Modellierung der Patella

Felix Brockherde Johann Jakob Preuß

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

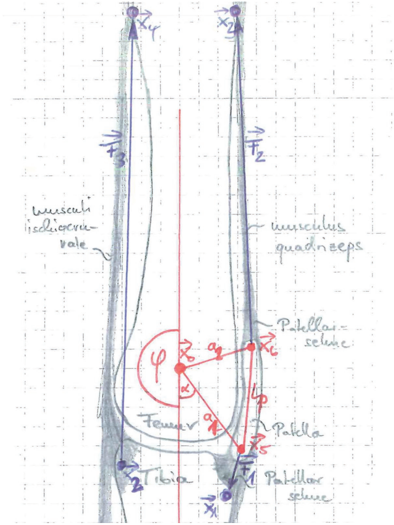
Zwischenpräsentation, 7. Juli 2009

Gliederung

Einleitung

- Das Kniegelenk ist das größte und am stärksten belastete Gelenk des Menschen.
- Es wird aus Oberschenkelknochen (Femur), Schienbein (Tibia) und Kniescheibe (Patella) gebildet.
- Mehrere Muskeln, Sehnen und ein komplexer Bandapparat sorgen für die nötige Stabilität.
- Ziel ist es, die Positionierung der Patella zu simulieren.

Skizzen . . .

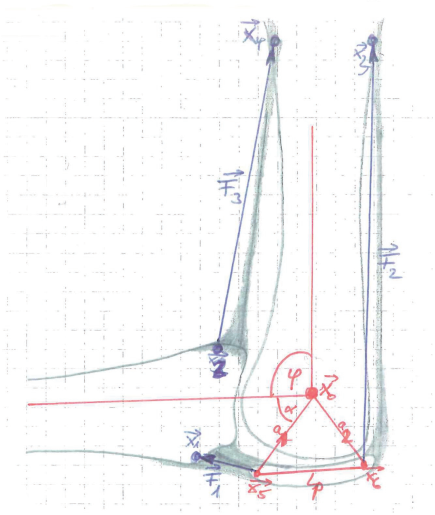


- Femur ist fixiert
- Tibia dreht sich um $\vec{x}_0$ im Winkel φ
- Patella dreht sich mit konstantem Abstand zu $\vec{x}_0$

. . . Skizzen

Die Sehne und die Muskeln sind folgendermaßen definiert:

- $\vec{s_1}$ = Patellarsehne
- $\vec{s_2}$ = musculus quadrizeps
- $\vec{s_3}$ = musculi ischiocrurale



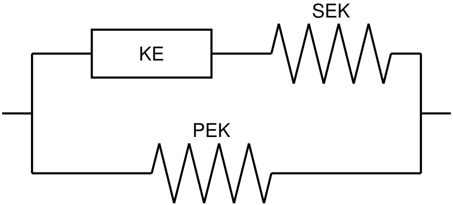
Modell von Hill ...

Muskel besteht aus zwei Elementen:

1. kontraktiles Element (aktive Kraft)
2. elastisches Element (Feder)

Vgl. dazu: Paul Brinckmann, Wolfgang Frobin, Gunnar Leivseth: *Orthopädische Biomechanik*. Thieme, Stuttgart 2000.

...Modell von Hill



KE	kontraktiles Element
SEK	serien-elastische Komponente
PEK	parallel-elastische Komponente

Physikalische Annahmen ...

Patellarsehne und elastische Elemente der Muskeln:

- Sie können höchstens bis zu einer Minimallänge l_i verkürzt werden.
- Die Kraft der Patellarsehne ($\vec{F_1}$) hat daher diese Gestalt:

$$\vec{F_1} = D_1 \left(\vec{s_1} - l_1 \frac{\vec{s_1}}{|\vec{s_1}|} \right) = D_1 \left(1 - \frac{l_1}{|\vec{s_1}|} \right) \vec{s_1}$$

... Physikalische Annahmen

Kontraktile Elemente:

- Ergänzend können Muskeln eine aktive Kraft F_{a_i} aufbringen.
- Für die Kraft des *musculus quadrizeps* ($\vec{F_2}$) und der *musculi ischiocrurale* ($\vec{F_3}$) ergibt sich also:

$$\vec{F_i} = D_i \left(\vec{s_i} - l_i \frac{\vec{s_i}}{|\vec{s_i}|} \right) + F_{a_i} \frac{\vec{s_i}}{|\vec{s_i}|} = \left(D_i \left(1 - \frac{l_i}{|\vec{s_i}|} \right) + \frac{F_{a_i}}{|\vec{s_i}|} \right) \vec{s_i}$$

Positionierung der Patella

Zur Berechnung der beiden unbekannten Winkel φ und α werden zwei Gleichungen benötigt.

1. Drehmoment

$$|\vec{M}| = \overrightarrow{x_0 x_5} \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{x_0 x_6} \times \vec{F}_2 + \overrightarrow{x_0 x_2} \times \vec{F}_3 \stackrel{!}{=} 0 \qquad (1)$$

2. Minimale Energie

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} + \frac{\partial E}{\partial \alpha} \stackrel{!}{=} 0 \qquad (2)$$

Hierbei gilt

$$E = \sum_{i=1}^{3} E_i, \quad E_i = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{l_i}{|\vec{s}_i|}\right)|\vec{s}_i|^2 D_i, \ \ i = 1, 2, 3.$$

Problemstellung

Eine mögliche Formulierung des Problems lautet:

- Gegeben seien die aktiven Kräfte F_{a_2} und F_{a_3}.
- Gesucht sind die Winkel φ und α.

Der Lösungsweg sieht so aus:

1. Die Gleichungen (1) und (2) in Abhängigkeit der Winkel φ und α aufstellen.
2. Das entstehende nichlineare Gleichungssystem gekoppelt lösen.

Programmvorführung

Kurze Vorführung des Programms

Bestimmung der Parameter

- Bei der Modellierung werden mehr als zehn Parameter verwendet.
- Ohne experimentell bestimmte Werte ist es sehr schwierig, realistische Ergebnisse zu erhalten.
- Einige Parameter sind nicht oder nur schwer messbar.

Optimale Modellparameter . . .

Um passende Werte für die Modellparameter zu ermitteln, kann folgendes Optimierungsproblem gelöst werden:

1. Messung physikalischer Größen
   $\vec{x_0}$, $\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$, $\vec{x_3}$, $\vec{x_4}$ und andere geometrische Parameter, wie z. B. die Länge der Patella
2. Bestimmung optimaler Modellparameter
   - Bein seitlich liegend in mehreren Beugewinkeln φ_i fixieren
   - zugehörigen Winkel α_i messen
   - aktive Kräfte F_{a_2} und F_{a_3} gleich Null setzen und nur die minimale Energie (2) betrachten

... Optimale Modellparameter

- Berechnung der unphysikalischen Parameter mit folgendem Funktional
$$J(p) = \sum_{i \in I} |w(\varphi_i) - g(\varphi_i)|^2$$
Hierbei gilt:
$$\begin{aligned} I &\mathrel{\widehat{=}} \text{Indexmenge} \\ w(\varphi_i) &\mathrel{\widehat{=}} \text{zu } \varphi_i \text{ berechneter Winkel } \alpha_i \\ g(\varphi_i) &\mathrel{\widehat{=}} \text{zu } \varphi_i \text{ gemessener Winkel } \alpha_i \\ p &\mathrel{\widehat{=}} \text{gesuchter optimaler Parametersatz} \end{aligned}$$

- Es ist
$$p_{\text{opt}} = \arg\min J(p) \Rightarrow \text{Parameter } D_i, l_i, \;\; i = 1, 2, 3.$$

Ansatz nach Hill

Die Leistung eines Muskels, also das Produkt aus Muskelkraft und Geschwindigkeit, ist konstant.

$$(F + a)\,(v + b) = (F_0 + a)\,b$$

Hierbei gilt:

$$\begin{aligned} F &\mathrel{\widehat{=}} \text{Muskelkraft} \\ v &\mathrel{\widehat{=}} \text{Kontraktionsgeschwindigkeit} \\ a, b, F_0 &\mathrel{\widehat{=}} \text{Parameter des betrachteten Muskels} \end{aligned}$$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Fragen?