{n \times n}$, so dass $u_0 \in \dot{H}^1(\Omega)$ die eindeutige Lösung eines Problems

$$\int_{\Omega} A^0 \nabla u_0 \cdot \nabla \Phi = \int_{\Omega} f \Phi \quad \forall \Phi \in \dot{H}^1(\Omega) \quad (2.2.4)$$

ist?

3. Wie gut approximiert die *homogenisierte* Lösung u_0 die exakte Lösung u^ϵ ?

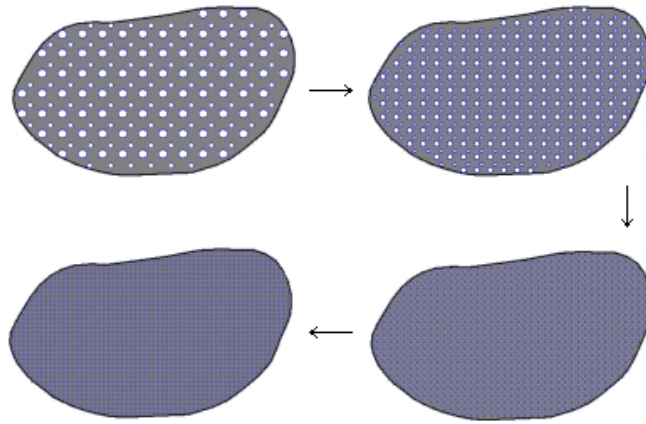


Abbildung 2.2: Anschauliche Darstellung eines Homogenisierungsprozesses für immer kleiner werdendes ϵ . Im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$, stellt sich ein homogenes Material ein (die schnellen Oszillationen verschwinden vollständig).

Sollte es positive Antworten auf all diese Fragen geben und sollte es möglich sein A^0 zu bestimmen, so können wir statt des teuren Originalproblems (2.2.3), das homogenisierte Problem (2.2.4) lösen, um eine Approximation für u^ϵ zu erhalten.

2.2.2 Homogenisierung im periodischen Setting

Im Folgenden wollen wir uns für diese Fragestellungen auf ein periodisches Szenario einschränken. In diesem Abschnitt bezeichnet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\epsilon > 0$ wie gewohnt einen kleinen Parameter. Wir führen nun die wichtigsten Definitionen für das periodische Setting ein:

Definition 2.2.3 (Periodische Funktionenräume).

Bezeichne $Y := (0, 1)^n$ die n -dimensionale Einheitszelle, dann ist für $0 \leq k \leq \infty$ der Raum der Y -periodischen glatten Funktionen gegeben durch

$$C_{\#}^k(Y) := \{\phi \in C^k(\mathbb{R}^n) \mid \phi \text{ ist } Y\text{-periodisch}\}.$$

Unter Y -periodisch verstehen wir hier $\phi(y) = \phi(y + e_i)$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ und $1 \leq i \leq n$ ($(e_i)_j = \delta_{ij}$). Analog zum Raum $H^1(\Omega)$, definieren wir auch den Raum der schwach-differenzierbaren periodischen Funktionen durch den entsprechenden Abschluss:

$$H_{\#}^1(Y) := \overline{C_{\#}^{\infty}(Y)}^{\|\cdot\|_{H^1(Y)}}.$$

Der Raum der Y -periodischen H^1 -Funktionen mit Mittelwert Null sei gegeben durch:

$$\tilde{H}_{\#}^1(Y) := \{\phi \in H_{\#}^1(Y) \mid \int_Y \phi(y) dy = 0\}.$$

Die periodischen L^{∞} -Funktionen sind definiert durch:

$$L_{\#}^{\infty}(Y) := \{\phi \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \mid \phi(y + e_i) = \phi(y) \text{ für f.a. } y \in \mathbb{R}^n \text{ und } 1 \leq i \leq n\}.$$

Definition 2.2.4 ($M(\alpha, \beta, \Omega, Y)$).

Eine Matrix $A : \Omega \times Y \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ist von der Klasse $M(\alpha, \beta, \Omega, Y)$, genau dann wenn gilt:

1. $A \in C(\Omega; L_{\#}^{\infty}(Y))^{n \times n}$;
2. für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und für fast alle $(x, y) \in \Omega \times Y$ gilt

$$\alpha|\xi|^2 \leq A(x, y)\xi \cdot \xi \leq \beta|\xi|^2.$$

Wir können nun das periodische, elliptische Mehrskalenproblem angeben:

Periodisches Setting.

Sei $f \in L^2(\Omega)$ und $A \in M(\alpha, \beta, \Omega, Y)$. Gesucht wird $u^\epsilon \in \dot{H}^1(\Omega)$ mit

$$\int_{\Omega} A(x, \frac{x}{\epsilon}) \nabla u^\epsilon(x) \cdot \Phi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \Phi(x) \quad \forall \Phi \in \dot{H}^1(\Omega). \quad (2.2.5)$$

Fragen:

1. Existiert ein Grenzwert u_0 , so dass $u^\epsilon \rightarrow u_0$ in einem geeigneten Sinne?
2. Lässt sich eine DGL angeben, deren Lösung gerade u_0 ist?

Ansatz: Die formal asymptotische Entwicklung.

Sei u^ϵ Lösung von (2.2.5), wobei $A(x, y) = A(y)$.

Annahme: Es existieren Y -periodische Funktionen $u_i(x, y)$, $i \in \mathbb{N}$, so dass:

$$u^\epsilon(x) = u_0(x, \frac{x}{\epsilon}) + \epsilon u_1(x, \frac{x}{\epsilon}) + \epsilon^2 u_2(x, \frac{x}{\epsilon}) + \dots = \sum_{i \in \mathbb{N}} \epsilon^i u_i(x, \frac{x}{\epsilon}). \quad (2.2.6)$$

Diesen Ansatz nennen wir eine *asymptotische Entwicklung in ϵ* .

Frage: Lassen sich Differentialgleichungen für die einzelnen u_i aufstellen?

Wir gehen nun in mehreren Schritten vor.

1. Schritt: Einsetzen von (2.2.6) in (2.2.5).

Mit der Notation $\bar{y} := \frac{x}{\epsilon}$ erhalten wir zunächst:

$$\begin{aligned} \nabla u^\epsilon(x) &= \nabla \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \epsilon^i u_i(x, \frac{x}{\epsilon}) \right) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \epsilon^i \left(\nabla_x u_i(x, \frac{x}{\epsilon}) + \frac{1}{\epsilon} \nabla_y u_i(x, \frac{x}{\epsilon}) \right) \\ &= \left(\nabla_x + \frac{1}{\epsilon} \nabla_y \right) \sum_{i \in \mathbb{N}} \epsilon^i u_i(x, \bar{y}) \\ &= \frac{1}{\epsilon} \nabla_y u_0(x, \bar{y}) + \sum_{i \in \mathbb{N}} \epsilon^i (\nabla_x u_i(x, \bar{y}) + \nabla_y u_{i+1}(x, \bar{y})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon^{-1} \nabla_y u_0(x, \bar{y}) \\
&\quad + \epsilon^0 (\nabla_x u_0(x, \bar{y}) + \nabla_y u_1(x, \bar{y})) \\
&\quad + \epsilon^1 (\nabla_x u_1(x, \bar{y}) + \nabla_y u_2(x, \bar{y})) + \dots
\end{aligned}$$

Einsetzen in (2.2.5) ergibt:

$$\begin{aligned}
-f(x) &= \epsilon^{-2} [\nabla_y \cdot (A(\bar{y}) \nabla_y u_0(x, \bar{y}))] \\
&\quad + \epsilon^{-1} [\nabla_x \cdot A(\bar{y}) \nabla_y u_0(x, \bar{y}) + \nabla_y \cdot (A(\bar{y}) (\nabla_x u_0(x, \bar{y}) + \nabla_y u_1(x, \bar{y})))] \\
&\quad + \epsilon^0 [\nabla_y \cdot (A(\bar{y}) (\nabla_y u_2(x, \bar{y}) + \nabla_x u_1(x, \bar{y}))) \\
&\quad \quad + \nabla_x \cdot (A(\bar{y}) (\nabla_y u_1(x, \bar{y}) + \nabla_x u_0(x, \bar{y})))] \\
&\quad + O(\epsilon).
\end{aligned}$$

2. Schritt: Koeffizientenvergleich.

ϵ^{-2} -Terme:

$$\begin{aligned}
-\nabla_y \cdot (A(y) \nabla_y u_0(x, y)) &= 0 \\
u_0(x, y) &\text{ ist } Y\text{-periodisch.}
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Wegen der Eindeutigkeit einer Lösung für jedes x (bis auf eine additive Konstante), muss $u_0(x, \cdot)$ konstant sein. Also ist $u_0(x, y)$ unabhängig von y .

ϵ^{-1} -Terme:

Wir nutzen $\nabla_y u_0 = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\nabla_y \cdot (A(y) \nabla_y u_1(x, y)) &= -\nabla_y \cdot (A(y) \nabla_x u_0(x)) \\
u_1(x, y) &\text{ ist } Y\text{-periodisch.}
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Ziel: Drücke u_1 durch u_0 aus.

Dazu definieren wir ein Hilfsproblem auf der Einheitszelle Y (Zellproblem):

Sei $w_i(y)$ Lösung von

$$\begin{aligned}
\nabla_y \cdot (A(y) \nabla_y w_i(y)) &= -\nabla_y \cdot (A(y) e_i) \\
w_i(y) &\text{ ist } Y\text{-periodisch.}
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Lemma 2.2.5.

Das Zellproblem (2.2.9) besitzt eine Schar schwacher Lösungen, wobei die Lösungen sich alle nur durch eine additive Konstante unterscheiden.

Dann gilt nach Multiplikation mit $\partial_{x_i} u_0(x)$ und Summe über $i = 1, \dots, n$:

$$\nabla_y \cdot \left(A(y) \nabla_y \left(\sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u_0(x) w_i(y) \right) \right) = -\nabla_y \cdot (A(y) \nabla_x u_0(x)) \quad (2.2.10)$$

$$\sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u_0(x) w_i(y) \text{ ist } Y\text{-periodisch.}$$

Wegen der Eindeutigkeit einer Lösung w_i bis auf Konstanten (siehe Lemma 2.2.5) und der Eindeutigkeit (bis auf Konstanten) einer Lösung u_1 von (2.2.8), liefert ein Vergleich von (2.2.8) und (2.2.10), erhalten wir die Relation:

$$u_1(x, y) = \bar{u}_1(x) + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u_0(x) w_i(y),$$

mit passendem $\bar{u}_1(x)$.

ϵ^0 -Terme:

$$\underbrace{\nabla_y \cdot (A(y) \nabla_y u_2(x, y) + A(y) \nabla_x u_1(x, y))}_{\text{I}} + \underbrace{\nabla_x \cdot (A(y) \nabla_y u_1(x, y))}_{\text{II}} + \underbrace{\nabla_x \cdot (A(y) \nabla_x u_0(x))}_{\text{III}} = -f(x).$$

Integration über die Einheitszelle Y liefert:

$$\int_Y \text{I} dy + \int_Y \text{II} dy + \int_Y \text{III} dy = - \int_Y f(x) dy = -f(x).$$

Dabei ergibt sich für die einzelnen Terme:

$$\begin{aligned} \int_Y \text{I} dy &= \int_Y \nabla_y \cdot (A(y) \nabla_y u_2(x, y) + A(y) \nabla_x u_1(x, y)) dy \\ &= \int_{\partial Y} A(y) \nabla_y u_2(x, y) + A(y) \nabla_x u_1(x, y) \cdot n d\sigma(y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

da u_1 und u_2 Y -periodisch sind.

Für II erhalten wir aufgrund der hergeleiteten Struktur für u_1 :

$$\begin{aligned} \int_Y \text{II} \, dy &= \int_Y \nabla_x \cdot \left(A(y) \nabla_y \left(\sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u_0(x) w_i(y) \right) \right) dy \\ &= \int_Y \nabla_x \cdot \left(\sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} u_0(x) A(y) \nabla_y w_i(y)) \right) dy \\ &= \nabla_x \cdot \left(\sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u_0(x) \left(\int_Y A(y) \nabla_y w_i(y) \, dy \right) \right). \end{aligned}$$

Für III gilt direkt:

$$\int_Y \text{III} \, dy = \nabla_x \cdot \left(\sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u_0(x) \left(\int_Y A(y) e_i \, dy \right) \right).$$

Insgesamt folgt also:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\nabla_x \cdot \left(\sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u_0(x) \left(\int_Y A(y) (e_i + \nabla_y w_i(y)) \, dy \right) \right) \\ &= -\nabla_x \cdot (A^0 \nabla_x u_0(x)), \end{aligned}$$

wobei

$$A_{ij}^0 := \int_Y A(y) (e_j + \nabla_y w_j(y)) \cdot e_i \, dy.$$

3. Schritt: Homogenisierte Matrix und Grenzproblem.

Wegen der asymptotischen Entwicklung (2.2.6) von u^ϵ und aufgrund der y -Unabhängigkeit von u_0 , erhalten wir (heuristisch):

$$\|u^\epsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)} = \epsilon \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^{i-1} u^i(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\epsilon \rightarrow 0.$$

Also $u^\epsilon \rightarrow u_0$ in $L^2(\Omega)$ und $u_0 \in \mathring{H}^1(\Omega)$ erfüllt die folgende homogenisierte Gleichung:

$$\int_{\Omega} A^0 \nabla u_0(x) \cdot \Phi(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) \Phi(x) \, dx \quad \forall \Phi \in \mathring{H}^1(\Omega).$$

Dabei ist

$$A_{ij}^0 = \int_Y A(y) (e_j + \nabla_y w_j(y)) \cdot e_i \, dy$$

und w_j die (bis auf eine Konstante eindeutige) Lösung des j 'ten Zellproblems (2.2.9). Im folgenden Beweis von Lemma 2.2.5 geben wir die schwache Formulierung des Zellproblems an und zeigen Existenz und Eindeutigkeit.

Beweis von Lemma 2.2.5.

Sei $w_i(y)$ Lösung von

$$\begin{aligned} \nabla_y \cdot (A(y) \nabla_y w_i(y)) &= -\nabla_y \cdot (A(y) e_i) \\ w_i(y) &\text{ ist } Y\text{-periodisch.} \end{aligned}$$

Dann sehen wir sofort: ist w_i Lösung des Problems, dann auch $w_i + c$, wobei $c \in \mathbb{R}$. Wir zeigen daher im Folgenden die Eindeutigkeit einer schwachen Lösung *mit Mittelwert 0*. Durch diese zusätzliche Bedingung wird c eindeutig bestimmt, aber an der homogenisierten Matrix A^0 ändert das nichts. Als Lösungsraum verwenden wir daher den Sobolevraum $H^1(Y)$, mit der Einschränkung auf periodische Randwerte und Mittelwert Null. Also:

$$H_\#^1(Y) = \overline{C_\#^\infty(Y)}^{\|\cdot\|_{H^1(Y)}}.$$

und

$$\tilde{H}_\#^1(Y) = \{\phi \in H_\#^1(Y) \mid \int_Y \phi(y) dy = 0\}.$$

Per Definition und nach Bemerkung 2.1.10 ist der $\tilde{H}_\#^1(Y)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(\nabla u, \nabla v)_{L^2(Y)}$. Die schwache Formulierung des Zellproblems (2.2.9) lautet also: finde $w_i \in \tilde{H}_\#^1(Y)$ mit

$$\int_Y A(y) \nabla_y w_i(y) \cdot \nabla_y \phi(y) dy = - \int_Y A(y) e_i \cdot \nabla_y \phi(y) dy \quad \forall \phi \in \tilde{H}_\#^1(Y).$$

Der Satz von Lax-Milgram (Satz 2.1.14) mit Lax-Milgram anwenden. Dabei ist

- $X = \tilde{H}_\#^1(Y)$,
- $(u, v)_X = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$,
- $F(\phi) := - \int_Y A(y) e_i \cdot \nabla_y \phi(y) dy$, $F \in X'$,
- $B(u, \phi) := \int_\Omega A(y) \nabla u(y) \cdot \nabla \phi(y) dy$,

liefert nun die Existenz einer eindeutigen Lösung $w_i \in \tilde{H}_\#^1(Y)$. Stetigkeit und Koerzivitat von B folgen wie ublich. \square

Bemerkung 2.2.6.

(i) *Homogenisierungs-Beispiel: 'Layered Media'.*

Sei

$$\alpha(y) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{für } y \in (0, \frac{1}{2}) \times (0, 1) \\ \alpha_2 & \text{für } y \in [\frac{1}{2}, 1) \times (0, 1) \end{cases}$$

und $A^\epsilon(x) = \text{Id } \alpha(\frac{x}{\epsilon})$, dann ist A^0 gegeben durch:

$$A^0 = \begin{pmatrix} \langle \alpha^{-1} \rangle_Y^{-1} & 0 \\ 0 & \langle \alpha \rangle_Y \end{pmatrix},$$

also das harmonische Mittel in x -Richtung und das arithmetische Mittel in y -Richtung.

(ii) Wenn A symmetrisch und uniform positiv definit ist, so ist auch die homogenisierte Matrix symmetrisch und positiv definit.

(iii) A^0 lässt sich auch schreiben als:

$$\begin{aligned} A_{ij}^0 &= \int_Y A(y)(e_j + \nabla_y w_j(y)) \cdot e_i \\ &= \int_Y A(y)(e_j + \nabla_y w_j(y)) \cdot (e_i + \nabla_y w_i(y)), \end{aligned}$$

da wir durch die schwache Formulierung des Zellproblems erhalten, dass

$$\int_Y A(y)(e_j + \nabla_y w_j(y)) \cdot \nabla_y w_i(y) = 0$$

gilt.

2.3 Funktionalanalytische Hilfsmittel, Teil 2

Im Folgenden wollen wir weitere funktionalanalytische Hilfsmittel einführen, die wir für die sogenannte Theorie der 2-Skalen-Konvergenz benötigen werden. Weiterführende Literatur und Beweise zu den nachfolgenden Sätzen sind zum Beispiel in den Büchern von Alt [4] und Cioranescu und Donato [5] zu finden.

Zunächst betrachten wir die Dualräume von L^p -Räumen und stellen fest, dass sie für $1 \leq p < \infty$ eine sehr einfache Darstellung besitzen.

Satz 2.3.1 (Dualraum von L^p).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $1 \leq p < \infty$ und q so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt. Dann ist durch

$$J(f)(g) := \int_{\Omega} g(x)f(x) dx \quad \text{für } g \in L^p(\Omega) \text{ und } f \in L^q(\Omega)$$

ein linearer isometrischer Isomorphismus $J : L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)'$ definiert.

Bemerkung 2.3.2.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

- (i) $L^2(\Omega)' \simeq L^2(\Omega)$, d.h. der Raum $L^2(\Omega)$ ist isomorph zu seinem Dualraum. Denn Satz 2.3.1 besagt (für $p = q = 2$), dass für jedes $F \in L^2(\Omega)'$ ein $f \in L^2(\Omega)$ existiert, so dass gilt

$$F(\Phi) = \int_{\Omega} f(x)\Phi(x) dx \quad \forall \Phi \in L^2(\Omega)$$

(denn mit $f := J^{-1}(F)$ gilt: $F(\phi) = J(f)(\Phi) = \int_{\Omega} f\Phi$). Zusätzlich gilt aufgrund der Isometrie:

$$\|F\|_{L^2(\Omega)'} = \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

- (ii) $L^1(\Omega)' \simeq L^\infty(\Omega)$. Dies folgt mit Satz 2.3.1 für $p = 1$ und $q = \infty$.

- (iii) $L^\infty(\Omega)' \simeq L^1(\Omega)$ ist falsch!

Im Folgenden seien X und Y immer normierte Vektorräume über \mathbb{R} .

Definition 2.3.3 (Stetige lineare Operatoren).

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Vektorräume. Ein linearer Operator $T : X \rightarrow Y$ heißt stetig, wenn eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass gilt:

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Wir definieren die Menge aller stetigen, linearen Abbildungen von X nach Y durch:

$$L(X, Y) := \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ ist stetig und linear}\}.$$

Wir nennen

$$X' := L(X, \mathbb{R})$$

den Dualraum von X und

$$X'' := L(X', \mathbb{R})$$

den Bidualraum von X .

Notation 2.3.4. Im Folgenden verwenden wir auch die Notation:

$$\langle x', x \rangle := x'(x) \text{ für } x' \in X' \text{ und } x \in X.$$

Definition 2.3.5.

Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ heißt separabel, wenn er eine abzählbare Dichte Teilmenge enthält (dicht bzgl. $\|\cdot\|_X$).

Beispiele:

- (i) \mathbb{R} mit der euklidischen Norm ist separabel. Er enthält \mathbb{Q} als abzählbare Dichte Teilmenge.
- (ii) Der Raum $C^0(S)$ ist separabel, wenn $S \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt ist. Dies folgt aus dem Weierstraß'schen Approximationssatz, der besagt, dass auf abgeschlossenen beschränkten Mengen, der Raum der Polynome dicht in C^0 liegt (bzgl. der C^0 -Norm). Da der Raum der Polynome abzählbar ist, folgt so die Behauptung.
- (iii) Der $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist separabel für $1 \leq p < \infty$. Schöpfe den \mathbb{R}^n durch eine abzählbare Folge von abgeschlossenen, beschränkten Gebieten aus. Auf jedem dieser Gebiete können wir die Funktion durch eine Folge stetiger Funktionen approximieren. Diese Folge lässt sich nach (ii) durch eine abzählbare Folge ersetzen.

- (iv) Ist Ω offen, so ist der $L^p(\Omega)$ separabel für $1 \leq p < \infty$. Setze die Funktion durch 0 auf den gesamten \mathbb{R}^n fort und wende (iii) an.
- (v) Ist Ω offen, so ist der $H^{m,p}(\Omega)$ separabel für $1 \leq p < \infty, m \geq 0$. Auch dieser Fall lässt sich auf (iv) zurückführen. Beweis siehe Alt [4].

Definition 2.3.6 (Reflexiver Raum).

Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum. Wir definieren den (kanonischen) isometrischen Operator $J_X \in L(X, X'')$ durch

$$\langle J_X(x), x' \rangle := \langle x', x \rangle.$$

Wir nennen den Raum X reflexiv, wenn die Abbildung J_X surjektiv ist.

Bemerkung 2.3.7.

Da J_X eine Isometrie ist gilt

$$\|J_X(x)\|_{X''} = \|x\|_X$$

Also $J_X(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Also ist J_X immer injektiv. Kommt Surjektivität hinzu, wird J_X zu einem isometrischen Isomorphismus. Reflexive Räume sind also isomorph zu ihrem Bidualraum (die Umkehrung gilt i.A. nicht!).

Bemerkung 2.3.8.

Aus dem Riesz'schen Darstellungssatz folgt, dass jeder Hilbertraum reflexiv ist.

Beweis.

Sei X ein Hilbertraum, dann ist wegen dem Riesz'schen Darstellungssatz auch X' ein Hilbertraum mit Skalarprodukt:

$$(x', y')_{X'} := (J^{-1}(x'), J^{-1}(y'))_X,$$

wobei J den isometrischen Isomorphismus aus dem Riesz'schen Darstellungssatz bezeichnet.

Sei nun $F \in X''$ beliebig vorgegeben. Wir suchen ein Urbild aus X unter J_X . Zunächst existiert zu $F \in X''$ mit Hilfe von Riesz ein eindeutiges $f \in X'$ mit

$$F(x') = (x', f)_{X'} \quad \forall x' \in X'.$$

Wir erhalten nun mittels der Definition von J_X und der Definition von $(\cdot, \cdot)_{X'}$:

$$\begin{aligned} F(x') &= (x', f)_{X'} = (J^{-1}(x'), J^{-1}(f))_X \\ &= J(J^{-1}(x'))(J^{-1}(f)) = x'(J^{-1}(f)) = \langle x', J^{-1}(f) \rangle \\ &= \langle J_X(J^{-1}(f)), x' \rangle \quad \forall x' \in X'. \end{aligned}$$

Also $F = J_X(J^{-1}(f))$. Wir haben also das eindeutige Urbild $J^{-1}(f)$ von $F \in X''$ gefunden. Also ist

$$X'' = J_X(X).$$

□

Bemerkung 2.3.9.

Ist Ω offen und $m \in \mathbb{N}$, so ist der Raum $H^{m,p}(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ reflexiv. (Beachte im L^p -Fall die Verbindung zu Satz 2.3.1.)

Definition 2.3.10 (Schwache Konvergenz).

Sei X vollständiger Vektorraum und X' der zugehörige Dualraum.

- (1) Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X heißt schwach konvergent gegen $x \in X$ für $k \rightarrow \infty$ (wir schreiben $x_k \rightharpoonup x$) wenn gilt

$$x'(x_k) \rightarrow x'(x) \quad \text{für alle } x' \in X'.$$

- (2) Eine Folge $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X' heißt schwach-* konvergent gegen $x' \in X'$ für $k \rightarrow \infty$ (wir schreiben $x'_k \xrightarrow{*} x'$) wenn gilt

$$x'_k(x) \rightarrow x'(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Folgerung 2.3.11.

Sei Ω offen. Eine Folge $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ konvergiert schwach in $L^2(\Omega)$ gegen ein $\phi \in L^2(\Omega)$, so bedeutet das:

$$\int_{\Omega} \phi_k(x) f(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \phi(x) f(x) dx \quad \forall f \in L^2(\Omega).$$

Beweis.

Per Definition von schwache Konvergenz muss gelten:

$$\langle F, \phi_k \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle F, \phi \rangle \quad \forall F \in L^2(\Omega)'. \quad \square$$

Nach Bemerkung 2.3.2 existiert aber zu jedem $F \in L^2(\Omega)'$ ein $f \in L^2(\Omega)$, so dass

$$\langle F, \phi_k \rangle = \int_{\Omega} f \phi_k$$

gilt. Da auch die Umkehrung gilt, folgt so die Behauptung. □

Beschränkte Folgen im Dualraum eines separablen Raumes besitzen schwach-* konvergente Teilfolgen:

Satz 2.3.12.

Sei X ein separabler Raum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $\bar{B} := \overline{B_1(0)}^{\|\cdot\|_{X'}} \subset X'$ in X' schwach-* folgenkompakt (d.h. jede Folge in \bar{B} , besitzt eine schwach-* konvergente Teilfolge mit Grenzwert in \bar{B}).

Beschränkte Folgen in reflexiven Räumen besitzen schwach-konvergente Teilfolgen:

Satz 2.3.13.

In jedem reflexiven Raum X ist die abgeschlossene Einheitskugel $\bar{B} := \overline{B_1(0)}^{\|\cdot\|_X} \subset X$ schwach folgenkompakt (d.h. jede Folge in \bar{B} , besitzt eine schwach konvergente Teilfolge mit Grenzwert in \bar{B}).

Beispiel:

Wir betrachten die Folge $f^\epsilon(x) := \sin(\frac{x}{\epsilon})$ auf $I := (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f^\epsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^2(I),$$

aber die Folge konvergiert **nicht** stark in $L^2(I)$, d.h.

$$f^\epsilon \not\rightarrow 0 \quad \text{in } L^2(I).$$

Beweis:

Es gilt

$$\|f^\epsilon\|_{L^2(I)} = \left(\int_0^1 \sin\left(\frac{x}{\epsilon}\right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 1 dx \right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Also $f^\epsilon \in \overline{B_1(0)}^{\|\cdot\|_{L^2}}$. Nach Satz 2.3.13 existiert somit eine Teilfolge ϵ' und ein $f_0 \in L^2(I)$ mit

$$f^{\epsilon'} \rightharpoonup f_0 \quad \text{in } L^2(I).$$

Also für alle $\phi \in \dot{C}^\infty(I) \subset L^2(I)$:

$$\int_0^1 f^\epsilon \phi \rightarrow \int_0^1 f_0 \phi.$$

Andererseits mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f^\epsilon \phi \right| &= \left| \left[-\epsilon \cos\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \phi \right]_0^1 + \int_0^1 \epsilon \cos\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \phi' \right| \\ &= \left| \int_0^1 \epsilon \cos\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \phi' \right| \\ &\leq \epsilon \|\phi'\|_{L^1(I)} \rightarrow 0 = \int_0^1 0 \phi. \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\int_0^1 f_0 \phi = \int_0^1 0 \phi \quad \forall \phi \in \dot{C}^\infty(I)$$

und nach dem Hauptsatz der Variationsrechnung ist also $f_0 = 0$. Da man dieses Resultat für jede beliebige Teilfolge erhält, können wir die anfänglich Folge durch gesamte Folge ersetzen und bekommen:

$$f^\epsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^2(I).$$

Andererseits: angenommen es gilt

$$\|f^\epsilon - 0\|_{L^2(I)} = \|f^\epsilon - 0\|_{L^2(I)} \rightarrow 0.$$

Dann würde eine Teilfolge existieren, die punktweise fast überall gegen Null konvergiert. Das geht jedoch nicht, da f^ϵ bei gleich-groß bleibender Amplitude oszilliert. Das ist ein Widerspruch zur starken Konvergenz. \square

Bemerkung 2.3.14.

Sei X vollständiger Vektorraum. Es gilt

- *Der schwache Grenzwert einer Folge ist eindeutig, denn wenn $x'(x_1) = x'(x_2)$ für alle $x' \in X'$ gilt, muss $x_1 = x_2$ gelten (wähle beliebiges injektives x').*
- *Aus starker Konvergenz folgt schwache Konvergenz, d.h. $x_k \rightarrow x \Rightarrow x_k \rightharpoonup x$.*
- *Schwach und schwach-* konvergente Folgen sind beschränkt.*
- *Konvergiert eine Folge x'_k stark in X' gegen ein x' und konvergiert x_k schwach in X gegen ein x , so konvergiert $x'_k(x_k)$ gegen $x'(x)$.*
- *Konvergiert eine Folge x_k stark in X gegen ein x und konvergiert x'_k schwach-* in X' gegen ein x' , so konvergiert $x'_k(x_k)$ gegen $x'(x)$.*

Folgerung 2.3.15.

Sei Ω offen und $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $H^1(\Omega)$ mit $\|u_k\|_{H^1(\Omega)} \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann existiert eine Teilfolge $(u_{k'})_{k' \in \mathbb{N}}$ und ein $u \in H^1(\Omega)$, so dass gilt

$$u_{k'} \rightharpoonup u \quad \text{in } H^1(\Omega).$$

Beweis.

Der $H^1(\Omega)$ ist ein Hilbertraum und die Folge $(\frac{u_k}{C})_{k \in \mathbb{N}}$ liegt in $\bar{B} := \overline{B_1(0)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}$. Also existiert ein $\tilde{u} \in \bar{B}$ mit

$$\frac{u_k}{C} \rightharpoonup \tilde{u} \quad \text{in } H^1(\Omega).$$

Also $u = C\tilde{u}$. □

Satz 2.3.16 (Rellich'scher Einbettungssatz).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit Lipschitz-Rand. Sei weiter $1 \leq p < \infty$ und $m \geq 1$. Ist $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $H^{m,p}(\Omega)$ und sei $u \in H^{m,p}(\Omega)$ mit $u_k \rightharpoonup u$ in $H^{m,p}(\Omega)$, so gilt:

$$u_k \rightarrow u \quad \text{in } H^{m-1,p}(\Omega).$$

Bemerkung 2.3.17.

Ersetzen wir in Satz 2.3.16 $H^{m,p}(\Omega)$ und $H^{m-1,p}(\Omega)$ durch die Räume $\dot{H}^{m,p}(\Omega)$ und $\dot{H}^{m-1,p}(\Omega)$, so können wir auf den Lipschitzrand als Annahme verzichten.

Folgerung 2.3.18.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\dot{H}^1(\Omega)$. Dann existiert eine Teilfolge $(u_{k'})_{k' \in \mathbb{N}}$ und ein $u \in \dot{H}^1(\Omega)$, so dass gilt:

$$u_{k'} \rightharpoonup u \quad \text{in } \dot{H}^1(\Omega) \quad \text{und} \quad u_{k'} \rightarrow u \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung für das Sinus-Beispiel von oben:

Satz 2.3.19.

Sei $Y = (0, 1)^n$, $a \in L^\infty_\sharp(Y)$ (siehe Definition 2.2.3) und

$$a_\epsilon(x) := a\left(\frac{x}{\epsilon}\right),$$

dann gilt

$$a_\epsilon \rightharpoonup \int_Y a(y) dy \text{ schwach-} * \text{ in } L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Beachte: wir identifizieren hier den $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit dem Raum $L^1(\mathbb{R}^n)'$, um von schwach-* Konvergenz sprechen zu können.

Satz 2.3.20.

Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, $Y = (0, 1)$, $f \in L^2(a, b)$, $A \in M(\alpha, \beta, (a, b), Y)$ (siehe Definition 2.2.4), $0 < \alpha \leq \beta$, $A(x, y) = A(y)$ und

$$A^\epsilon(x) := A\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Dann gilt, dass die Lösung $u^\epsilon \in \dot{H}^1(a, b)$ von

$$\int_a^b A^\epsilon(x) (u^\epsilon)'(x) \Phi'(x) dx = \int_a^b f(x) \Phi(x) dx \quad \forall \Phi \in \dot{H}^1(a, b)$$

schwach in $\dot{H}^1(a, b)$ gegen ein $u_0 \in \dot{H}^1(a, b)$ konvergiert, welches die eindeutige Lösung des homogenisierten Problems ist:

$$\int_a^b \left(\int_0^1 A(y)^{-1} dy \right)^{-1} u_0'(x) \Phi'(x) dx = \int_a^b f(x) \Phi(x) dx \quad \forall \Phi \in \dot{H}^1(a, b).$$

Beweis.

Sei C_p die Konstante aus der Poincaré-Ungleichung. Zunächst gilt sofort die folgende Abschätzung:

$$|u^\epsilon|_{H^1(a, b)} \leq \frac{C_p}{\alpha} \|f\|_{L^2(a, b)}.$$

Da $|\cdot|_{H^1(a, b)}$ eine Norm auf dem Hilbertraum $\dot{H}^1(a, b)$ ist, erhalten wir mit Hilfe von Folgerung 2.3.15 die Existenz einer Teilfolge von u^ϵ (zur Einfachheit immer

noch mit u^ϵ bezeichnet) und ein $u_0 \in \mathring{H}^1(a, b)$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} u^\epsilon &\rightharpoonup u_0 \quad \text{in } L^2(a, b), \\ (u^\epsilon)' &\rightharpoonup (u_0)' \quad \text{in } L^2(a, b). \end{aligned}$$

Definiere

$$\xi^\epsilon := A^\epsilon (u^\epsilon)',$$

dann gilt:

$$\|\xi^\epsilon\|_{L^2(a,b)} = \|A^\epsilon (u^\epsilon)'\|_{L^2(a,b)} \leq \beta \|(u^\epsilon)'\|_{L^2(a,b)} \leq C_p \frac{\beta}{\alpha} \|f\|_{L^2(a,b)}.$$

Also erhalten wir auch wieder mit Hilfe von Satz 2.3.13 die Existenz eines $\xi_0 \in L^2(a, b)$, so dass:

$$\xi^\epsilon \rightharpoonup \xi_0 \quad \text{in } L^2(a, b).$$

D.h. insbesondere:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \Phi(x) dx &= \int_a^b A^\epsilon(x) (u^\epsilon)'(x) \Phi'(x) dx \\ &= \int_a^b \xi^\epsilon(x) \Phi'(x) dx \rightarrow \int_a^b \xi_0(x) \Phi'(x) dx. \end{aligned}$$

Also

$$\int_a^b f(x) \Phi(x) dx = \int_a^b \xi_0(x) \Phi'(x) dx \quad \forall \Phi \in \mathring{C}^\infty(a, b).$$

Per Definition erhalten wir somit, dass ξ_0 schwach ableitbar ist, mit schwacher Ableitung $\xi_0' = -f$. Mit dem selben Argument ist auch ξ^ϵ schwach ableitbar mit schwacher Ableitung $-f$. Also:

$$\|\xi^\epsilon\|_{L^2(a,b)} + \|(\xi^\epsilon)'\|_{L^2(a,b)} \leq \left(C_p \frac{\beta}{\alpha} + 1 \right) \|f\|_{L^2(a,b)}.$$

Somit ist ξ^ϵ in $H^1(a, b)$ beschränkt und konvergiert in $H^1(a, b)$ gegen ξ_0 . Der Satz von Rellich liefert uns nun, dass ξ^ϵ sogar stark in $L^2(a, b)$ gegen ξ_0 konvergieren muss. Als nächstes stellen wir eine Relation zwischen ξ_0 und u_0 her.

Per Definition gilt $(u^\epsilon)' = \frac{1}{A^\epsilon} \xi^\epsilon$. Das ist wohldefiniert, da $A^\epsilon > 0$. Außerdem gilt:

$$0 < \frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{A^\epsilon} \leq \frac{1}{\alpha} < \infty.$$

Also ist $\frac{1}{A^\epsilon} \in L^\infty_\#(Y)$ und damit Satz 2.3.19 anwendbar. Wir erhalten:

$$\frac{1}{A^\epsilon} \rightharpoonup \int_Y \frac{1}{A(y)} dy \text{ schwach-} * \text{ in } L^\infty(a, b).$$

Dank Bemerkung 2.3.14 können wir also im Produkt der stark konvergenten Folge ξ^ϵ und der schwach-* konvergenten Folge $\frac{1}{A^\epsilon}$ zum Grenzwert übergehen und erhalten

$$\int_a^b \frac{1}{A^\epsilon} \xi^\epsilon \Phi \rightarrow \int_a^b \int_Y \frac{1}{A(y)} dy \xi_0 \Phi \quad \forall \Phi \in L^2(\Omega).$$

Beachte: wir nutzen hier eigentlich, dass $(\xi^\epsilon \Phi) \in L^1(a, b)$ stark in $L^1(a, b)$ konvergiert. Also:

$$(u^\epsilon)' = \frac{1}{A^\epsilon} \xi^\epsilon \rightharpoonup \int_Y \frac{1}{A(y)} dy \xi_0 \text{ in } L^2(\Omega).$$

Da aber $(u^\epsilon)'$ auch schwach gegen u'_0 konvergiert, folgt aus der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwerts die Relation

$$u'_0 = \int_Y \frac{1}{A(y)} dy \xi_0.$$

Insgesamt gilt also für alle $\Phi \in \dot{H}^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \Phi(x) dx &= \int_a^b A^\epsilon(x) (u^\epsilon)'(x) \Phi(x) dx \\ &= \int_a^b \xi^\epsilon(x) \Phi'(x) dx \\ &\rightarrow \int_a^b \xi_0(x) \Phi'(x) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_Y \frac{1}{A(y)} dy \right)^{-1} u'_0(x) \Phi'(x) dx. \end{aligned}$$

□

Als letzte Vorbereitung zum Zugang der 2-Skalen-Konvergenz, führen wir noch die sogenannten Bochner-Räume ein:

Definition 2.3.21 (Bochner-Räume).

Sei $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen und $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum. Dann definieren wir den Bochner-Raum $L^p(\Omega, X)$ durch

$$L^p(\Omega, X) := \{\phi : \Omega \rightarrow X \mid \phi \text{ ist messbar und } \|\phi(x)\|_X \in L^p(\Omega)\}.$$

Dabei definiert für $1 \leq p < \infty$

$$\|\phi\|_{L^p(\Omega, X)} := \left(\int_{\Omega} \|\phi(x)\|_X^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm auf $L^p(\Omega, X)$, wodurch dieser zu einem Banachraum wird. Für den Spezialfall $X = H^m(Y)$, definieren wir:

$$\begin{aligned} |\Phi|_{L^2(\Omega, H^m(Y))} &:= \left(\int_{\Omega} |\Phi(x, \cdot)|_{H^m(Y)}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ und} \\ \|\Phi\|_{L^2(\Omega, H^m(Y))} &:= \left(\int_{\Omega} \|\Phi(x, \cdot)\|_{H^m(Y)}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Desweiteren verwenden wir die folgende Notation für $f \in L^p(\Omega, X)$:

$$f(x, y) := (f(x))(y).$$

Bemerkung 2.3.22.

Sei X ein Banachraum und Ω offen und beschränkt, dann gilt:

1. Ist X reflexiv und $1 < p < \infty$, so ist auch $L^p(\Omega, X)$ reflexiv.
2. Ist X separabel und $1 \leq p < \infty$, so ist auch $L^p(\Omega, X)$ separabel.
3. Sei $Y = (0, 1)^n$, dann liegt $L^2(\Omega, C_{\sharp}^0(Y))$ dicht in $L^2(\Omega \times Y)$.

Für einen Beweis der Bemerkung siehe z.B. [5], Proposition 3.55 und Proposition 3.61.

Definition 2.3.23.

Für $Y = (0, 1)^n$ ist der Raum $\mathring{C}^\infty(\Omega, C_\#^\infty(Y))$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathring{C}^\infty(\Omega, C_\#^\infty(Y)) := \{ & \phi : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid \phi \text{ ist messbar,} \\ & \phi(x, \cdot) \in C_\#^\infty(Y) \quad \forall x \in \Omega \text{ und} \\ & x \in \Omega \mapsto \phi(x, \cdot) \in C_\#^\infty(Y) \text{ ist unendlich oft Fréchet} \\ & \text{differenzierbar mit kompaktem Träger in } \Omega \}. \end{aligned}$$

2.4 2-Skalen-Konvergenz

Der nachfolgende Abschnitt zur Zwei-Skalen-Konvergenz beruht inhaltlich im Wesentlichen auf den Arbeiten von Allaire [3] und Lukkassen et al. [20]. Im Folgenden gehen wir davon aus, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stets offen und beschränkt ist.

2.4.1 Homogenisierung mittels 2-Skalen-Konvergenz

Definition 2.4.1 (2-Skalen-Konvergenz).

Eine Folge $u^\epsilon \in L^2(\Omega)$ heißt 2-Skalen-konvergent gegen ein $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$, wenn für alle $\phi \in L^2(\Omega, C_\#^0(Y))$ gilt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\epsilon(x) \phi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \phi(x, y) dy dx.$$

Bemerkung 2.4.2.

Der 2-Skalen-Grenzwert ist eindeutig.

Beweis.

Angenommen wir hätten zwei Grenzwerte u_0 und v_0 . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^{\epsilon}(x) \phi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx &= \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \phi(x, y) dy dx, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^{\epsilon}(x) \phi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx &= \int_{\Omega} \int_Y v_0(x, y) \phi(x, y) dy dx,\end{aligned}$$

für alle $\phi \in L^2(\Omega, C^0_{\#}(Y))$. Also

$$\int_{\Omega} \int_Y (u_0(x, y) - v_0(x, y)) \phi(x, y) dy dx = 0.$$

Nach dem Fundamentalsatz der Variationsrechnung gilt also $u_0 - v_0 = 0$ fast überall. \square

Beispiel 2.4.3. *Beispiele für 2-Skalen-Grenzwerte:*

(i) Sei $a \in C^0(\Omega \times Y)$, $a(x, \cdot)$ Y -periodisch und $a^{\epsilon}(x) := a(x, \frac{x}{\epsilon})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}a^{\epsilon} &\xrightarrow{2Sk.} a \quad \text{und} \\ a^{\epsilon} &\rightharpoonup \int_Y a(\cdot, y) dy \quad \text{in } L^2(\Omega).\end{aligned}$$

(ii) Gilt $u^{\epsilon} \rightarrow u_0$ stark in $L^2(\Omega)$, so gilt auch $u^{\epsilon} \xrightarrow{2Sk.} u_0$.

(iii) Hat u^{ϵ} eine asymptotische Entwicklung der Form

$$u^{\epsilon}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i u_i(x, \frac{x}{\epsilon})$$

mit Y -periodischen Funktionen $u_i \in C^0(\Omega \times Y)$, so gilt $u^{\epsilon} \xrightarrow{2Sk.} u_0$.

Es ergeben sich zwei Fragen:

1. Unter welchen Voraussetzungen ist eine Folge 2-Skalen-konvergent?
2. Wie stark ist der 2-Skalen Grenzwert? Impliziert er allgemein schwache Konvergenz oder sogar starke Konvergenz?

Die erste Frage wird durch den folgenden Satz beantwortet:

Satz 2.4.4 (2-Skalen Kompaktheit).

Sei $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ eine beschränkte Folge in $L^2(\Omega)$, dann existiert eine Teilfolge und ein $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$, so dass diese Teilfolge 2-Skalen-konvergent gegen u_0 ist.

Das folgende Lemma garantiert uns insbesondere, dass die 2-Skalen-Konvergenz wohldefiniert ist, denn es besagt, dass $\phi(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})$ messbar ist, wenn ϕ aus $L^2(\Omega, C_\#^0(Y))$ stammt. Diese Aussage ist nicht trivial.

Lemma 2.4.5.

Sei $\phi \in L^2(\Omega, C_\#^0(Y))$, dann ist $\phi(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})$ messbar für alle $\epsilon > 0$ und es gilt:

$$(i) \quad \|\phi(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\phi\|_{L^2(\Omega, C_\#^0(Y))},$$

$$(ii) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\phi(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})\|_{L^2(\Omega)} = \|\phi\|_{L^2(\Omega \times Y)}.$$

Da der Beweis dieses Lemmas etwas komplexer ist, verschieben wir ihn auf Abschnitt 2.4.2 und kommen dort darauf zurück.

Definition 2.4.6 (Zulässige Testfunktion).

Eine messbare Funktion $\phi(x, y)$, Y -periodisch, die (ii) erfüllt, heißt zulässige Testfunktion. Das gilt z.B. für $\phi \in C^0(\bar{\Omega}, C_\#^0(Y))$.

Beweis von Satz 2.4.4.

Sei $B := L^2(\Omega, C_\#^0(Y))$, $\phi \in B$ beliebig und $(u^\epsilon)_{\epsilon>0} \subset L^2(\Omega)$ eine Folge mit

$$\|u^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

Dann gilt mit Lemma 2.4.5:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u^\epsilon(x) \phi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx \right| &\stackrel{C.S.}{\leq} \left(\int_{\Omega} |u^\epsilon(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\phi(x, \frac{x}{\epsilon})|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|\phi\|_B. \end{aligned}$$

Definieren wir also die Linearform $F^\epsilon : B \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F^\epsilon(\phi) := \int_{\Omega} u^\epsilon(x) \phi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx$$

so gilt $|F^\epsilon(\phi)| \leq C \|\phi\|_B$ (d.h. F^ϵ ist stetig). Für festes ϵ ist F^ϵ also linear und stetig auf B und damit $F^\epsilon \in B'$. Die Folge $(F^\epsilon)_{\epsilon>0}$ ist uniform beschränkt in B' , denn

$$\|F^\epsilon\|_{B'} = \sup_{\phi \in B, \phi \neq 0} \frac{|F^\epsilon(\phi)|}{\|\phi\|_B} \leq C.$$

Da der Raum $C_{\#}^0(Y)$ separabel ist, ist nach Bemerkung 2.3.22 (ii) auch $B = L^2(\Omega, C_{\#}^0(Y))$ separabel. Nach Satz 2.3.12 existiert also eine schwach-* konvergente Teilfolge $F^{\epsilon'}$ mit Grenzwert $F_0 \in B'$, d.h.:

$$F^{\epsilon'} \xrightarrow{*} F_0 \text{ in } B'$$

Mit Hilfe von Lemma 2.4.5 erhalten wir somit für alle $\phi \in B$:

$$\begin{aligned} |F_0(\phi)| &\leftarrow |F^{\epsilon'}(\phi)| \leq \|u^{\epsilon'}\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\phi(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon'})\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|\phi(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon'})\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow C \|\phi\|_{L^2(\Omega \times Y)}. \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 2.3.22 liegt nun B dicht in $L^2(\Omega \times Y)$. Wir wählen nun für $\Phi \in L^2(\Omega \times Y)$ eine Folge $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset B$, die stark in $L^2(\Omega \times Y)$ gegen Φ konvergiert. Wir definieren

$$\tilde{F}_0(\Phi) := \lim_{k \rightarrow \infty} F_0(\phi_k)$$

und erhalten

$$|\tilde{F}_0(\Phi)| \leftarrow |F_0(\phi_k)| \leq C \|\phi_k\|_{L^2(\Omega \times Y)} \rightarrow C \|\Phi\|_{L^2(\Omega \times Y)}.$$

F_0 lässt sich also zu einem stetigen, linearen Funktional \tilde{F}_0 auf $L^2(\Omega \times Y)$ fortsetzen. Demnach gilt mittels Satz 2.3.1

$$\tilde{F}_0 \in L^2(\Omega \times Y)' \simeq L^2(\Omega \times Y)$$

und \tilde{F}_0 besitzt einen eindeutigen Repräsentanten $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ mit:

$$\tilde{F}_0(\Phi) = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \Phi(x, y) dy dx \quad \forall \Phi \in L^2(\Omega \times Y).$$

Also für beliebiges $\phi \in B$:

$$\int_{\Omega} u^{\epsilon'}(x) \phi(x, \frac{x}{\epsilon'}) dx = F^{\epsilon'}(\phi) \rightarrow F_0(\phi) = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \Phi(x, y) dy dx.$$

□

Die zweite Frage nach der Stärke des 2-Skalen-Grenzwerts beantwortet der folgende Satz:

Satz 2.4.7 (2-Skalen-Konvergenz liefert Schwache Konvergenz).

Sei $(u^\epsilon)_{\epsilon>0} \subset L^2(\Omega)$ eine Folge mit

$$u^\epsilon \xrightarrow{2Sk.} u_0, \quad u_0 \in L^2(\Omega \times Y).$$

Dann konvergiert u^ϵ schwach in $L^2(\Omega)$ gegen $u := \int_Y u_0(\cdot, y) dy$ und es gilt

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \|u^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \geq \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)} \geq \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Bemerkung 2.4.8.

Der 2-Skalen-Grenzwert enthält zusätzlich zum schwachen Grenzwert Informationen über die Oszillationen, die in 'Resonanz' mit der Testfunktion sind.

Die Implikation 'aus starker Konvergenz folgt 2-Skalen-Konvergenz' wurde bereits in Beispiel 2.4.3 erwähnt. Satz 2.4.7 liefert nun gerade, dass 2-Skalen-Konvergenz wiederum schwache Konvergenz impliziert. Teil zwei von Satz 2.4.7 lässt sich wie folgt interpretieren. Der Zwei-Skalen Grenzwert enthält mehr Informationen über die Oszillationen der Folge u_ϵ als der Schwache Grenzwert, jedoch im Allgemeinen nicht so viele Informationen wie die Folge u_ϵ selbst.

Beweis von Satz 2.4.7.

1. Sei $\phi \in L^2(\Omega)$, dann gilt für $\tilde{\phi}(x, y) := \phi(x)$ auch $\tilde{\phi} \in L^2(\Omega, C_\#^0(Y))$. $\tilde{\phi}$ (bzw. ϕ) ist also zulässige Testfunktion in der Def. der 2-Skalen Konvergenz. Sei $u^\epsilon \xrightarrow{2Sk.} u_0$, dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^\epsilon(x) \phi(x) dx &= \int_{\Omega} u^\epsilon(x) \tilde{\phi}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) dx \\ &\rightarrow \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \tilde{\phi}(x, y) dy dx \\ &= \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \phi(x) dy dx = \int_{\Omega} \left(\int_Y u_0(x, y) dy \right) \phi(x) dx \end{aligned}$$

Also $u^\epsilon \rightharpoonup u$ in $L^2(\Omega)$.

2. Sei nun $\phi \in L^2(\Omega, C_\#^0(Y))$, so gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} |u^\epsilon(x) - \phi(x, \frac{x}{\epsilon})|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |u^\epsilon(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\phi(x, \frac{x}{\epsilon})|^2 dx - 2 \int_{\Omega} u^\epsilon(x) \phi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx \end{aligned}$$

Also mit Hilfe der Definition von 2-Skalen-Konvergenz und Lemma 2.4.5:

$$\begin{aligned} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u^\epsilon(x)|^2 dx &\geq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left(2 \int_{\Omega} u^\epsilon(x) \phi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx - \int_{\Omega} |\phi(x, \frac{x}{\epsilon})|^2 dx \right) \\ &= 2 \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \phi(x, y) dx dy - \int_{\Omega} \int_Y \phi(x, y)^2 dx dy. \end{aligned}$$

Wählen wir nun eine glatte Folge $\Psi_n(x, y)$, so dass Ψ_n stark in $L^2(\Omega \times Y)$ gegen u_0 konvergiert (das geht nach Bemerkung 2.3.22), so folgt für $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u^\epsilon(x)|^2 dx &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \Psi_n(x, y) dx dy - \int_{\Omega} \int_Y \Psi_n(x, y)^2 dx dy \\ &= \int_{\Omega} \int_Y (u_0(x, y))^2 dx dy. \end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung folgt direkt mit Cauchy-Schwarz. \square

Folgerung 2.4.9.

Sei $(u^\epsilon)_{\epsilon > 0} \subset L^2(\Omega)$ eine 2-Skalen-konvergente Folge, dann ist u^ϵ in $L^2(\Omega)$ beschränkt.

Beweis.

Ist $(u^\epsilon)_{\epsilon > 0} \subset L^2(\Omega)$ eine 2-Skalen-konvergente Folge, dann ist sie nach Satz 2.4.7 auch schwach konvergent in $L^2(\Omega)$. Nach Bemerkung 2.3.14 sind schwach konvergente Folgen beschränkt. Also ist $\|u^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}$ beschränkt, unabhängig von ϵ . \square

Wir kommen nun zur starken 2-Skalen-Konvergenz:

Satz 2.4.10 (Starke 2-Skalen-Konvergenz).

Sei $(u^\epsilon)_{\epsilon>0} \subset L^2(\Omega)$ eine Folge mit 2-Skalen-Limes $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ und es gelte:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)}$$

(d.h. anschaulich enthält u_0 alle Oszillationen der Folge u^ϵ).

Dann gilt für jede Folge v_ϵ in $L^2(\Omega)$, die im Zwei-Skalen Sinne gegen ein $z_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ konvergiert und für alle $\phi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\epsilon(x) v_\epsilon(x) \phi(x) \, dx = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) z_0(x, y) \phi(x) \, dy \, dx.$$

Wenn zusätzlich $u_0 \in L^2(\Omega, C_\#^0(Y))$, so erhalten wir:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u^\epsilon(\cdot) - u_0(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})\|_{L^2(\Omega)} = 0. \quad (2.4.1)$$

Vergleichen wir die Aussage des Satzes beispielsweise mit dem folgenden Resultat, so können wir anschaulich von einer 'starken 2-Skalen-Konvergenz' sprechen:

Bemerkung 2.4.11.

Wenn eine Folge u^ϵ in $L^2(\Omega)$ schwach gegen ein u konvergiert und wenn $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)}$, dann gilt bereits:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u^\epsilon - u\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Bemerkung 2.4.12.

- Ist ϕ zulässige Testfunktion, so ist für $\phi(x, \frac{x}{\epsilon})$ die Bedingung aus Satz 2.4.10 erfüllt.
- Wir nennen eine Folge stark 2-Skalen-konvergent wenn die erste Aussage aus Satz 2.4.10 gilt.

- (2.4.1) sagt aus, dass wir schreiben dürfen

$$u^\epsilon(x) = u_0(x, \frac{x}{\epsilon}) + R^\epsilon(x)$$

mit $R^\epsilon \rightarrow 0$ stark in $L^2(\Omega)$.

Beweis von Satz 2.4.10.

zu (ii): Sei $u_0 \in L^2(\Omega, C_\#^0(Y))$. Wähle $\phi = u_0$, so folgt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u^\epsilon(x) - u_0(x, \frac{x}{\epsilon})|^2 dx \stackrel{\text{Vor.}}{=} \int_{\Omega} \int_Y |u_0(x, y) - u_0(x, y)|^2 dx dy = 0.$$

zu (i): Wähle Folge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\Omega, C_\#^0(Y))$, die stark in $L^2(\Omega \times Y)$ gegen u_0 konvergiert. Sei $\Phi \in \dot{C}^\infty(\Omega)$. Dann ist $\Phi(x)\phi_n(x, \frac{x}{\epsilon})$ zulässige Testfunktion, um für v^ϵ zum 2-Skalen-Grenzwert überzugehen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Phi(x) u^\epsilon(x) v^\epsilon(x) dx - \int_{\Omega} \int_Y \Phi(x) \phi_n(x, y) v_0(x, y) dy dx \right| \\ &= \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Phi(x) \left(u^\epsilon(x) v^\epsilon(x) - \int_Y \phi_n(x, y) v_0(x, y) dy \right) dx \right| \\ &= \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Phi(x) \left(u^\epsilon(x) v^\epsilon(x) - \phi_n(x, \frac{x}{\epsilon}) v^\epsilon(x) \right) dx \right| \\ &= \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Phi(x) \left(u^\epsilon(x) - \phi_n(x, \frac{x}{\epsilon}) \right) v^\epsilon(x) dx \right| \\ &\leq \|\Phi\|_{C^0(\Omega)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\|u^\epsilon - \phi_n(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})\|_{L^2(\Omega)} \|v^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u^\epsilon - \phi_n(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir Folgerung 2.4.9 genutzt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Phi(x) u^\epsilon(x) v^\epsilon(x) dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_Y \Phi(x) \phi_n(x, y) v_0(x, y) dy dx \right| \\ &\leq C \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u^\epsilon - \phi_n(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})\|_{L^2(\Omega)} \\ &= C \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_0 - \phi_n\|_{L^2(\Omega \times Y)} = 0. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Phi(x) u^{\epsilon}(x) v^{\epsilon}(x) dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_Y \Phi(x) \phi_n(x, y) v_0(x, y) dy dx \\
 &= \int_{\Omega} \int_Y \Phi(x) u_0(x, y) v_0(x, y) dy dx.
 \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.4.13.

Jede Funktion $v_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ kann als 2-Skalen-Grenzwert angenommen werden.

Beweis siehe Allaire [3].

Satz 2.4.14 (Kompaktheit in $H^1(\Omega)$).

Sei $(u^{\epsilon})_{\epsilon > 0}$ eine beschränkte Folge in $H^1(\Omega)$. Dann existiert eine Teilfolge $(u^{\epsilon'})_{\epsilon' > 0}$, ein $u_0 \in H^1(\Omega)$ und ein $u_1 \in L^2(\Omega, \tilde{H}_{\sharp}^1(Y))$ mit

$$(i) \quad u^{\epsilon'} \rightharpoonup u_0 \text{ in } H^1(\Omega),$$

$$(ii) \quad \nabla u^{\epsilon'} \xrightarrow{2\text{-Sk.}} \nabla_x u_0 + \nabla_y u_1.$$

Beweis.

Sei $\Psi \in \mathring{C}^{\infty}(\Omega, C_{\sharp}^{\infty}(Y)) \subset L^2(\Omega, C_{\sharp}^{\infty}(Y))$.

Schritt 1: Wir nutzen einerseits die Beschränktheit von u^{ϵ} in $H^1(\Omega)$, die uns die Existenz eines $u_0 \in H^1(\Omega)$ liefert, so dass bis auf Teilfolgen gilt: $u^{\epsilon} \rightharpoonup u_0$ in $H^1(\Omega)$ (insbesondere damit auch in L^2). Andererseits nutzen wir die Kompaktheit in $L^2(\Omega)$ und erhalten mit Satz 2.4.4 die Existenz von $v_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ und $\xi_0 \in [L^2(\Omega \times Y)]^n$, so dass bis auf eine Teilfolge gilt:

$$u^{\epsilon'} \xrightarrow{2\text{-Sk.}} v_0 \quad \text{und} \quad \nabla u^{\epsilon'} \xrightarrow{2\text{-Sk.}} \xi_0.$$

Schritt 2:

$$-\epsilon \int_{\Omega} \nabla u^{\epsilon}(x) \cdot \Psi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx = \epsilon \int_{\Omega} u^{\epsilon}(x) \nabla_x \cdot \Psi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx + \int_{\Omega} u^{\epsilon}(x) \nabla_y \cdot \Psi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx.$$

Nun gilt

$$-\epsilon \int_{\Omega} \nabla u^{\epsilon}(x) \cdot \Psi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx \rightarrow 0,$$

da $\nabla u^{\epsilon} \xrightarrow{2\text{-Sk.}} \xi_0$,

$$\epsilon \int_{\Omega} u^{\epsilon}(x) \nabla_x \cdot \Psi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx \rightarrow 0,$$

da $u^{\epsilon} \xrightarrow{2\text{-Sk.}} v_0$ und da $\nabla_x \cdot \Psi$ zulässige Testfunktion ist, und

$$\int_{\Omega} u^{\epsilon}(x) \nabla_y \cdot \Psi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx \rightarrow \int_{\Omega} \int_Y v_0(x, y) \nabla_y \cdot \Psi(x, y) dy dx.$$

Also mit $\Psi(x, y) = \Phi(x)\phi(y)$, $\Phi \in \mathring{C}^{\infty}(\Omega)$, $\phi \in [C_{\#}^{\infty}(Y)]^n$ erhalten wir

$$\int_{\Omega} \int_Y v_0(x, y) \nabla_y \cdot \Psi(x, y) dy dx = 0,$$

beziehungsweise

$$\int_Y v_0(x, y) \nabla_y \cdot \phi(y) dy = 0 \text{ f.ü. in } \Omega.$$

Also $\nabla_y v_0(x, y) = 0$ f.ü. in $\Omega \times Y$ (dazu wählen wir ϕ mit kompaktem Support in Y und verwenden den Satz von Gauß). Also ist $v_0(x, y)$ unabhängig von y . Auf der einen Seite ist $v_0 = \int_Y v_0(\cdot, y)$ schwacher L^2 Grenzwert von u^{ϵ} , auf der anderen Seite ist dieser aber auch durch u_0 gegeben. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwerts gilt, dass u^{ϵ} sowohl schwach in H^1 , als auch im 2-Skalen-Sinne gegen u_0 konvergiert.

Schritt 3: Gelte nun $\nabla_y \cdot \Psi(x, y) = 0$, so gilt durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \int_Y \xi_0(x, y) \Psi(x, y) dy dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla u^{\epsilon}(x) \Psi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx \\
 &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^{\epsilon}(x) \left(\nabla_x \cdot \Psi(x, \frac{x}{\epsilon}) + \frac{1}{\epsilon} \nabla_y \cdot \Psi(x, \frac{x}{\epsilon}) \right) dx \\
 &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^{\epsilon}(x) \nabla_x \cdot \Psi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx \\
 &= - \int_{\Omega} \int_Y v_0(x, y) \nabla_x \cdot \Psi(x, y) dy dx \\
 &= \int_{\Omega} \int_Y \nabla_x u_0(x) \cdot \Psi(x, y) dy dx.
 \end{aligned}$$

Es gilt also für jede Testfunktion $\Psi \in [C^{\infty}(\Omega, C^{\infty}_\#(Y))]^n$ mit $\nabla_y \cdot \Psi(x, y) = 0$, dass gilt:

$$\int_{\Omega} \int_Y (\xi_0(x, y) - \nabla_x u_0(x)) \Psi(x, y) dy dx = 0.$$

Die Helmholtz-Zerlegung besagt nun, dass das Orthogonale Komplement der divergenzfreien Funktionen gerade die Gradienten sind. Also ist $\xi_0(x, y) - \nabla_x u_0(x)$ der Gradient (in y -Richtung) einer Funktion $u_1 \in L^2(\Omega, H^1_\#(Y))$. $u_1(x, \cdot)$ ist eindeutig bis auf eine additive Konstante. Wir wählen der Repräsentanten mit Mittelwert 0 (d.h. $u_1 \in L^2(\Omega, \tilde{H}^1_\#(Y))$). Wir haben also insgesamt:

$$\nabla_y u_1(x, y) = \xi_0(x, y) - \nabla_x u_0(x) \quad \text{bzw.} \quad \xi_0(x, y) = \nabla_x u_0 + \nabla_y u_1(x, y).$$

Das beweist den Satz. □

Definition 2.4.15.

Wir definieren die elliptische 2-Skalen-Bilinearform

$$\mathcal{B} : \left[\dot{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega, H^1_\#(Y)) \right] \times \left[\dot{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega, H^1_\#(Y)) \right] \rightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{B}((U, u), (\Phi, \phi)) \\
 &:= \int_{\Omega} \int_Y A(x, y) (\nabla_x U(x) + \nabla_y u(x, y)) \cdot (\nabla_x \Phi(x) + \nabla_y \phi(x, y)) dy dx.
 \end{aligned}$$

Satz 2.4.16 (Homogenisierung für elliptische Probleme).

Sei $A \in M(\alpha, \beta, \Omega, Y)$, $A^\epsilon(x) := A(x, \frac{x}{\epsilon})$ messbar und

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} a_{ij}(x, \frac{x}{\epsilon})^2 dx = \int_{\Omega} \int_Y a_{ij}(x, y)^2 dy dx \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

(z.B. $A \in [L^\infty(\Omega, C_\#^0(Y))]^{n \times n}$). Sei weiter $u^\epsilon \in \dot{H}^1(\Omega)$ schwache Lösung von

$$\int_{\Omega} A^\epsilon(x) \nabla u^\epsilon(x) \cdot \nabla \Phi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \Phi(x) dx \quad \forall \Phi \in \dot{H}^1(\Omega). \quad (2.4.2)$$

Dann konvergiert u^ϵ schwach in $\dot{H}^1(\Omega)$ gegen ein $u_0 \in \dot{H}^1(\Omega)$. Dabei ist das Tupel $(u_0, u_1) \in \dot{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega, \tilde{H}_\#^1(Y))$ die eindeutige Lösung des folgenden 2-Skalen homogenisierten Problems:

$$\mathcal{B}((u_0, u_1), (\Phi, \phi)) = \int_{\Omega} f(x) \Phi(x) dx$$

für alle $(\Phi, \phi) \in \dot{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega, \tilde{H}_\#^1(Y))$.

Beweis.

Schritt 1: Nach dem Satz von Lax-Milgram existiert zunächst für jedes feste ϵ eine eindeutige Lösung $u^\epsilon \in \dot{H}^1(\Omega)$. Außerdem gilt mit der Poincaré-Ungleichung:

$$\alpha \|u^\epsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \alpha |u^\epsilon|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u^\epsilon \cdot \nabla u^\epsilon = C \int_{\Omega} f u^\epsilon \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u^\epsilon\|_{H^1(\Omega)}.$$

Also $\|u^\epsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C(A, f)$. $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ ist damit eine beschränkte Folge in $H^1(\Omega)$ und wir können Satz 2.4.14 anwenden, der uns liefert, dass u^ϵ (bis auf eine Teilfolge) schwach in $H^1(\Omega)$ gegen ein $u_0 \in H^1(\Omega)$ konvergiert und $\nabla u^{\epsilon'} \xrightarrow{2\text{-Sk.}} \nabla_x u_0 + \nabla_y u_1$, wobei $u_1 \in L^2(\Omega, \tilde{H}_\#^1(Y))$. Beachte: wir haben sogar $u_0 \in \dot{H}^1(\Omega)$, da der $\dot{H}^1(\Omega)$ als Hilbertraum schwach-folgenabgeschlossen ist.

Schritt 2: Sei nun $(\Phi, \phi) \in \dot{C}^\infty(\Omega) \times \dot{C}^\infty(\Omega, C_\#^\infty(Y))$. Dann konvergiert

$$A^T(x, \frac{x}{\epsilon}) \left(\nabla_x \Phi(x) + \nabla_y \phi(x, \frac{x}{\epsilon}) \right)$$

stark im 2-Skalen Sinne gegen

$$A^T(x, y) (\nabla_x \Phi(x) + \nabla_y \phi(x, y)),$$

denn wir haben einerseits

$$A^T(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}) \left(\nabla_x \Phi + \nabla_y \phi(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}) \right) \in L^2(\Omega)$$

(da A^ϵ beschränkt ist) und andererseits

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} a_{ij}(x, \frac{x}{\epsilon})^2 dx = \int_{\Omega} \int_Y a_{ij}(x, y)^2 dy dx,$$

also auch

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left| A^T(x, \frac{x}{\epsilon}) \left(\nabla_x \Phi(x) + \nabla_y \phi(x, \frac{x}{\epsilon}) \right) \right|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \int_Y |A^T(x, y) (\nabla_x \Phi(x) + \nabla_y \phi(x, y))|^2 dy dx. \end{aligned}$$

Es lässt sich somit Satz 2.4.10 anwenden, der uns gerade die starke 2-Skalen-Konvergenz liefert.

Schritt 3: Wir testen nun mit

$$\Phi^\epsilon(x) := \Phi(x) + \epsilon \phi(x, \frac{x}{\epsilon})$$

in der schwachen Formulierung (2.4.2) und erhalten:

$$\int_{\Omega} A^\epsilon(x) \nabla u^\epsilon(x) \cdot \nabla \Phi^\epsilon(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \Phi^\epsilon(x) dx.$$

In der rechten Seite können wir zum Grenzwert übergehen, denn offensichtlich konvergiert Φ^ϵ stark in $L^2(\Omega)$ gegen Φ . Auf der linken Seite nutzen wir die starke 2-Skalen-Konvergenz von $A^T(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}) (\nabla_x \Phi + \nabla_y \phi(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}))$ und erhalten:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^\epsilon(x) \nabla u^\epsilon(x) \cdot \nabla \Phi^\epsilon(x) dx \\ &= \int_{\Omega} A(x, \frac{x}{\epsilon}) \nabla u^\epsilon(x) \cdot \left(\nabla_x \Phi(x) + \epsilon \nabla_x \phi(x, \frac{x}{\epsilon}) + \nabla_y \phi(x, \frac{x}{\epsilon}) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u^\epsilon(x) \cdot A(x, \frac{x}{\epsilon})^T \left(\nabla_x \Phi(x) + \nabla_y \phi(x, \frac{x}{\epsilon}) \right) dx + O(\epsilon) \\ &\rightarrow \int_{\Omega} \int_Y (\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot A(x, y)^T (\nabla_x \Phi(x) + \nabla_y \phi(x, y)) dy dx \\ &= \int_{\Omega} \int_Y A(x, y) (\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot (\nabla_x \Phi(x) + \nabla_y \phi(x, y)) dy dx. \end{aligned}$$

Wir erhalten also die gewünschte Gleichung

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f(x) \Phi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \int_Y A(x, y) (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot (\nabla_x \Phi(x) + \nabla_y \phi(x, y)) dy dx \end{aligned}$$

für alle $(\Phi, \phi) \in \dot{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega, H_{\sharp}^1(Y))$. Da $\dot{C}^\infty(\Omega) \times \dot{C}^\infty(\Omega, C_{\sharp}^\infty(Y))$ dicht in $\dot{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega, H_{\sharp}^1(Y))$ liegt.

Schritt 4: Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Dazu wenden wir den Satz von Lax-Milgram auf die Bilinearform \mathcal{B} an. Zunächst zeigen wir, dass $\|(\Phi, \phi)\|_E := \|\nabla_x \Phi + \nabla \phi\|_{L^2(\Omega \times Y)}$ eine Norm auf $\dot{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega, H_{\sharp}^1(Y))$ definiert. Die Norm-Eigenschaften sind klar, bis auf die Tatsache:

$$\|(\Phi, \phi)\|_E = 0 \iff \Phi = 0, \phi = 0.$$

Sei nun $\|(\Phi, \phi)\|_E = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \|\nabla_x \Phi + \nabla \phi\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 \\ &= \int_{\Omega} |\nabla \Phi(x)|^2 dx + 2 \int_{\Omega} \int_Y \nabla \Phi(x) \cdot \nabla_y \phi(x, y) dy dx + \int_{\Omega} \int_Y |\nabla_y \phi(x, y)|^2 dy dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla \Phi(x)|^2 dx + \int_{\Omega} \int_Y |\nabla_y \phi(x, y)|^2 dy dx, \end{aligned}$$

denn $\int_Y \nabla \Phi(x) \cdot \nabla_y \phi(x, y) dy = \int_{\partial Y} (\nabla \Phi(x) \cdot \nu(y)) \phi(x, y) dy = 0$, aufgrund der periodischen Randwerte.

Wir erhalten also $\|(\Phi, \phi)\|_E = |\Phi|_{H^1(\Omega)} + |\phi|_{L^2(\Omega, H^1(Y))}$. Damit ist der Raum $\dot{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega, H_{\sharp}^1(Y))$ ein Hilbertraum bzgl. $\|\cdot\|_E$. Da A uniform positiv definit ist, erhalten wir somit direkt:

$$\alpha \|(\Phi, \phi)\|_E^2 \leq \mathcal{B}((\Phi, \phi), (\Phi, \phi)) \leq \beta \|(\Phi, \phi)\|_E^2,$$

sowie

$$|\mathcal{B}((U, u), (\Phi, \phi))| \leq \beta \|(U, u)\|_E \|(\Phi, \phi)\|_E.$$

\mathcal{B} ist damit stetig und koerziv. Der Satz von Lax-Milgram liefert uns somit Eindeutigkeit und Existenz einer Lösung. Mit der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung folgt damit auch, dass jede Folge in ϵ gegen den selben Grenzwert konvergieren muss. Damit können wir die zu Beginn des Beweises geforderte Teilfolge o.B.d.A. durch die gesamte Folge ersetzen. \square

Mit dem obigen Homogenisierungsresultat, lässt sich nun auch eine klare Verbindung zum heuristischen Ansatz der asymptotischen Entwicklung herstellen. Zunächst erhalten wir in beiden Fällen dasselbe Homogenisierungsresultat:

Folgerung 2.4.17.

Die (homogenisierte) Bilinearform $B^0 : \dot{H}^1(\Omega) \times \dot{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$B^0(u, v) := \int_{\Omega} A^0(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

ist koerziv mit $|B^0(u, u)| \geq \alpha |u|_{\dot{H}^1(\Omega)}^2$ für alle $u \in \dot{H}^1(\Omega)$. Hierbei ist

$$A_{ij}^0(x) := \int_Y A(y) (e_j + \nabla_y w_j(x, y)) \cdot (e_i + \nabla_y w_i(x, y)) dy$$

und $w_i \in L^2(\Omega, \tilde{H}_{\#}^1(Y))$ löst

$$\int_Y A(x, y) \nabla_y w_i(x, y) \cdot \nabla_y \phi(y) dy = \int_Y A(x, y) e_i \cdot \nabla_y \phi(y) dy \quad (2.4.3)$$

für fast alle $x \in \Omega$ und für alle $\phi \in \tilde{H}_{\#}^1(Y)$.

Außerdem gilt: $(u_0, u_1) \in \dot{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega, \tilde{H}_{\#}^1(Y))$ ist genau dann die eindeutige Lösung des 2-Skalen homogenisierten Problems

$$\mathcal{B}((u_0, u_1), (\Phi, \phi)) = \int_{\Omega} f(x) \Phi(x) dx \quad (\Phi, \phi) \in \dot{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega, \tilde{H}_{\#}^1(Y)),$$

wenn $u_0 \in \dot{H}^1(\Omega)$ auch die eindeutige Lösung des klassischen homogenisierten Problems ist, also

$$\int_{\Omega} A^0(x) \nabla u_0(x) \cdot \nabla \Phi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \Phi(x) dx \quad \Phi \in \dot{H}^1(\Omega).$$

Zusätzlich gilt $u_1(x, y) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u_0(x) w_i(x, y)$. Beachte: das u_1 , welches im heuristischen Ansatz so definiert wurde, war der zweite Term in einer asymptotischen Entwicklung.

Beweis.

Sei zunächst $v \in \dot{H}^1(\Omega)$ beliebig. Wir definieren $\tilde{v}(x, y) := \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v(x) w_i(x, y)$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
B^0(v, v) &= \int_{\Omega} A^0 \nabla v \cdot \nabla v \\
&= \int_{\Omega} A^0 \nabla v \cdot \nabla v \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}^0 \partial_{x_i} v \partial_{x_j} v \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_j} v \left(\int_Y A(e_j + \nabla_y w_j) \cdot (e_i + \nabla_y w_i) \right) \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left(\int_Y A(\partial_{x_j} v + \partial_{x_j} v \nabla_y w_j) \cdot (\partial_{x_i} v + \partial_{x_i} v \nabla_y w_i) \right) \\
&= \int_{\Omega} \int_Y A(\nabla_x v + \nabla_y \tilde{v}) \cdot (\nabla_x v + \nabla_y \tilde{v}) \\
&\geq \alpha \|\nabla_x v + \nabla_y \tilde{v}\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 = \alpha \|\nabla_x v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|\nabla_y \tilde{v}\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 \\
&\geq \alpha \|\nabla_x v\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Das beweist die erste Aussage. Der zweite Teil funktioniert analog:

Definieren wir $\tilde{u}_1(x, y) := \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u_0(x) w_i(x, y)$ so erhalten wir sofort

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \int_Y A(x, y) (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y \tilde{u}_1(x, y)) \cdot (\nabla_x \Phi(x) + \nabla_y \phi(x, y)) \, dy \, dx \\
&= \int_{\Omega} \int_Y A(x, y) \left(\nabla_x u_0(x) + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u_0(x) \nabla_y w_i(x, y) \right) \\
&\quad \cdot (\nabla_x \Phi(x) + \nabla_y \phi(x, y)) \, dy \, dx \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u_0(x) \int_Y A(x, y) (e_i + \nabla_y w_i(x, y)) \cdot (\nabla_x \Phi(x) + \nabla_y \phi(x, y)) \, dy \, dx \\
&\stackrel{(2.4.3)}{=} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u_0(x) \int_Y A(x, y) (e_i + \nabla_y w_i(x, y)) \cdot \nabla_x \Phi(x) \, dy \, dx \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u_0(x) \left(\int_Y A(x, y) (e_i + \nabla_y w_i(x, y)) \, dy \right) \cdot \nabla_x \Phi(x) \, dx \\
&= \int_{\Omega} A^0(x) \nabla_x u_0(x) \cdot \nabla_x \Phi(x) \, dx
\end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega} f(x) \Phi(x) dx.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen folgt $\tilde{u}_1 = u_1$ und damit die Äquivalenz der beiden Formulierungen. \square

Als zweites zweites Verbindungsglied zur klassischen Homogenisierung wollen wir nun auch die ersten beiden Terme einer asymptotischen Entwicklung rigoros rechtfertigen. Dies geschieht im folgenden Satz:

Satz 2.4.18 (Starke Konvergenz in H^1).

Seien A , u_1 , $\nabla_y u_1$ und $\nabla_x u_1$ zulässige Testfunktionen (das ist z.B. für glatte Daten A erfüllt). Dann gilt

$$u^\epsilon(x) = u_0(x) + \epsilon u_1(x, \frac{x}{\epsilon}) + R^\epsilon(x), \quad \text{wobei } \|R^\epsilon\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Insbesondere gilt:

$$\|u^\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}))\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

Beweis.

Zur Vereinfachung nutzen wir in diesem Beweis die Notation $A\xi^2 := A\xi \cdot \xi$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$. Verwenden wir die Annahme, dass u_1 , $\nabla_y u_1$ und $\nabla_x u_1$ zulässige Testfunktionen sind, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A(x, \frac{x}{\epsilon}) \left(\nabla_x u^\epsilon(x) - \nabla_x \left(u_0(x) + \epsilon u_1(x, \frac{x}{\epsilon}) \right) \right)^2 dx \\ &= \int_{\Omega} A(x, \frac{x}{\epsilon}) \nabla_x u^\epsilon(x) \cdot \nabla_x u^\epsilon(x) dx \\ & \quad + \int_{\Omega} A(x, \frac{x}{\epsilon}) \left(\nabla_x u_0(x) + \epsilon \nabla_x u_1(x, \frac{x}{\epsilon}) + \nabla_y u_1(x, \frac{x}{\epsilon}) \right)^2 dx \\ & \quad - \int_{\Omega} (A + A^T)(x, \frac{x}{\epsilon}) \nabla_x u^\epsilon(x) \cdot \left(\nabla_x u_0(x) + \epsilon \nabla_x u_1(x, \frac{x}{\epsilon}) + \nabla_y u_1(x, \frac{x}{\epsilon}) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} f(x) u^\epsilon(x) dx + \int_{\Omega} A(x, \frac{x}{\epsilon}) \left(\nabla_x u_0(x) + \epsilon \nabla_x u_1(x, \frac{x}{\epsilon}) + \nabla_y u_1(x, \frac{x}{\epsilon}) \right)^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} (A + A^T)(x, \frac{x}{\epsilon}) \nabla_x u^\epsilon(x) \cdot \left(\nabla_x u_0(x) + \epsilon \nabla_x u_1(x, \frac{x}{\epsilon}) + \nabla_y u_1(x, \frac{x}{\epsilon}) \right) dx \\
\rightarrow & \int_{\Omega} f(x) u_0(x) dx + \int_{\Omega} \int_Y A(x, y) (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y))^2 dy dx \\
& - \int_{\Omega} \int_Y (A + A^T)(x, y) (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y))^2 dy dx \\
= & \int_{\Omega} f(x) u_0(x) dx \\
& - \int_{\Omega} \int_Y A(x, y) (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)) dy dx \\
= & 0.
\end{aligned}$$

Also

$$\|u^\epsilon - \left(u_0 + \epsilon u_1(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})\right)\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Für die fehlende L^2 -Konvergenz erhalten wir:

$$\|u^\epsilon - u_0 - \epsilon u_1(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u^\epsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)} + \epsilon \|u_1(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dabei gilt

$$\|u^\epsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0,$$

da $u^\epsilon \rightharpoonup u_0$ in $\dot{H}^1(\Omega)$ und mit dem Einbettungssatz von Rellich folgt daraus starke Konvergenz in $L^2(\Omega)$. Andererseits gilt auch

$$\epsilon \|u_1(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0,$$

denn u_1 ist nach Voraussetzung zulässige Testfunktion und damit $\|u_1(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \|u_1\|_{L^2(\Omega \times Y)}$. \square

2.4.2 Zentrale Eigenschaften von $L^1(\Omega, C_\#^0(Y))$ -Funktionen

Das Hauptziel dieses Abschnitts ist der Beweis von Lemma 2.4.5. Dazu gehen wir in mehreren Schritten vor und führen zunächst weitere wichtige Definitionen und Sätze aus der Funktionalanalysis ein.

Definition 2.4.19 ($rca(S)$ - regular countably additive measures).

Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei \mathcal{B}_0 die σ -Algebra der Borel-Mengen auf S . Dann ist $rca(S)$ der Raum der regulären, abzählbar-additiven Maße auf \mathcal{B}_0 . Zusammen mit der Totalvariation als Norm, wird der $rca(S)$ zu einem Banachraum.

Satz 2.4.20 (Satz von Riesz-Radon).

Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist durch

$$J(\mu)(f) := \int_S f d\mu$$

ein linearer isometrischer Isomorphismus

$$J : rca(S) \rightarrow C^0(S)'$$

definiert.

Beweise siehe Alt [4].

Lemma 2.4.21 (Satz von Pettis).

Sei $f : \Omega \rightarrow X$, X separabler Banachraum. Dann gilt:

$$f \text{ messbar} \iff x \mapsto \langle F, f(x) \rangle \text{ messbar } \forall F \in X'.$$

Wir beschäftigen uns nun mit dem folgenden, in Definition 2.3.21 eingeführten Raum:

$$L^1(\Omega, C_{\sharp}^0(Y)) := \{f : \Omega \rightarrow C_{\sharp}^0(Y) \mid f \text{ ist messbar und } \int_{\Omega} \|f(x)\|_{C^0(Y)} dx < \infty\}.$$

Nunächst beweisen wir den nachfolgenden Satz, der uns insbesondere sagt, dass unser intuitives Verständnis des Raums $L^1(\Omega, C_{\sharp}^0(Y))$ richtig ist. Vereinfacht können wir uns also vorstellen, dass der $L^1(\Omega, C_{\sharp}^0(Y))$ aus Funktionen besteht, die in $C_{\sharp}^0(Y)$ liegen, wenn man die x -Komponente festhält und in $L^1(\Omega)$ liegen wenn man die y -Komponente festhält.

Satz 2.4.22.

$f \in L^1(\Omega, C_{\#}^0(Y)) \iff \exists E \text{ Nullmenge, } E \subset \Omega, \text{ so dass}$

- (a) $\forall x \in \Omega \setminus E$ ist die Funktion $y \mapsto f(x, y)$ stetig und Y -periodisch,
- (b) $\forall y \in Y$ ist die Funktion $x \mapsto f(x, y)$ messbar,
- (c) $\int_{\Omega} \sup_{y \in Y} |f(x, y)| dx < \infty$.

Wir beweisen im Folgenden nur die Richtung ' \Rightarrow ', da wir nur diese Richtung für die späteren Beweise benötigen.

Beweis von Satz 2.4.22.

' \Rightarrow ':

(a) und (c) stecken bereits in der Definition von $L^1(\Omega, C_{\#}^0(Y))$. Es bleibt also nur (b) zu zeigen.

Nach dem Satz von Riesz-Radon existiert für jedes $F \in (C^0(\bar{Y}))' \subset (C_{\#}^0(\bar{Y}))'$ genau ein $\mu \in \text{rca}(\bar{Y})$, mit

$$\langle F, g \rangle = \int_{\bar{Y}} g(y) d\mu(y) \quad \forall g \in C_{\#}^0(\bar{Y}) \subset C^0(\bar{Y}).$$

Wählen wir nun $g = f(x)$, so erhalten wir

$$\langle F, f(x) \rangle = \int_{\bar{Y}} f(x, y) d\mu(y).$$

Da $f : \Omega \rightarrow C_{\#}^0(Y)$ nach Definition von $L^1(\Omega, C_{\#}^0(Y))$ messbar ist, erhalten wir mit dem Satz von Pettis, dass $\langle F, f(x) \rangle$ messbar ist für alle $F \in (C_{\#}^0(\bar{Y}))'$ (und damit insbesondere auch für alle $F \in (C^0(\bar{Y}))'$). Wegen der Isomorphie von $C^0(\bar{Y})'$ und $\text{rca}(\bar{Y})$ (Satz von Riesz-Radon), gilt damit:

$$\int_{\Omega} f(x, y) d\mu(y) \text{ ist messbar } \forall \mu \in \text{rca}(\bar{Y}).$$

Wählen wir nun für μ das Dirac-Maß δ_{y_0} im Punkt $y_0 \in Y$, so gilt:

$$\int_{\Omega} f(x, y) d\delta_{y_0}(y) = f(x, y_0) \text{ ist messbar.}$$

' \Leftarrow ':

Auch die Rückrichtung lässt sich mit Hilfe des Satzes von Pettis zeigen. Die Ausführung ist allerdings deutlich technischer. Für einen ausführlichen Beweis der Rückrichtung sei auf [20] verwiesen. □

Folgerung 2.4.23.

- (1) Ist $f \in L^1(\Omega, C_\#^0(Y))$, so ist $f(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})$ ist messbar.
denn: nach Satz 2.4.22 (a)+(b) ist $y \mapsto f(x, y)$ ist stetig (für fast alle x) und $x \mapsto f(x, y)$ messbar (für alle y). f ist also vom Caratheodory Typ. Wegen der Periodizität lässt sich $f(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})$ auf $\Omega \times \Omega$ fortsetzen. $f(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})$ bleibt also eine Funktion vom Caratheodory Typ. Funktionen vom Caratheodory Typ sind messbar, womit die Aussage folgt.
- (2) Für $f \in L^1(\Omega, C_\#^0(Y))$ gilt $\|f(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega, C^0(Y))} < \infty$.
denn: $\int_\Omega |f(x, \frac{x}{\epsilon})| dx \leq \int_\Omega \sup_{y \in Y} |f(x, y)| dx = \|f\|_{L^1(\Omega, C^0(Y))}$.

Lemma 2.4.24.

Sei $f \in L^1(\Omega, C_\#^0(Y))$. Dann gilt:

- (i) $f(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})$ ist messbare Funktion auf Ω ,
- (ii) $\|f(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega, C^0(Y))} = \int_\Omega \sup_{y \in Y} |f(x, y)| dx$,
- (iii) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\Omega f(x, \frac{x}{\epsilon}) dx = \int_\Omega \int_Y f(x, y) dy dx$.

Beweis.

(i) und (ii) sind klar nach Folgerung 2.4.23.

Es bleibt (iii) zu zeigen: Sei $f \in L^1(\Omega, C_\#^0(Y))$. Wir konstruieren nun eine Zerteilung von Y . Sei dazu:

- $m \in \mathbb{N}$,
- $\{Y_i \mid 1 \leq i \leq m^n\}$ eine Partition von Y , wobei
- die Y_i Würfel der Seitenlänge $\frac{1}{m}$ sind,
- außerdem gilt $|Y_i \cap Y_j| = 0$ für $i \neq j$.
- Insbesondere: $|Y_i| = \frac{1}{m^n}$ und $Y = \bigcup_{i=1}^{m^n} Y_i$.

Sei nun weiterhin χ_i die charakteristische Funktion von Y_i , fortgesetzt durch Y -Periodizität auf den ganzen \mathbb{R}^n . Also die Funktion

$$\chi_i(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in Y_i \\ 0 & \text{für } x \in Y \setminus Y_i. \end{cases}$$

fortgesetzt durch Periodizität auf den \mathbb{R}^n .

Idee:

1. Schritt: Wir beweisen (iii) zuerst für Treppenfunktionen der Art

$$f_m(x, y) = \sum_{i=1}^{m^n} f(x, y_i) \chi_i(y).$$

2. Schritt: Wir nutzen, dass es für $f \in L^1(\Omega, C_\#^0(Y))$ eine Folge von solchen Treppenfunktionen gibt, die in $L^1(\Omega, C_\#^0(Y))$ gegen f konvergiert.

Ausführung der Idee:

(1. Schritt) Sei

$$f_m(x, y) = \sum_{i=1}^{m^n} f(x, y_i) \chi_i(y)$$

und y_i beliebiger Punkt aus Y_i . Dann ist

$$f_m(x, y_i) = \sum_{i=1}^{m^n} f(x, y_i) \chi_i(y_i) = f(x, y_i)$$

und daher ist nach Satz 2.4.22, (b), die Funktion $x \mapsto f_m(x, y_i)$ messbar (denn $x \mapsto f(x, y_i)$ ist messbar) und in $L^1(\Omega)$.

Da nach Satz 2.3.19 $(\chi_i(\frac{\cdot}{\epsilon}))_{\epsilon>0}$ eine Folge in $L^\infty(\Omega) \simeq (L^1(\Omega))'$ ist, die schwach-* konvergent gegen ihren Mittelwert ist, gilt insgesamt:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_m(x, \frac{x}{\epsilon}) dx &= \sum_{i=1}^{m^n} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(x, y_i) \chi_i(\frac{x}{\epsilon}) dx \\ &= \sum_{i=1}^{m^n} \int_{\Omega} f(x, y_i) \frac{1}{m^n} dx \\ &= \int_{\Omega} \int_Y f_m(x, y) dy dx. \end{aligned}$$

(2. Schritt) Also:

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} f(x, \frac{x}{\epsilon}) dx - \int_{\Omega} \int_Y f(x, y) dy dx \right| \\ &\leq \underbrace{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} f(x, \frac{x}{\epsilon}) - f_m(x, \frac{x}{\epsilon}) dx \right|}_{=:I} \\ &\quad + \underbrace{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} f_m(x, \frac{x}{\epsilon}) dx - \int_{\Omega} \int_Y f_m(x, y) dy dx \right|}_{=:II} \\ &\quad + \underbrace{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} \int_Y f_m(x, y) - f(x, y) dy dx \right|}_{=:III}. \end{aligned}$$

Wir erhalten sofort mit Schritt 1, dass $II=0$ gilt und für die anderen Terme gleichermaßen

$$I \text{ bzw. } III \leq \int_{\Omega} \sup_{y \in Y} |f(x, y) - f_m(x, y)| dx = \|f_m - f\|_{L^1(\Omega, C^0(Y))}.$$

Insgesamt also:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} f(x, \frac{x}{\epsilon}) dx - \int_{\Omega} \int_Y f(x, y) dy dx \right| \leq 2 \|f_m - f\|_{L^1(\Omega, C^0(Y))} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass die rechte Seite für $m \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Sei dazu

$$g_m(x) := \sup_{y \in Y} |f(x, y) - f_m(x, y)|.$$

Weil $f(x, y)$ stetig in y ist, gilt

$$g_m(x) \rightarrow 0 \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Außerdem:

$$g_m(x) \leq 2 \sup_{y \in Y} |f(x, y)| \in L^1(\Omega).$$

Wir können also auf g_m Lebesgue's Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden und erhalten:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - f_m\|_{L^1(\Omega, C^0(Y))} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|g_m\|_{L^1(\Omega)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|g_m - 0\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

□

Lemma 2.4.24 beweist schließlich Lemma 2.4.5, wie wir in der folgenden Bemerkung feststellen:

Bemerkung 2.4.25.

Lemma 2.4.24 wurde hier für L^1 bewiesen, gilt aber sofort auch für alle L^p -Räume ($p < \infty$), denn $f \in L^p(\Omega, C_\#^0(Y))$ bedeutet $f^p \in L^1(\Omega, C_\#^0(Y))$. Insbesondere erhalten wir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega \times Y)} \quad \forall f \in L^p(\Omega, C_\#^0(Y)).$$

Bemerkung 2.4.26.

Lemma 2.4.24 liefert auch einen Einblick in die Thematik zulässiger Testfunktionen beim Bilden des 2-Skalen-Grenzwerts. Fordern wir beispielsweise lediglich $f \in L^2(\Omega \times Y)$, so ist nicht gewährleistet, dass $f(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})$ überhaupt eine messbare Funktion auf Ω ist. Dafür war zusätzliche Regularität notwendig ($f \in L^1(\Omega, C_\#^0(Y))$).

Kapitel 3

Numerische Mehrskalenmethoden für elliptische Probleme

In diesem Kapitel wollen uns nun mit der numerischen Behandlung von Mehrskalenproblemen befassen. Dazu führen wir zunächst ein allgemeines Framework ein, leiten daraus verschiedene Methoden ab und beschäftigen uns schließlich detailliert mit der Heterogenen Mehrskalen Finite Elemente Methode (HMM), die ursprünglich von E und Engquist [6] eingeführt wurde.

3.1 Framework für Mehrskalenmethoden

3.1.1 Motivation und allgemeiner Rahmen

Generelle Idee von Mehrskalenmethoden exemplarisch am sogenannten VMM-Zugang (Variational Multiscale Method):

Zu lösendes Problem: finde $u^\epsilon \in V$ mit

$$\int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u^\epsilon \cdot \nabla \Phi = \int_{\Omega} f \Phi \quad \forall \Phi \in V.$$

Sei

1. \mathcal{V} : endlich dimensionaler Teilraum von V mit $\inf_{v \in \mathcal{V}} \|u^\epsilon - v\|_V \leq \text{TOL}$.
2. $\mathcal{V} = \mathcal{V}^c \oplus \mathcal{V}^f$: ein Splitting in Grobskalen-Raum \mathcal{V}^c (enthält keine schnell oszillierende Funktionen) und Feinskalenraum \mathcal{V}^f (enthält schnell oszillierende Funktionen).

Galerkin-Approximation des ursprünglichen Problems: finde $\mathcal{U}^\epsilon \in \mathcal{V}$ mit

$$\int_{\Omega} A^\epsilon \nabla \mathcal{U}^\epsilon \cdot \nabla \Psi = \int_{\Omega} f \Psi \quad \forall \Psi \in \mathcal{V}.$$

Umschreiben mit Hilfe des Splittings $\mathcal{V} = \mathcal{V}^c \oplus \mathcal{V}^f$ liefert:

$$\begin{aligned} \text{finde } \mathcal{U}^\epsilon \in \mathcal{V} : \quad & \int_{\Omega} A^\epsilon \nabla \mathcal{U}^\epsilon \cdot \nabla \Phi = \int_{\Omega} f \Phi \quad \forall \Phi \in \mathcal{V}^c, \\ & \int_{\Omega} A^\epsilon \nabla \mathcal{U}^\epsilon \cdot \nabla \phi = \int_{\Omega} f \phi \quad \forall \phi \in \mathcal{V}^f, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Wegen $\mathcal{V} = \mathcal{V}^c \oplus \mathcal{V}^f$ lässt sich auch \mathcal{U}^ϵ eindeutig splitten in $\mathcal{U}^\epsilon = u^c + u^f$, wobei $u^c \in \mathcal{V}^c$ und $u^f \in \mathcal{V}^f$:

$$\begin{aligned} \text{finde } \mathcal{U}^\epsilon = u^c + u^f \in \mathcal{V} : \quad & \int_{\Omega} A^\epsilon (\nabla u^c + \nabla u^f) \cdot \nabla \Phi = \int_{\Omega} f \Phi \quad \forall \Phi \in \mathcal{V}^c, \\ & \int_{\Omega} A^\epsilon (\nabla u^c + \nabla u^f) \cdot \nabla \phi = \int_{\Omega} f \phi \quad \forall \phi \in \mathcal{V}^f, \end{aligned}$$

Wir definieren nun (analog zur zweiten Gleichung) den Korrektor-Operator $\mathcal{Q} : \mathcal{V}^c \rightarrow \mathcal{V}^f$ für $\Phi \in \mathcal{V}^c$ durch:

$$\text{finde } \mathcal{Q}(\Phi) \in \mathcal{V}^f : \quad \int_{\Omega} A^\epsilon (\nabla \Phi + \nabla \mathcal{Q}(\Phi)) \cdot \nabla \phi = \int_{\Omega} f \phi \quad \forall \phi \in \mathcal{V}^f.$$

Beachte: $\mathcal{Q}(u^c) = u^f$, denn:

$$\int_{\Omega} A^\epsilon (\nabla u^c + \nabla \mathcal{Q}(u^c)) \cdot \nabla \phi = \int_{\Omega} f \phi = \int_{\Omega} A^\epsilon (\nabla u^c + \nabla u^f) \cdot \nabla \phi \quad \forall \phi \in \mathcal{V}^f.$$

Wir können das ursprünglich (endlich dimensionale) Problem auch schreiben als:

$$\begin{aligned} \text{finde } u^c \in \mathcal{V}^c : \quad & \int_{\Omega} A^\epsilon (\nabla u^c + \nabla \mathcal{Q}(u^c)) \cdot \nabla \Phi = \int_{\Omega} f \Phi \quad \forall \Phi \in \mathcal{V}^c, \\ & \int_{\Omega} A^\epsilon (\nabla u^c + \nabla \mathcal{Q}(u^c)) \cdot \nabla \phi = \int_{\Omega} f \phi \quad \forall \phi \in \mathcal{V}^f. \end{aligned}$$

Die Rekonstruktion wird nun definiert als $\mathcal{R}(\Phi) := \mathcal{Q}(\Phi) + \Phi$ und wir schreiben (3.1.1) erneut um:

$$\text{finde } u^c \in \mathcal{V}^c : \quad \int_{\Omega} A^\epsilon \nabla \mathcal{R}(u^c) \cdot \nabla \Phi = \int_{\Omega} f \Phi \quad \forall \Phi \in \mathcal{V}^c, \quad (3.1.2)$$

$$\int_{\Omega} A^\epsilon \nabla \mathcal{R}(u^c) \cdot \nabla \phi = \int_{\Omega} f \phi \quad \forall \phi \in \mathcal{V}^f, \quad (3.1.3)$$

da $\mathcal{U}^\epsilon = \mathcal{R}(u^c)$ gilt.

Ist die Rekonstruktion \mathcal{R} einmal bestimmt, so muss nur noch die (billig zu lösende) Grobskalen-Gleichung (3.1.2) behandelt werden.

Typischerweise wird (3.1.2) mit Hilfe einer passenden Quadraturformel approximiert. Sei z.B. \mathcal{P} eine Partition von Ω in Elemente D , da kann (3.1.2) (exakt) umgeschrieben werden zu:

$$\sum_{D \in \mathcal{P}} |D| \int_D A^\epsilon \nabla \mathcal{R}(u^c) \cdot \nabla \Phi = \int_\Omega f \Phi.$$

Schränken wir nun die Feinskalen-Gleichung (3.1.3) auf die lokalen Elemente D ein (zur Verringerung des Rechenaufwands durch Entkopplung), so erhalten wir z.B.

$$\int_D A^\epsilon \nabla \mathcal{R}(u^c) \cdot \nabla \phi = \int_D f \phi$$

für alle lokalisierten Feinskalen-Funktionen $\phi \in \mathcal{V}^f$ und mit einer geeigneten Randbedingung für $\mathcal{R}(u^c)$ auf D . Oft wird $\int_D f \phi$ durch 0 ersetzt, da zu erwarten ist, dass dieser Beitrag sehr klein ist. Im Folgenden formulieren wir diese Strategie in sehr allgemeiner Form.

Im Sinne der obigen Motivation beschreiben wir nun ein allgemeines Framework für Mehrskalenmethoden für elliptische Probleme. Gesucht wird eine Approximation u^c an die homogenisierte Lösung u_0 bzw. lokal eine Approximation $\mathcal{R}(u^c)$ an die exakte Lösung u^ϵ .

Definition 3.1.1.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet und sei \mathcal{P} eine nicht-überlappende Partition von Ω in Elemente D . Eine Quadraturformel auf D sei gegeben durch $\{(q_{D,i}, x_{D,i}) | i \in I_D\}$ wobei $q_{D,i}$ die Gewichte bezeichnet und $x_{D,i}$ die Quadraturpunkte. I_D ist eine zugehörige Indexmenge. Ein passende offene Umgebung von $x_{D,i}$ sei gegeben durch $M_{D,i}$. (Die $M_{D,i}$ sind nicht notwendigerweise disjunkt.) Wir definieren die diskrete makroskopische Bilinearform durch:

$$\mathcal{A}(u, \Phi) := \sum_{D \in \mathcal{P}} \sum_{i \in I_D} q_{D,i} \int_{M_{D,i}} A^\epsilon \nabla \mathcal{R}_{D,i}(u) \cdot \nabla \Phi$$

und lösen

$$\text{finde } u^c \in \mathcal{V}^c : \quad \mathcal{A}(u^c, \Phi) = \int_\Omega f \Phi \quad \forall \Phi \in \mathcal{V}^c,$$

wobei \mathcal{V}^c ein passender Grobskalen-Raum ist. Für $\Phi \in \mathcal{V}^c$ ist die lokale Rekonstruktion $\mathcal{R}_{D,i}(\Phi)$ mit $\mathcal{R}_{D,i}(\Phi) - \Phi \in \mathcal{V}^f(O_{D,i})$ gegeben als Lösung von:

$$\int_{O_{D,i}} A^\epsilon \nabla \mathcal{R}_{D,i}(\Phi) \cdot \nabla \phi = F_{O,i}(\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{V}^f(O_{D,i}).$$

Hierbei ist $O_{D,i} \supseteq M_{D,i}$ eine Oversampling-Menge (um den Einfluss falsch gewählter Randwerte zu verringern); $\mathcal{V}^f(O_{D,i})$ ein passender Feinskalen-Raum, der eine passende Randbedingung auf $O_{D,i}$ beinhaltet und $F_{O,i}$ eine passende rechte Seite für die lokalen Probleme.

3.1.2 Beispiel Realisierungen

Im Folgenden geben wir 3 Beispiele für eine explizite Realisierung einer Mehrskalennmethode an, die in das obige Framework passt.

Die Heterogene Mehrskalen Finite Elemente Methode (HMM):

Sei

- \mathcal{T}_H reguläre Triangulierung von Ω mit Elementen T (d.h. $\mathcal{P} = \mathcal{T}_H$);
- x_T ein Quadraturpunkt in T , $|T|$ das Gewicht ($q_{D,i} = |T|$);
- $Y_{T,\delta}$ ein Würfel um x_T mit Kantenlänge δ (d.h. ' $M_{D,i} = Y_{T,\delta}$ ' und z.B. ' $O_{D,i} = Y_{T,2\delta}$ ');)
- $\mathcal{V}^c = V_H(\Omega)$ der übliche Finite-Elemente-Raum mit stückweise linearen Funktionen (auf T);
- $\mathcal{V}^f(O_{D,i}) = W_h(Y_{T,2\delta})$ ein Finite-Elemente-Raum mit periodischen Randwerten auf $Y_{T,2\delta}$;
- $F_{O,i} = 0$ als rechte Seite für die lokalen Probleme.

Insgesamt:

$$\text{finde } u_H \in V_H(\Omega) : \quad \sum_{T \in \mathcal{T}_H} |T| \int_{Y_{T,\delta}} A^\epsilon \nabla \mathcal{R}_T(u_H) \cdot \nabla \Phi_H = \int_{\Omega} f \Phi_H \quad \forall \Phi_H \in V_H(\Omega).$$

und $\mathcal{R}_T(\Phi_H) \in \Phi_H + W_h(Y_{T,2\delta})$ löst

$$\int_{Y_{T,2\delta}} A^\epsilon \nabla \mathcal{R}_T(\Phi_H) \cdot \nabla \phi_h = 0 \quad \forall \phi_h \in W_h(Y_{T,2\delta}).$$

Für weiterführende Literatur zur HMM sei z.B. auf [6, 7, 1, 2, 21, 11, 12, 10] verwiesen.

Die Mehrskalen Finite Elemente Methode (MsFEM):

Seien \mathcal{T}_H , x_T , $V_H(\Omega)$ und $F_{O,i} = 0$ wie im Fall der HMM. Zusätzlich:

- T selbst ist die Umgebung des Quadraturpunkts x_T (d.h. ' $M_{D,i} = T$ ');
- $\tilde{T} \supset T$ das Oversampling Gebiet (i.A. ein vergrößertes Dreieck);
- $\mathcal{V}^f(O_{D,i}) = W_h(\tilde{T})$ ein Finite-Elemente-Raum mit Dirichlet Null-Randwerten auf \tilde{T} .

Insgesamt liefert das Framework:

$$\text{finde } u_H \in V_H(\Omega) : \quad \sum_{T \in \mathcal{T}_H} |T| \int_T A^\epsilon \nabla \mathcal{R}_T(u_H) \cdot \nabla \Phi_H = \int_\Omega f \Phi_H \quad \forall \Phi_H \in V_H(\Omega)$$

und $\mathcal{R}_T(\Phi_H) \in \Phi_H + W_h(\tilde{T})$ löst

$$\int_{\tilde{T}} A^\epsilon \nabla \mathcal{R}_T(\Phi_H) \cdot \nabla \phi_h = 0 \quad \forall \phi_h \in W_h(\tilde{T}).$$

Für weiterführende Literatur zur MsFEM sei z.B. auf [13, 8] und insbesondere auf das Buch von Efendiev und Hou [9] verwiesen.

Die Variations Mehrskalenmethode (VMM):

- Situation ist ähnlich zu vorherigen Situationen (siehe Motivation des Frameworks);
- Typischerweise:
 1. starte mit Grobskalen-Raum \mathcal{V}^c ;
 2. verfeinere das zugrundeliegende Rechengitter bis wir einen 'hochauflösenden' diskreten Funktionenraum \mathcal{V} erhalten;

3. verwende Projektion $\pi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^c$, so dass $\mathcal{V}_c = \{v \in \mathcal{V} | (1 - \pi)v = 0\}$;
 4. definiere $\mathcal{V}^f := \{v \in \mathcal{V} | \pi(v) = 0\}$, was uns $\mathcal{V} = \mathcal{V}^c \oplus \mathcal{V}^f$ liefert;
 5. verwende $F_{O,i}(\phi) = \int_{\Omega} f\phi$;
- an diesem Punkt sind wir in der Situation wie bei den Gleichungen (3.1.2) und (3.1.3);
 - verschiedene Lokalisierungs-Strategien sind möglich (mehr dazu später);
 - i.A. besteht \mathcal{P} im VMM-Fall aus größeren Blöcken, die mehrere Elemente des Grobgitters umfassen.

Für weiterführende Literatur zur VMM sei auf die Arbeiten von Hughes *et al.* [14, 15] verwiesen und für die adaptiven Varianten auf die Arbeiten von Larson und Målqvist [16, 17, 18, 19].

3.2 Die Heterogene Mehrskalenmethode (HMM)

In diesem Abschnitt wollen wir die HMM explizit einführen, eine Verbindung zur Homogenisierung aufzeigen und Konvergenzaussagen beweisen.

3.2.1 Allgemeine Definition der Methode

Im Folgenden bezeichne:

- Ω : ein polygonal berandetes Gebiet im \mathbb{R}^n , $1 \leq n \leq 3$;
- \mathcal{T}_H : reguläre Triangulierung von Ω mit Elementen T ;
- \mathcal{T}_h : reguläre, periodische Triangulierung von $Y = (0, 1)^n$ mit Elementen K ;
- x_T bzw. y_K : Schwerpunkt eines Simplexes $T \in \mathcal{T}_H$ bzw. eines Simplexes $K \in \mathcal{T}_h$;
- H, h : max. Kantenlänge der Gitterelemente, d.h.
 $H := \sup_{T \in \mathcal{T}_H} \{\text{diam}(T)\}$, $h := \sup_{K \in \mathcal{T}_h} \{\text{diam}(K)\}$;
- Für $\kappa \in \mathbb{R}_{>0}$ und $T \in \mathcal{T}_H$ definieren wir: $Y_{T,\kappa} := \{x_T + \kappa y | y \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^n\}$ (cf. Abb. 3.2.1);
- $x_T^\kappa : Y \rightarrow Y_{T,\kappa}$: die Abbildung $x_T^\kappa(y) := x_T + \kappa(y - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i)$ die Y bijektiv auf $Y_{T,\kappa}$ mapped.

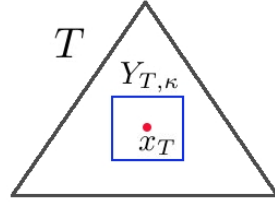


Abbildung 3.1: Skizze einer Zelle $Y_{T,\kappa}$ mit Kantenlänge κ und Mittelpunkt x_T (der Schwerpunkt von T).

- A_h^ϵ : eine geeignete, beschränkte Approximation von A^ϵ .

Definition 3.2.1 (Diskrete Funktionenräume).

Der diskrete Makro-Lösungsraum ist gegeben durch

$$V_H := \{ \Phi_H \in \dot{H}^1(\Omega) \cap C^0(\Omega) \mid \Phi_{H|T} \in \mathbb{P}^1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_H \}$$

und die diskreten Mikro-Lösungsräume durch

$$\begin{aligned} W_h(Y) &:= \{ \phi_h \in \tilde{H}_\#^1(Y) \cap C^0(Y) \mid \phi_{h|K} \in \mathbb{P}^1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \}; \text{ und} \\ W_h(Y_{T,\kappa}) &:= \{ \phi_h \in C^0(Y_{T,\kappa}) \mid (\phi_h \circ x_T^\kappa) \in W_h(Y) \}. \end{aligned}$$

Definition 3.2.2 (Rekonstruktions Operator).

Für $\delta > 0$ sei der lokale Rekonstruktions-Operator $R_T : V_H(\Omega) \rightarrow V_H(\Omega) + W_h(Y_{T,\delta})$ wie folgt gegeben: für $\Phi_H \in V_H(\Omega)$ ist die Rekonstruktion $R_T(\Phi_H) \in (\Phi_H)|_{Y_{T,\delta}} + W_h(Y_{T,\delta})$ die eindeutige Lösung von

$$\int_{Y_{T,\delta}} A_h^\epsilon(x) \nabla_x R_T(\Phi_H)(x) \cdot \nabla_x \phi_h(x) \, dx = 0 \quad \forall \phi_h \in W_h(Y_{T,\delta}). \quad (3.2.1)$$

Definition 3.2.3 (Heterogene Mehrskalen Finite Elemente Methode).

Seien δ_1 und δ_2 so gewählt, dass $\delta_2 \geq \delta_1 \geq \epsilon$ gilt. Weiterhin sei

$$Y_{T,\delta_1} \subset Y_{T,\delta_2} \subset T \quad \forall T \in \mathcal{T}_H.$$

$u_H \in V_H(\Omega)$ ist die HMM-Approximation von u^ϵ wenn gilt

$$(f, \Phi_H)_{L^2(\Omega)} = \mathcal{A}_h(u_H, \Phi_H) \quad \forall \Phi_H \in V_H(\Omega), \quad (3.2.2)$$

wobei

$$\mathcal{A}_h(u_H, \Phi_H) := \sum_{T \in \mathcal{T}_H} |T| \int_{Y_{T, \delta_1}} A_h^\epsilon(x) \nabla_x R_T(u_H)(x) \cdot \nabla_x \Phi_H(x) \, dx. \quad (3.2.3)$$

R_T bezeichnet hierbei den lokalen Rekonstruktions-Operator definiert in (3.2.1) für den Fall $\delta = \delta_2$. Als Approximation

Lemma 3.2.4.

Für $\delta_1 = \delta_2$ existiert immer eine eindeutige HMM-Approximation $u_H \in V_H(\Omega)$.

Beweis.

$R_T(\Phi_H)$ ist nach dem Satz von Lax-Milgram für jedes $\Phi_H \in V_H(\Omega)$ wohldefiniert (unabhängig von δ_1 und δ_2). Ist nun $\delta_1 = \delta_2$, dann lässt sich die Struktur $R_T(\Phi_H)$ nutzen, um zu sehen, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h(u_H, \Phi_H) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_H} |T| \int_{Y_{T, \delta_1}} A_h^\epsilon(x) \nabla_x R_T(u_H)(x) \cdot \nabla_x \Phi_H(x) \, dx \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_H} |T| \int_{Y_{T, \delta_1}} A_h^\epsilon(x) \nabla_x R_T(u_H)(x) \cdot \nabla_x R_T(\Phi_H)(x) \, dx \end{aligned}$$

gilt. Nun lässt sich wegen der Symmetrie die Positiv Definitheit von A_h^ϵ nutzen, um zu sehen, dass \mathcal{A}_h koerziv auf $V_H(\Omega)$ ist. Der Satz von Lax-Milgram liefert wieder die Behauptung. \square

3.2.2 Die HMM im periodischen Fall

In diesem Abschnitt wollen wir uns die HMM im periodischen Fall genau ansehen

und die Gemeinsamkeiten zur Homogenisierung aufzeigen. Dazu wählen wir in der Formulierung der HMM zunächst $\delta_1 = \delta_2 := \epsilon$. Denn:

1. $\delta_2 = \epsilon$: ϵ bezeichnet die Periode, damit ist das rekonstruierte Verhalten in Würfeln der Größe ϵ repräsentativ.
2. $\delta_1 = \delta_2$: Wir benötigen kein Oversampling, da die periodische Randbedingung für die lokalen Probleme die richtige Randbedingung ist.

Dazu seien die folgenden Annahmen an A getroffen:

Annahme 3.2.5. *Sei $A^\epsilon(x) := A(x, \frac{x}{\epsilon})$, dann nehmen wir an, dass A die folgenden Eigenschaften besitzt:*

1. $A \in (C^0(\overline{\Omega \times Y}))^n$ (globale Stetigkeit bis zum Rand),
2. $A \in C^0(\Omega, C_{\sharp}^0(Y))$ (Periodizität in der y -Komponente),
3. es existiert $\alpha > 0$ mit $A(x, y)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall (x, y, \xi) \in \Omega \times Y \times \mathbb{R}^n$ (uniforme Elliptizität).

Bemerkung 3.2.6.

Die Regularitätsannahmen dienen lediglich zur Vereinfachung. Die nachfolgenden Resultate lassen sich in leicht abgewandelter Form auch für allgemeiner Fälle beweisen.

Definition 3.2.7 (Diskrete Approximation der Diffusion).

Im periodischen Fall verwenden wir als A_h^ϵ die folgende stückweise konstante Approximation:

$$A_h^\epsilon(x)_{|x_T(K)} := A\left(x_T, \frac{x_T^\epsilon(y_K)}{\epsilon}\right) \quad \text{für } T \in \mathcal{T}_H \text{ und } K \in \mathcal{T}_h.$$

Zur Vollständigkeit formulieren wir die HMM noch einmal für den periodischen Fall:

Definition 3.2.8 (HMM im periodischen Fall).

Sei ϵ die Periodenlänge von $A^\epsilon(x, \cdot)$ und sei weiterhin $\epsilon \ll H$. A_h^ϵ sei gegeben durch Definition 3.2.7. Dann heißt $u_H \in V_H(\Omega)$ die HMM-Approximation von u_0 wenn gilt

$$(f, \Phi_H)_{L^2(\Omega)} = \mathcal{A}_h(u_H, \Phi_H) \quad \forall \Phi_H \in V_H(\Omega), \quad (3.2.4)$$

wobei

$$\mathcal{A}_h(u_H, \Phi_H) := \sum_{T \in \mathcal{T}_H} |T| \int_{Y_{T,\epsilon}} A_h^\epsilon(x) \nabla_x R_T(u_H)(x) \cdot \nabla_x \Phi_H(x) \, dx. \quad (3.2.5)$$

R_T bezeichnet hierbei den lokalen Rekonstruktions-Operator definiert in (3.2.1) für den Fall $\delta = \epsilon$.

Satz 3.2.9 (Äquivalenz zur diskreten 2-Skalen-Gleichung).

Sei $H \gg \epsilon$. Zusätzlich sei $A_h(x, y)$ eine stückweise konstante Approximation von A , gegeben durch $A_h(x, y)_{T \times K} := A(x_T, y_K)$ für alle $T \in \mathcal{T}_H$ und alle $K \in \mathcal{T}_h$. Sei $u_H \in V_H(\Omega)$ die HMM-Approximation aus Definition 3.2.8. Dann ist u_H auch die eindeutige Lösung des folgenden diskreten 2-Skalen-Problems:

Finde $(u_H, u_h) \in V_H(\Omega) \times V_H^0(\Omega, W_h(Y))$ mit

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f_H(x) \Phi_H(x) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \int_Y A_h(x, y) (\nabla_x u_H(x) + \nabla_y u_h(x, y)) (\nabla_x \Phi_H(x) + \nabla_y \phi_h(x, y)) \, dy \, dx \end{aligned}$$

für alle $(\Phi_H, \phi_h) \in V_H(\Omega) \times L^2(\Omega, W_h(Y))$. Dabei gilt außerdem die Beziehung

$$u_h(x, y)|_{T \times Y} = \frac{1}{\epsilon} (R_T(u_H) - u_H) \circ x_T^\epsilon(y - w_0).$$

wobei $w_0 := \frac{x_T}{\epsilon} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i$.

Bemerkung 3.2.10.

Satz 3.2.9 besagt insbesondere, dass die HMM im periodischen Setting äquivalent ist zu einer Diskretisierung der homogenisierten 2-Skalen-Gleichung aus Satz 2.4.16. Unter diesem Hintergrund sehen wir, dass u_H die homogenisierte Lösung u_0 approximiert und u_h der Korrektor 1. Ordnung u_1 .

Beweis von Satz 3.2.9.

Wir starten mit dem lokalen Problem. Für eine beliebige Testfunktion $\phi_h \in W_h(Y)$, definieren wir $\tilde{\phi}_h \in W_h(Y_{T,\epsilon})$ durch die Relation:

$$\phi_h(y) = \frac{1}{\epsilon} \tilde{\phi}_h(x_T^\epsilon(y - w_0)).$$

Dies ergibt insbesondere wegen $x_T^\epsilon(y) = x_T + \epsilon(y - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i)$ die folgende Gleichung:

$$\nabla_y \phi_h(y + w_0) = \frac{1}{\epsilon} \nabla_y (\tilde{\phi}_h \circ x_T^\epsilon)(y) = (\nabla_y \tilde{\phi}_h) \circ x_T^\epsilon(y). \quad (3.2.6)$$

Definieren wir

$$u_h(x, y)_{|T \times Y} := \frac{1}{\epsilon} (R_T(u_H) - u_H) \circ x_T^\epsilon(y - w_0),$$

so ergibt sich analog:

$$\nabla_y u_h(x, y + w_0) = \frac{1}{\epsilon} \nabla_y ((R_T(u_H) - u_H) \circ x_T^\epsilon)(y) = (\nabla_y (R_T(u_H) - u_H)) \circ x_T^\epsilon(y).$$

Wegen $\epsilon \ll H$ gilt nun:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{Y_{T,\epsilon}} A_h^\epsilon(x) \nabla_x R_T(u_H)(x) \cdot \nabla_x \tilde{\phi}_h(x) \, dx \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{Y_{T,\epsilon}} A_h^\epsilon(x) (\nabla_x R_T(u_H)(x) - \nabla_x u_H(x)) \cdot \nabla_x \tilde{\phi}_h(x) \, dx \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon^n} \int_{Y_{T,\epsilon}} A_h^\epsilon(x) \nabla_x u_H(x) \cdot \nabla_x \tilde{\phi}_h(x) \, dx. \end{aligned}$$

Wegen $x_T^\epsilon(Y) = Y_{T,\epsilon}$ können wir nun die Transformationsformel verwenden und erhalten:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{x_T^\epsilon(Y)} A_h \left(x_T, \frac{x}{\epsilon} \right) (\nabla_x R_T(u_H)(x) - \nabla_x u_H(x)) \cdot \nabla_x \tilde{\phi}_h(x) \, dx \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon^n} \int_{x_T^\epsilon(Y)} A_h \left(x_T, \frac{x}{\epsilon} \right) \nabla_x u_H(x) \cdot \nabla_x \tilde{\phi}_h(x) \, dx \\
&= \frac{1}{\epsilon^n} \int_Y |\det(Dx_T^\epsilon)| A_h \left(x_T, \frac{x_T^\epsilon(y)}{\epsilon} \right) ((\nabla_x R_T(u_H)) \circ x_T^\epsilon(y) - \nabla_x u_H(x_T)) \\
&\quad \cdot (\nabla_x \tilde{\phi}_h) \circ x_T^\epsilon(y) \, dy \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon^n} \int_Y |\det(Dx_T^\epsilon)| A_h \left(x_T, \frac{x_T^\epsilon(y)}{\epsilon} \right) \nabla_x u_H(x_T) \cdot (\nabla_x \tilde{\phi}_h) \circ x_T^\epsilon(y) \, dy \\
&\stackrel{(3.2.6)}{=} \frac{\epsilon^n}{\epsilon^n} \int_Y A_h \left(x_T, \frac{x_T^\epsilon(y)}{\epsilon} \right) ((\nabla_x R_T(u_H)) \circ x_T^\epsilon(y) - \nabla_x u_H(x_T)) \\
&\quad \cdot \nabla_y \phi_h(w_0 + y) \, dy \\
&\quad + \frac{\epsilon^n}{\epsilon^n} \int_Y A_h \left(x_T, \frac{x_T^\epsilon(y)}{\epsilon} \right) \nabla_x u_H(x_T) \cdot \nabla_y \phi_h(w_0 + y) \, dy \\
&= \int_Y A_h \left(x_T, \frac{x_T}{\epsilon} + y - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i \right) \nabla_y u_h(x_T, w_0 + y) \cdot \nabla_y \phi_h(w_0 + y) \, dy \\
&\quad + \int_Y A_h \left(x_T, \frac{x_T}{\epsilon} + y - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i \right) \nabla_x u_H(x_T) \cdot \nabla_y \phi_h(w_0 + y) \, dy \\
&= \int_Y A_h(x_T, w_0 + y) \nabla_y u_h(x_T, w_0 + y) \cdot \nabla_y \phi_h(w_0 + y) \, dy \\
&\quad + \int_Y A_h(x_T, w_0 + y) \nabla_x u_H(x_T) \cdot \nabla_y \phi_h(w_0 + y) \, dy \\
&= \int_Y A_h(x_T, y) \nabla_y u_h(x_T, y) \cdot \nabla_y \phi_h(y) \, dy \\
&\quad + \int_Y A_h(x_T, y) \nabla_x u_H(x_T) \cdot \nabla_y \phi_h(y) \, dy,
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Periodizität ausgenutzt wurde. Also (in dem wir der Testfunktion ϕ_h einen künstlichen Parameter x verpassen und über Ω integrieren):

$$0 = \int_{\Omega} \int_Y A_h(x, y) (\nabla_x u_H(x) + \nabla_y u_h(x, y)) \cdot \nabla_y \phi_h(x, y) \, dy \, dx. \quad (3.2.7)$$

Also nächstes betrachten wir die Grobskalen-Gleichung für eine beliebige Testfunk-

tion $\Phi_H \in V_H(\Omega)$. Hier ergibt sich analog zu den vorherigen Betrachtungen:

$$\begin{aligned}
(f, \Phi_H)_{L^2(\Omega)} &= \sum_{T \in \mathcal{T}_H} |T| \int_{Y_{T,\epsilon}} A_h^\epsilon(x) \nabla_x R_T(u_H)(x) \cdot \nabla_x \Phi_H(x) \, dx \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_H} |T| \int_Y A_h(x_T, y) (\nabla_x u_H(x_T) + \nabla_y u_h(x_T, y)) \cdot \nabla_x \Phi_H(x_T) \, dy \\
&= \int_\Omega \int_Y A_h(x, y) (\nabla_x u_H(x) + \nabla_y u_h(x, y)) \cdot \nabla_x \Phi_H(x) \, dy \, dx \\
&\stackrel{(3.2.7)}{=} \int_\Omega \int_Y A_h(x, y) (\nabla_x u_H(x) + \nabla_y u_h(x, y)) \cdot (\nabla_x \Phi_H(x) + \nabla_y \phi_h(x, y)) \, dy \, dx.
\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass die Quadraturformel für stückweise konstante Funktionen exakt ist. Da diese Gleichung für alle $\Phi_H \in V_H(\Omega)$ und für alle $\phi_h \in L^2(\Omega, W_h(Y))$ gilt, ist der Satz bewiesen. \square

3.2.3 Konvergenzbeweise im periodischen Fall

Mit Hilfe der Umformulierung der HMM wollen wir als nächstes Konvergenzaussagen für die HMM im periodischen Setting herleiten. Um eine genügend reguläre Lösung für eine optimale Konvergenzrate zu garantieren, treffen wir die folgenden Annahmen:

Annahme 3.2.11. *Zusätzlich zur Periodizitäts-Annahme 3.2.5, setzen wir im Folgenden voraus, dass A global Lipschitzstetig ist, d.h.*

$$A \in H^{1,\infty}(\Omega \times Y)$$

und dass Ω ein konvexes (polygonal berandetes) Gebiet ist.

Folgerung 3.2.12.

Analog zum Beweis des Satzes von Friedrich folgt unter Annahme 3.2.11

$$u_0 \in H^2(\Omega) \text{ und } u_1 \in L^2(\Omega, H^2(Y)).$$

Außerden gelten die Abschätzungen

$$|u_0|_{H^2(\Omega)} \leq C(\Omega, A) \|f\|_{L^2(\Omega)} \text{ und } |u_1|_{L^2(\Omega, H^2(Y))} \leq C(\Omega, A) |u_0|_{H^1(\Omega)}.$$

Im Folgenden verwenden wir die folgenden Definitionen:

Definition 3.2.13.

Die kontinuierliche 2-Skalen-Bilinearform \mathcal{B} ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}((\Phi, \phi), (\Psi, \psi)) \\ := \int_{\Omega} \int_Y A(x, y) (\nabla_x \Phi(x) + \nabla_y \phi(x, y)) (\nabla_x \Psi(x) + \nabla_y \psi(x, y)) dy dx \end{aligned}$$

und die diskrete 2-Skalen-Bilinearform \mathcal{B}_h durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h((\Phi, \phi), (\Psi, \psi)) \\ := \int_{\Omega} \int_Y A_h(x, y) (\nabla_x \Phi(x) + \nabla_y \phi(x, y)) (\nabla_x \Psi(x) + \nabla_y \psi(x, y)) dy dx. \end{aligned}$$

Der HMM-Fehler und der HMM-Korrektorf Fehler sind definiert durch $e^0 := u_H - u_0$ und $e^1 := u_h - u_1$.

Als Interpolationsoperator wollen wir den Lagrange-Operator verwenden:

Definition 3.2.14 (Lagrange-Interpolationsoperator).

Sei \mathcal{T}_H eine Triangulierung von Ω und \mathcal{N}_H die zugehörige Knotenmenge. Dann ist für jede stetige Funktion $\Phi \in C^0(\bar{\Omega})$ die zugehörige Lagrangeinterpolation (1. Ordnung) gegeben durch die eindeutige bestimmte Funktion $I_H(\Phi)$ mit

$$I_H(\Phi)(\bar{x}) = \Phi(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in \mathcal{N}_H \quad \text{und mit} \quad I_H(\Phi)|_T \in \mathbb{P}^1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_H.$$

Für den Lagrange-Interpolationsoperator gelten die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \|I_H(\Phi) - \Phi\|_{L^2(\Omega)} &\leq CH^2 |\Phi|_{H^2(\Omega)} \quad \text{und} \\ |I_H(\Phi) - \Phi|_{H^1(\Omega)} &\leq CH |\Phi|_{H^2(\Omega)} \quad \forall \Phi \in H^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}). \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Lemma 3.2.15.

Bezeichne $I_h : H^2(Y) \cap C^0(\bar{Y}) \rightarrow V_h(Y)$ den Standard Lagrange-Interpolationsoperator. Wir definieren nun

$$\tilde{I}_h : L^2(\Omega, H^2(Y)) \cap L^2(\Omega, C^0(\bar{Y}))$$

durch:

$$\tilde{I}_h(\phi)(x, y) := (I_h(\phi)(x, \cdot))(y) - \int_Y (I_h(\phi)(x, \cdot))(s) ds.$$

Es gilt:

$$\tilde{I}_h(\phi) \in L^2(\Omega, W_h(Y)) \quad \forall \phi \in L^2(\Omega, H^2(Y)) \cap L^2(\Omega, C^0(\bar{Y})) \cap L^2(\Omega, \tilde{H}_\#^1(Y))$$

und für dieselben Testfunktionen:

$$\begin{aligned} \|\tilde{I}_h(\phi) - \phi\|_{L^2(\Omega \times Y)} &\leq Ch^2 |\phi|_{L^2(\Omega, H^2(Y))} \quad \text{und} \\ |\tilde{I}_h(\phi) - \phi|_{L^2(\Omega, H^1(Y))} &\leq Ch |\phi|_{L^2(\Omega, H^2(Y))}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Beweis.

Zunächst erhält der Interpolationsoperator den Mittelwert 0:

$$\begin{aligned} \int_Y (\tilde{I}_h(\phi)(x, y)) dy &= \int_Y (I_h(\phi)(x, \cdot))(y) dy - \int_Y \int_Y (I_h(\phi)(x, \cdot))(s) ds dy \\ &= \int_Y (I_h(\phi)(x, \cdot))(y) dy - \int_Y (I_h(\phi)(x, \cdot))(y) dy = 0. \end{aligned}$$

Dass periodische Funktionen wieder auf periodische Funktionen abgebildet werden ist klar, denn für sich parallel gegenüberliegende Randknoten \bar{y}_1 und \bar{y}_2 gilt (wegen der Periodizität) $\phi(x, \bar{y}_1) = \phi(x, \bar{y}_2)$. Andererseits überträgt sich das sofort:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_h(\phi)(x, \bar{y}_1) &= (I_h(\phi)(x, \cdot))(\bar{y}_1) - \int_Y (I_h(\phi)(x, \cdot))(s) ds \\ &= \phi(x, \bar{y}_1) - \int_Y (I_h(\phi)(x, \cdot))(s) ds \\ &= \phi(x, \bar{y}_2) - \int_Y (I_h(\phi)(x, \cdot))(s) ds = \tilde{I}_h(\phi)(x, \bar{y}_2). \end{aligned}$$

Die stückweise lineare Interpolation zwischen den Knoten erhält diese Eigenschaft auf dem gesamten Rand. Es bleibt nur noch die Abschätzung zu zeigen. Hier gilt

wegen dem Mittelwert 0:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{I}_h(\phi)(x, \cdot) - \phi(x, \cdot)\|_{L^2(Y)} &= \|(I_h(\phi)(x, \cdot)) - \int_Y (I_h(\phi)(x, \cdot))(s) ds - \phi(x, \cdot)\|_{L^2(Y)} \\
&= \|(I_h(\phi)(x, \cdot)) - \int_Y (I_h(\phi)(x, \cdot))(s) ds + \int_Y \phi(x, \cdot)(s) ds - \phi(x, \cdot)\|_{L^2(Y)} \\
&\leq \|(I_h(\phi)(x, \cdot)) - \phi(x, \cdot)\|_{L^2(Y)} + \left\| \int_Y (I_h(\phi)(x, \cdot))(s) ds - \int_Y \phi(x, \cdot)(s) ds \right\|_{L^2(Y)} \\
&\leq Ch^2 |\phi(x, \cdot)|_{H^2(Y)} + \left(\int_Y \left(\int_Y (I_h(\phi)(x, \cdot))(s) - \phi(x, \cdot)(s) ds \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Ch^2 |\phi(x, \cdot)|_{H^2(Y)} + \left(\int_Y \int_Y ((I_h(\phi)(x, \cdot))(s) - \phi(x, \cdot)(s))^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= Ch^2 |\phi(x, \cdot)|_{H^2(Y)} + \|(I_h(\phi)(x, \cdot)) - \phi(x, \cdot)\|_{L^2(Y)} \\
&\leq 2Ch^2 |\phi(x, \cdot)|_{H^2(Y)}.
\end{aligned}$$

Quadrieren und integrieren über Ω liefert die erste Endabschätzung. Die zweite Abschätzung zeigt man analog. \square

Satz 3.2.16 (H^1 -Abschätzung).

Unter der Annahme 3.2.11 gilt die folgende a-priori Abschätzung für den H^1 -Fehler zwischen homogenisierter Lösung und HMM-Approximation bzw. zwischen der jeweiligen Korrektoren:

$$\|u_0 - u_H\|_{H^1(\Omega)} + \|u_1 - u_h\|_{L^2(\Omega, H^1(Y))} \leq C(H + h). \quad (3.2.10)$$

Die Konstante C ist dabei unabhängig von H und h .

Folgerung 3.2.17.

Im gegebenen Setting konvergiert die Heterogene Mehrskalen Methode mit linearer Geschwindigkeit in der H^1 -Norm gegen die homogenisierte Lösung u_0 .

Beweis.

Ziel ist es eine Abschätzung für den Fehler $\|e^0\|_{H^1(\Omega)} + \|e^1\|_{L^2(\Omega, H^1(Y))}$ zu finden. Zunächst überlegen wir uns, dass es genügt eine Abschätzung für

$$\|\nabla_x e^0 + \nabla_y e^1\|_{L^2(\Omega \times Y)}$$

herzuleiten. Denn es gilt mit Hilfe der Poincaré-Ungleichung aus Satz 2.1.9 (einmal für Funktionen mit Nullrandwerten - $e^0 \in \dot{H}^1(\Omega)$ - und einmal für Funktionen mit Mittelwert Null - $e^1(x, \cdot) \in \tilde{H}_\#^1(Y)$):

$$\begin{aligned} & \|e^0\|_{H^1(\Omega)} + \|e^1\|_{L^2(\Omega, H^1(Y))} \\ & \leq C_P^1 |e^0|_{H^1(\Omega)} + C_P^2 |e^1|_{L^2(\Omega, H^1(Y))} \\ & \leq C \left(\int_{\Omega} \int_Y |\nabla_x e^0(x)|^2 + |\nabla_y e^1(x, y)|^2 dy dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & = C \left(\int_{\Omega} \int_Y |\nabla_x e^0(x)|^2 + |\nabla_y e^1(x, y)|^2 dy dx \right. \\ & \quad \left. + 2 \int_{\Omega} \int_{\partial Y} (\nabla_x e^0(x) \cdot n_Y) e^1(x, y) d\sigma(y) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & = C \left(\int_{\Omega} \int_Y |\nabla e^0(x)|^2 + |\nabla_y e^1(x, y)|^2 dy dx + 2 \int_{\Omega} \int_Y \nabla_x e^0 \cdot \nabla_y e^1(x, y) dy dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & = C \left(\int_{\Omega} \int_Y |\nabla_x e^0(x) + \nabla_y e^1(x, y)|^2 dy dx \right)^{\frac{1}{2}} = C \|\nabla_x e^0 + \nabla_y e^1\|_{L^2(\Omega \times Y)}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Periodizität von e^1 genutzt, was uns

$$\int_{\Omega} \int_{\partial Y} (\nabla_x e^0(x) \cdot n_Y) e^1(x, y) d\sigma(y) dx = 0$$

liefert. Es genügt also $\|\nabla_x e^0 + \nabla_y e^1\|_{L^2(\Omega \times Y)}$ abzuschätzen. Seien dazu $\Phi_H \in V_H(\Omega)$ und $\phi_h \in L^2(\Omega, W_h(Y))$ beliebig. Wir erhalten zunächst:

$$\begin{aligned} & \alpha \|\nabla_x(u_H - \Phi_H) + \nabla_y(u_h - \phi_h)\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 \\ & \leq \mathcal{B}_h((u_H - \Phi_H, u_h - \phi_h), (u_H - \Phi_H, u_h - \phi_h)) \\ & = \mathcal{B}_h((u_H, u_h), (u_H - \Phi_H, u_h - \phi_h)) - \mathcal{B}_h((\Phi_H, \phi_h), (u_H - \Phi_H, u_h - \phi_h)) \\ & = \mathcal{B}((u_0, u_1), (u_H - \Phi_H, u_h - \phi_h)) - \mathcal{B}_h((\Phi_H, \phi_h), (u_H - \Phi_H, u_h - \phi_h)) \\ & = (\mathcal{B} - \mathcal{B}_h)((u_0, u_1), (u_H - \Phi_H, u_h - \phi_h)) \\ & \quad + \mathcal{B}_h((u_0 - \Phi_H, u_1 - \phi_h), (u_H - \Phi_H, u_h - \phi_h)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \int_Y (A - A_h)(x, y) (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \\
&\quad \cdot (\nabla_x(u_H - \Phi_H)(x) + \nabla_y(u_h - \phi_h))(x, y) dy dx \\
&+ \int_{\Omega} \int_Y A_h(x, y) (\nabla_x(u_0 - \Phi_H)(x) + \nabla_y(u_1 - \phi_h)(x, y)) \\
&\quad \cdot (\nabla_x(u_H - \Phi_H)(x) + \nabla_y(u_h - \phi_h))(x, y) dy dx \\
&\leq \|A - A_h\|_{L^\infty(\Omega \times Y)} \|\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1\|_{L^2(\Omega \times Y)} \\
&\quad \cdot \|\nabla_x(u_H - \Phi_H) + \nabla_y(u_h - \phi_h)\|_{L^2(\Omega \times Y)} \\
&+ \|A\|_{L^\infty(\Omega \times Y)} \|\nabla_x(u_0 - \Phi_H) + \nabla_y(u_1 - \phi_h)\|_{L^2(\Omega \times Y)} \\
&\quad \cdot \|\nabla_x(u_H - \Phi_H) + \nabla_y(u_h - \phi_h)\|_{L^2(\Omega \times Y)}.
\end{aligned}$$

Also wegen $\|\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1\|_{L^2(\Omega \times Y)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$:

$$\begin{aligned}
&\|\nabla_x(u_H - \Phi_H) + \nabla_y(u_h - \phi_h)\|_{L^2(\Omega \times Y)} \\
&\leq C \|A - A_h\|_{L^\infty(\Omega \times Y)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + C \|A\|_{L^\infty(\Omega \times Y)} \|\nabla_x(u_0 - \Phi_H) + \nabla_y(u_1 - \phi_h)\|_{L^2(\Omega \times Y)}.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich somit für den Fehler:

$$\begin{aligned}
&\|\nabla_x e^0 + \nabla_y e^1\|_{L^2(\Omega, H^1(Y))} \\
&\leq \|\nabla_x(u_0 - \Phi_H) + \nabla_y(u_1 - \phi_h)\|_{L^2(\Omega \times Y)} + \|\nabla_x(u_H - \Phi_H) + \nabla_y(u_h - \phi_h)\|_{L^2(\Omega \times Y)} \\
&\leq C(A, f) \underbrace{\|\nabla_x(u_0 - \Phi_H) + \nabla_y(u_1 - \phi_h)\|_{L^2(\Omega \times Y)}}_{=:I} + C(A, f) \underbrace{\|A - A_h\|_{L^\infty(\Omega \times Y)}}_{=:II}.
\end{aligned}$$

Als nächstes wählen wir $\Phi_H = I_H(u_0)$ und $\phi_h = \tilde{I}_h(u_1)$, wobei I_H den Lagrange-Interpolationsoperator aus Definition 3.2.14 bezeichnet und \tilde{I}_h den Interpolationsoperator aus Übungsaufgabe 3.2.15 bezeichnet. Dann gilt für die einzelnen Terme unter Nutzung von (3.2.8) und (3.2.9) :

$$\begin{aligned}
|I| &= \|\nabla_x(u_0 - I_H(u_0)) + \nabla_y(u_1 - \tilde{I}_h(u_1))\|_{L^2(\Omega \times Y)} \\
&\leq |u_0 - I_H(u_0)|_{H^1(\Omega)} + |u_1 - \tilde{I}_h(u_1)|_{L^2(\Omega, H^1(Y))} \\
&\leq CH|u_0|_{H^2(\Omega)} + Ch|u_1|_{L^2(\Omega, H^2(Y))} \\
&\leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}(H + h).
\end{aligned}$$

Für den zweiten Term II erhalten wir eine ähnliche Abschätzung. Da A_h stückweise konstant ist und da wegen der Lipschitzstetigkeit von A gilt, dass

$$\sup_{(x,y) \in T \times K} |a_{ij}(x_T, y_K) - a(x, y)| \leq L \sup_{(x,y) \in T \times K} |(x_T, y_K) - (x, y)|_2 \leq L(H + h),$$

folgern wir $\|A - A_h\|_{L^\infty(\Omega \times Y)} \leq C(H + h)$. Insgesamt ergibt sich somit:

$$\|e^0\|_{H^1(\Omega)} + \|e^1\|_{L^2(\Omega, H^1(Y))} \leq C\|\nabla_x e^0 + \nabla_y e^1\|_{L^2(\Omega, H^1(Y))} \leq C(H + h),$$

wobei C nur von A und f abhängt. \square

Als nächstes wollen wir noch eine Konvergenzrate für den L^2 -Fehler $\|u_0 - u_H\|_{L^2(\Omega)}$ bestimmen. Dazu führen wir zunächst ein passendes duales Problem ein:

Definition 3.2.18 (Duales Problem).

Wir nennen $(z_0, z_1) \in \dot{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega, \tilde{H}_\#^1(Y))$ die eindeutige Lösung des dualen 2-Skalen-Problems, wenn für alle $(\Phi, \phi) \in \dot{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega, \tilde{H}_\#^1(Y))$ gilt:

$$\mathcal{B}((\Phi, \phi), (z_0, z_1)) = (u_0 - u_H, \Phi)_{L^2(\Omega)} \quad (3.2.11)$$

Folgerung 3.2.19.

Genau wie in Folgerung 3.2.12, erhalten wir unter Annahme 3.2.11 die folgenden Aussagen:

$$z_0 \in H^2(\Omega) \text{ und } z_1 \in L^2(\Omega, H^2(Y)).$$

Außerdem gelten die Abschätzungen

$$|z_0|_{H^2(\Omega)} \leq C(\Omega, A)\|u_0 - u_H\|_{L^2(\Omega)} \text{ und } |z_1|_{L^2(\Omega, H^2(Y))} \leq C(\Omega, A)|z_0|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.2.12)$$

Lemma 3.2.20.

Es gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|z_0\|_{H^1(\Omega)} &\leq C(\Omega, A)\|u_0 - u_H\|_{L^2(\Omega)}, \\ |z_1|_{L^2(\Omega, H^1(Y))} &\leq C(\Omega, A)\|u_0 - u_H\|_{L^2(\Omega)} \text{ und} \\ |z_1|_{L^2(\Omega, H^2(Y))} &\leq C(\Omega, A)\|u_0 - u_H\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Wir haben nun alle Resultate zusammen, um das folgende Theorem zu beweisen:

Satz 3.2.21 (L^2 -Abschätzung).

Unter der Annahme 3.2.11 gilt die folgende a-priori Abschätzung für den L^2 -Fehler zwischen homogenisierter Lösung und HMM-Approximation:

$$\|u_0 - u_H\|_{L^2(\Omega)} \leq C(H^2 + h^2) + C\|A - A_h\|_{L^\infty(\Omega \times Y)},$$

wobei C unabhängig von H und h ist.

Folgerung 3.2.22.

Satz 3.2.21 liefert uns, dass die HMM im L^2 -Sinne mit quadratischer Ordnung (bis auf einen Approximationsfehler) gegen die homogenisierte Lösung konvergiert.

Beweis von Satz 3.2.21.

Als erstes nutzen wir das duale Problem, um eine Fehleridentität herzuleiten. Seien dazu $\Phi_H \in V_H(\Omega)$ und $\phi_h \in L^2(\Omega, W_h(Y))$ beliebig. Es gilt:

$$\begin{aligned} \|e^0\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \mathcal{B}((e^0, e^1), (z_0, z_1)) \\ &= \mathcal{B}((e^0, e^1), (z_0, z_1)) - \mathcal{B}((u_0, u_1), (\Phi_H, \phi_h)) + \mathcal{B}_h((u_H, u_h), (\Phi_H, \phi_h)) \\ &= \underbrace{\mathcal{B}((e^0, e^1), (z_0 - \Phi_H, z_1 - \phi_h))}_{=: \text{I}} + \underbrace{(\mathcal{B}_h - \mathcal{B})((u_H, u_h), (\Phi_H, \phi_h))}_{=: \text{II}}. \end{aligned}$$

Wir wählen nun $\Phi_H = I_H(z_0)$ und $\phi_h = \tilde{I}_h(z_1)$, wobei I_H wieder der Lagrange-Interpolationsoperator aus Definition 3.2.14 ist und \tilde{I}_h der Interpolationsoperator

aus Lemma 3.2.15. Dann gilt für I:

$$\begin{aligned}
|I| &\leq |\mathcal{B}((e^0, e^1), (z_0 - I_H(z_0), z_1 - \tilde{I}_h(z_1)))| \\
&\leq C(|e^0|_{H^1(\Omega)} + |e^1|_{L^2(\Omega, H^1(Y))}) \\
&\quad \cdot (|z_0 - I_H(z_0)|_{H^1(\Omega)} + |z_1 - \tilde{I}_h(z_1)|_{L^2(\Omega, H^1(Y))}) \\
&\stackrel{(3.2.10)}{\leq} C(H + h) (|z_0 - I_H(z_0)|_{H^1(\Omega)} + |z_1 - \tilde{I}_h(z_1)|_{L^2(\Omega, H^1(Y))}) \\
&\stackrel{(3.2.8)+(3.2.9)}{\leq} C(H + h) (H|z_0|_{H^2(\Omega)} + h|z_1|_{L^2(\Omega, H^2(Y))}) \\
&\stackrel{(3.2.12)}{\leq} C(H^2 + h^2)\|e^0\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Es bleibt II abzuschätzen. Hier erhalten wir:

$$\begin{aligned}
|II| &\leq |(\mathcal{B}_h - \mathcal{B})((u_H, u_h), (I_H(z_0), \tilde{I}_h(z_1)))| \\
&\leq \|A - A_h\|_{L^\infty(\Omega \times Y)} \|\nabla_x u_H + \nabla_y u_h\|_{L^2(\Omega \times Y)} \|\nabla_x I_H(z_0) + \nabla_y \tilde{I}_h(z_1)\|_{L^2(\Omega \times Y)} \\
&\leq C\|A - A_h\|_{L^\infty(\Omega \times Y)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla_x I_H(z_0) + \nabla_y \tilde{I}_h(z_1)\|_{L^2(\Omega \times Y)} \\
&\leq C\|A - A_h\|_{L^\infty(\Omega \times Y)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|e^0\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Denn:

$$\begin{aligned}
&\|\nabla_x I_H(z_0) + \nabla_y \tilde{I}_h(z_1)\|_{L^2(\Omega \times Y)} \\
&\leq |I_H(z_0) - z_0 + z_0|_{H^1(\Omega)} + |\tilde{I}_h(z_1) - z_1 + z_1|_{L^2(\Omega, H^1(Y))} \\
&\leq |I_H(z_0) - z_0|_{H^1(\Omega)} + |z_0|_{H^1(\Omega)} + |\tilde{I}_h(z_1) - z_1|_{L^2(\Omega, H^1(Y))} + |z_1|_{L^2(\Omega, H^1(Y))} \\
&\stackrel{(3.2.13)}{\leq} |I_H(z_0) - z_0|_{H^1(\Omega)} + |\tilde{I}_h(z_1) - z_1|_{L^2(\Omega, H^1(Y))} + \|e^0\|_{L^2(\Omega)} \\
&\stackrel{(3.2.8)+(3.2.9)}{\leq} CH|z_0|_{H^2(\Omega)} + Ch|z_1|_{L^2(\Omega, H^2(Y))} + \|e^0\|_{L^2(\Omega)} \\
&\stackrel{(3.2.13)}{\leq} C(H + h + 1)\|e^0\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C\|e^0\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Insgesamt also:

$$\begin{aligned}
\|e^0\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq I + II \\
&\leq C(H^2 + h^2)\|e^0\|_{L^2(\Omega)} + C\|A - A_h\|_{L^\infty(\Omega \times Y)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|e^0\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Durch $\|e^0\|_{L^2(\Omega)}$ teilen liefert das gewünschte Resultat. \square

3.2.4 A-posteriori Fehlerabschätzung

Wir wollen uns nun mit einer a-posteriori Fehlerabschätzung für die HMM beschäftigen. Dazu ist es zunächst nötig eine zweite Fehleridentität herzuleiten. Diese zeigt insbesondere, dass sich der Fehler $\|u_0 - u_H\|_{L^2(\Omega)}$ in einen Residual-Fehler und einen Approximations-Fehler aufspalten lässt.

Lemma 3.2.23 (Fehler Identität).

Sei u_0 die Lösung des homogenisierten Problems, u_H deren HMM Approximation und (z_0, z_1) die Lösung des Dualen Problems aus Definition 3.2.18. Unter den allgemeinen Annahmen 3.2.11 und 3.2.5 gilt für alle $(\Phi_H, \phi_h) \in V_H \times L^2(\Omega, W_h(Y))$:

$$\begin{aligned} \|u_0 - u_H\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} f(z_0 - \Phi_H) \\ &\quad - \int_{\Omega} \int_Y A_h(\nabla_x u_H + \nabla_y u_h) \cdot (\nabla_x(z_0 - \Phi_H) + \nabla_y(z_1 - \phi_h)) \\ &\quad - \int_{\Omega} \int_Y (A - A_h)(\nabla_x u_H + \nabla_y u_h) \cdot (\nabla_x z_0 + \nabla_y z_1). \end{aligned}$$

Beweis.

Wir nutzen die Definition des Dualen Problems, testen mit $\Phi = u_0 - u_H$ und $\phi = u_1 - u_h$ und erhalten:

$$\|u_0 - u_H\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \int_Y A(\nabla_x z_0 + \nabla_y z_1) \cdot (\nabla_x(u_0 - u_H) + \nabla_y(u_1 - u_h)).$$

Im nächsten Schritt nutzen wir die Galerkin Orthogonalität. Wir erhalten für beliebige $(\Phi_H, \phi_h) \in V_H \times L^2(\Omega, W_h(Y))$:

$$\begin{aligned} &\|e^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \mathcal{B}((e^0, e^1), (z_0, z_1)) \\ &= \mathcal{B}((e^0, e^1), (z_0, z_1)) + \mathcal{B}_h((u_H, u_h), (\Phi_H, \phi_h)) - \mathcal{B}((u_0, u_1), (\Phi_H, \phi_h)) \\ &= \mathcal{B}((u_0, u_1), (z_0 - \Phi_H, z_1 - \phi_h)) - \mathcal{B}_h((u_H, u_h), (z_0 - \Phi_H, z_1 - \phi_h)) \\ &\quad - (\mathcal{B} - \mathcal{B}_h)((u_H, u_h), (z_0, z_1)) \\ &= (f, z_0 - \Phi_H)_{L^2(\Omega)} - \mathcal{B}_h((u_H, u_h), (z_0 - \Phi_H, z_1 - \phi_h)) \\ &\quad - (\mathcal{B} - \mathcal{B}_h)((u_H, u_h), (z_0, z_1)). \end{aligned}$$

□

Wir definieren nun äußere Normale und Kanten-Sprünge:

Definition 3.2.24 (Kanten-Sprünge).

Für jedes beschränkte Gebiet M bezeichne $n_M : \partial M \rightarrow \mathbb{R}^n$ die äußere Normale an den Rand von M . Für zwei Gebiete M_1 und M_2 mit $\Gamma := \bar{M}_1 \cap \bar{M}_2$ und für eine Funktion $g \in (L^\infty(M))^n$ mit $g|_{M_i} \in (C^0(M_i))^d$, $i = 1, 2$, definieren wir den Sprung $[g]_\Gamma : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ von g über Γ durch

$$[g]_\Gamma(x) := \left| \lim_{m_1 \rightarrow \infty} g(x_{m_1}) \cdot n_{M_1}(x) + \lim_{m_2 \rightarrow \infty} g(x_{m_2}) \cdot n_{M_2}(x) \right|,$$

wobei x_{m_i} eine Folge in M_i ist, die gegen x konvergiert ($x_{m_i} \rightarrow x$).

Im Folgenden bezeichne $\Gamma(\mathcal{T}_H)$ die Kanten-Menge von \mathcal{T}_H , das heißt

$$\Gamma(\mathcal{T}_H) := \{E \mid E = \bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \neq \emptyset, \text{codim}(E) = 1 \text{ und } T_1, T_2 \in \mathcal{T}_H\}.$$

Die Kanten-Menge $\Gamma(\mathcal{T}_h)$ von \mathcal{T}_h sei analog definiert.

Bemerkung: der Sprung deiner Funktion über eine Randkante von Y ($E_Y \in \Gamma(\mathcal{T}_h)$ und $E_Y \subset \partial Y$) ist dank der Periodizität der Triangulierung wohldefiniert.

Satz 3.2.25 (A-posteriori Fehlerabschätzung).

Unter der Annahme 3.2.11 existieren Konstanten $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \tilde{C}_4 > 0$, unabhängig von H und h , so dass die folgende a-posteriori Fehlerabschätzung gilt:

$$\|u_0 - u_H\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta_H,$$

wobei η_H definiert ist durch:

$$\begin{aligned} \eta_H := & \tilde{C}_1 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_H} H_T^4 \|f\|_{L^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \tilde{C}_2 \left(\sum_{E \in \Gamma(\mathcal{T}_H)} H_E^3 \tilde{\zeta}_E \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + \tilde{C}_3 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_H} \left(\sum_{E_Y \in \Gamma(\mathcal{T}_h)} h_{E_Y}^3 \tilde{\xi}_{T, E_Y} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + \tilde{C}_4 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_H} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tilde{\mu}_{T, K} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Die lokalen Fehlerindikatoren sind wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}_E &:= \|[A_h(\nabla_x u_H + \nabla_y u_h)]_E\|_{L^2(E \times Y)}^2, \\ \tilde{\xi}_{T,E_Y} &:= \|[A_h(\nabla_x u_H + \nabla_y u_h)]_{E_Y}\|_{L^2(T \times E_Y)}^2, \\ \tilde{\mu}_{T,K} &:= \|(A - A_h)(\nabla_x u_H + \nabla_y u_h)\|_{L^2(T \times K)}^2.\end{aligned}$$

Der von $\|f\|_{L^2(\Omega)}$ abhängige Summand konvergiert offensichtlich mit quadratischer Ordnung gegen Null. Die beiden Summanden, die von den Termen $\tilde{\zeta}_E$ and $\tilde{\xi}_{T,E_Y}$ abhängen scheinen lediglich mit der Ordnung $O(\frac{3}{2})$ zu konvergieren. Jedoch liefern die Gradientensprünge den fehlenden Anteil zur erwarteten quadratischen Konvergenzordnung. Der letzte Summand, $(\sum_{T \in \mathcal{T}_H} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tilde{\mu}_{T,K})^{\frac{1}{2}}$, hängt schließlich von den Approximationseigenschaften von A_h ab. In unserem Fall würde dies eine lineare Konvergenzrate liefern, da A global Lipschitz-stetig ist.

Beweis der a-posteriori Abschätzung.

Unter Nutzung von Lemma 3.2.23 erhalten wir:

$$\begin{aligned}\|u_0 - u_H\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \underbrace{\int_{\Omega} f(z_0 - \Phi_H)}_{=: \text{I}} \\ &\quad - \underbrace{\int_{\Omega} \int_Y A_h(\nabla_x u_H + \nabla_y u_h) \cdot (\nabla_x(z_0 - \Phi_H) + \nabla_y(z_1 - \phi_h))}_{=: \text{II}} \\ &\quad - \underbrace{\int_{\Omega} \int_Y (A - A_h)(\nabla_x u_H + \nabla_y u_h) \cdot (\nabla_x z_0 + \nabla_y z_1)}_{=: \text{III}}.\end{aligned}$$

Wir wählen erneut $\Phi_H = I_H(z_0)$ und $\phi_h = \tilde{I}_h(z_1)$, wobei I_H der Lagrange-Interpolationsoperator aus Definition 3.2.14 ist und \tilde{I}_h der Interpolationsoperator

aus Lemma 3.2.15. Mit $z_0 \in H^2(\Omega)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} |\mathbf{I}| &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_H} \|f\|_{L^2(T)} \|z_0 - \Phi_H\|_{L^2(T)} \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_H} \|f\|_{L^2(T)} C H_T^2 |z_0|_{H^2(T)} \\ &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_H} \|f\|_{L^2(T)}^2 H_T^4 \right)^{\frac{1}{2}} |z_0|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq \tilde{C}_1 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_H} \|f\|_{L^2(T)}^2 H_T^4 \right)^{\frac{1}{2}} \|u_0 - u_H\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung splitten wir Π in Π_1 und Π_2

$$\begin{aligned} |\Pi_1| &:= \left| \int_{\Omega} \int_Y A_h(x, y) (\nabla_x u_H(x) + \nabla_y u_h(x, y)) \cdot \nabla_x (z_0(x) - I_H(z_0)(x)) \, dx \, dy \right|, \\ |\Pi_2| &:= \left| \int_{\Omega} \int_Y A_h(x, y) (\nabla_x u_H(x) + \nabla_y u_h(x, y)) \cdot \nabla_y (z_1(x, y) - \tilde{I}_h(z_1)(x, y)) \, dx \, dy \right| \end{aligned}$$

und definieren $g(x) := \int_Y A_h(x, y) (\nabla_x u_H(x) + \nabla_y u_h(x, y)) \, dy$ (g ist also eine Konstante auf T). Wir erhalten:

$$\begin{aligned} |\Pi_1| &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_H} \int_T \left(\int_Y A_h(x, y) (\nabla_x u_H(x) + \nabla_y u_h(x, y)) \, dy \right) \cdot \nabla_x (z_0(x) - I_H(z_0)(x)) \, dx \right| \\ &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_H} \int_T g(x_T) \cdot \nabla_x (z_0(x) - I_H(z_0)(x)) \, dx \right| \\ &= \left| \sum_{E \in \Gamma(\mathcal{T}_H)} \int_E [g]_E(x) (z_0(x) - I_H(z_0)(x)) \, dx \right| \\ &\leq \sum_{E \in \Gamma(\mathcal{T}_H)} \| [g]_E \|_{L^2(E)} \|z_0 - I_H(z_0)\|_{L^2(\partial T)} \\ &\leq C \sum_{E \in \Gamma(\mathcal{T}_H)} \| [g]_E \|_{L^2(E)} H^{\frac{3}{2}} |z_0|_{H^2(T)} \\ &\leq C \left(\sum_{E \in \Gamma(\mathcal{T}_H)} H_E^3 \| [g]_E \|_{L^2(E)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{E \in \Gamma(\mathcal{T}_H)} |z_0|_{H^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Außerdem erhalten wir

$$\left(\sum_{E \in \Gamma(\mathcal{T}_H)} |z_0|_{H^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \tilde{C} |z_0|_{H^2(\Omega)},$$

wobei \tilde{C} die maximale Anzahl von Kanten eines Elements $T \in \mathcal{T}_H$ bezeichnet. Mit der Abschätzung

$$\begin{aligned} & \| [g]_E \|_{L^2(E)}^2 \\ &= \int_E \left(\int_Y [A_h(\nabla_x u_H + \nabla_y u_h)]_E \right)^2 \\ &\leq |Y| \| [A_h(\nabla_x u_H + \nabla_y u_h)]_E \|_{L^2(E \times Y)}^2 =: \tilde{\zeta}_E, \end{aligned}$$

ergibt sich

$$|\Pi_1| \leq C \left(\sum_{E \in \Gamma(\mathcal{T}_H)} H^3 \tilde{\zeta}_E \right)^{\frac{1}{2}} |z_0|_{H^2(\Omega)} \leq \tilde{C}_2 \left(\sum_{E \in \Gamma(\mathcal{T}_H)} H^3 \tilde{\zeta}_E \right)^{\frac{1}{2}} \|u_0 - u_H\|_{L^2(\Omega)}.$$

Um $|\Pi_2|$ abzuschätzen (wobei $\phi_h(x, \cdot) := \tilde{I}_h(z_1(x, \cdot))$), erhalten wir mit der Notation $g(x, y) := A_h(x, y)(\nabla_x u_H(x) + \nabla_y u_h(x, y))$ das Folgende:

$$\begin{aligned} |\Pi_2| &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_H} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_T \int_{\partial K} g(x, y) \cdot n_K(y) (z_1 - \tilde{I}_h(z_1))(x, y) \, dx \, dy \right| \\ &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_H} \int_T \left(\sum_{E_Y \in \Gamma(\mathcal{T}_h)} \int_{E_Y} [g(x_T, \cdot)]_{E_Y} (z_1 - \tilde{I}_h(z_1))(x, y) \, dy \right) \, dx \right| \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_H} \int_T \left(\sum_{E_Y \in \Gamma(\mathcal{T}_h)} \| [g(x_T, \cdot)]_{E_Y} \|_{L^2(E_Y)} \| (z_1 - \tilde{I}_h(z_1))(x, \cdot) \|_{L^2(E_Y)} \right) \, dx \end{aligned}$$

Da außerdem gilt

$$\| (z_1 - \tilde{I}_h(z_1))(x, \cdot) \|_{L^2(E_Y)} \leq \| (z_1 - \tilde{I}_h(z_1))(x, \cdot) \|_{L^2(\partial K)} \leq C h_K^{\frac{3}{2}} |z_1(x, \cdot)|_{H^2(K)},$$

erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_H} \int_T \left(\sum_{E_Y \in \Gamma(\mathcal{T}_h)} \| [g(x_T, \cdot)]_{E_Y} \|_{L^2(E_Y)} \| (z_1 - \tilde{I}_h(z_1))(x, \cdot) \|_{L^2(E_Y)} \right) \, dx \\ &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_H} \int_T \sum_{E_Y \in \Gamma(\mathcal{T}_h)} \| [g(x_T, \cdot) \cdot n]_{E_Y} \|_{L^2(E_Y)}^2 h_l^3 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_H} \int_T \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |z_1(x, \cdot)|_{H^2(K)}^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_H} \sum_{E_Y \in \Gamma(\mathcal{T}_h)} \| [g]_{E_Y} \|_{L^2(T \times E_Y)}^2 h_l^3 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_H} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |z_1|_{L^2(T, H^2(K))}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_H} \sum_{E_Y \in \Gamma(\mathcal{T}_h)} \| [g]_{E_Y} \|_{L^2(T \times E_Y)}^2 h_{E_Y}^3 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot |z_1|_{L^2(\Omega, H^2(Y))}.
\end{aligned}$$

Mit der Definition von $\tilde{\xi}_{T, E_Y}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\text{II}_2| &= \left| \int_{\Omega} \int_Y A_h(x, y) (\nabla_x u_H(x) + \nabla_y u_h(x, y)) \cdot \nabla_y (z_1(x, y) - \tilde{I}_h(z_1)(x, y)) \right| \\
&\leq \tilde{C}_3 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_H} \sum_{E_Y \in \Gamma(\mathcal{T}_h)} h_{E_Y}^3 \tilde{\xi}_{T, E_Y} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|u_0 - u_H\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

III wird wie folgt behandelt:

$$\begin{aligned}
|\text{III}| &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_H} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\| (A - A_h)(\nabla_x u_H + \nabla_y u_h) \|_{L^2(T \times K)} \cdot \\
&\quad \| \nabla_x z_0 + \nabla_y z_1 \|_{L^2(T \times K)}) \\
&\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_H} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \| (A - A_h)(\nabla_x u_H + \nabla_y u_h) \|_{L^2(T \times K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \\
&\quad (|z_0|_{H^1(\Omega)} + |z_1|_{L^2(\Omega, H^1(Y))}).
\end{aligned}$$

Der Rest der Abschätzung ist klar und wir erhalten:

$$|\text{III}| \leq \tilde{C}_4 \|u_0 - u_H\|_{L^2(\Omega)} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_H} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tilde{\mu}_{T, K} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Kombination der Teilergebnisse liefert das Endresultat. □

Literaturverzeichnis

- [1] A. Abdulle. The finite element heterogeneous multiscale method: a computational strategy for multiscale PDEs. In *Multiple scales problems in biomathematics, mechanics, physics and numerics*, volume 31 of *GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl.*, pages 133–181. Gakkōtoshō, Tokyo, 2009. [63](#)
- [2] A. Abdulle and A. Nonnenmacher. Adaptive finite element heterogeneous multiscale method for homogenization problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 200(37-40):2710–2726, 2011. [63](#)
- [3] Grégoire Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(6):1482–1518, 1992. [5](#), [35](#), [43](#)
- [4] Hans Wilhelm Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer, Berlin, 2002. [5](#), [22](#), [25](#), [53](#)
- [5] Doina Cioranescu and Patrizia Donato. *An introduction to homogenization*, volume 17 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1999. [22](#), [34](#)
- [6] Weinan E and Bjorn Engquist. The heterogeneous multiscale methods. *Commun. Math. Sci.*, 1(1):87–132, 2003. [59](#), [63](#)
- [7] Weinan E and Björn Engquist. The heterogeneous multi-scale method for homogenization problems. In *Multiscale methods in science and engineering*, volume 44 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, pages 89–110. Springer, Berlin, 2005. [63](#)
- [8] Y. Efendiev, T. Hou, and V. Ginting. Multiscale finite element methods for nonlinear problems and their applications. *Commun. Math. Sci.*, 2(4):553–589, 2004. [63](#)
- [9] Yalchin Efendiev and Thomas Y. Hou. *Multiscale finite element methods*, volume 4 of *Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 2009. Theory and applications. [63](#)

- [10] Patrick Henning. *Heterogeneous multiscale finite element methods for advection-diffusion and nonlinear elliptic multiscale problems*. Münster: Univ. Münster, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Fachbereich Mathematik und Informatik (Diss.). ii, 152 p. , 2011. [63](#)
- [11] Patrick Henning and Mario Ohlberger. The heterogeneous multiscale finite element method for elliptic homogenization problems in perforated domains. *Numer. Math.*, 113(4):601–629, 2009. [63](#)
- [12] Patrick Henning and Mario Ohlberger. The heterogeneous multiscale finite element method for advection-diffusion problems with rapidly oscillating coefficients and large expected drift. *Netw. Heterog. Media*, 5(4):711–744, 2010. [63](#)
- [13] Thomas Y. Hou and Xiao-Hui Wu. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. *J. Comput. Phys.*, 134(1):169–189, 1997. [63](#)
- [14] Thomas J. R. Hughes. Multiscale phenomena: Green’s functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 127(1-4):387–401, 1995. [64](#)
- [15] Thomas J. R. Hughes, Gonzalo R. Feijóo, Luca Mazzei, and Jean-Baptiste QuinCY. The variational multiscale method - a paradigm for computational mechanics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 166(1-2):3–24, 1998. [64](#)
- [16] Mats G. Larson and Axel Målqvist. Adaptive variational multiscale methods based on a posteriori error estimation: duality techniques for elliptic problems. In *Multiscale methods in science and engineering*, volume 44 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, pages 181–193. Springer, Berlin, 2005. [64](#)
- [17] Mats G. Larson and Axel Målqvist. Adaptive variational multiscale methods based on a posteriori error estimation: energy norm estimates for elliptic problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196(21-24):2313–2324, 2007. [64](#)
- [18] Mats G. Larson and Axel Målqvist. An adaptive variational multiscale method for convection-diffusion problems. *Comm. Numer. Methods Engrg.*, 25(1):65–79, 2009. [64](#)
- [19] Mats G. Larson and Axel Målqvist. A mixed adaptive variational multiscale method with applications in oil reservoir simulation. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 19(7):1017–1042, 2009. [64](#)

- [20] Dag Lukkassen, Gabriel Nguetseng, and Peter Wall. Two-scale convergence. *Int. J. Pure Appl. Math.*, 2(1):35–86, 2002. [5](#), [35](#), [55](#)
- [21] Mario Ohlberger. A posteriori error estimates for the heterogeneous multiscale finite element method for elliptic homogenization problems. *Multiscale Model. Simul.*, 4(1):88–114 (electronic), 2005. [63](#)