Das Inverse Problem der Elektrokardiologie

Sema Mpairamoglou
Patrick Verfürth

8. Juli 2008

1. Problemstellung
   - 12-Punkt-EKG
   - Body Surface Potential Mapping (BSPM)

1. Problemstellung
   - 12-Punkt-EKG
   - Body Surface Potential Mapping (BSPM)
2. Das Vorwärtsproblem
   - Lösung des Vorwärtsproblems

12-Punkt-EKG

- Standardverfahren zur Aufzeichnung elektrischer Potentiale

12-Punkt-EKG

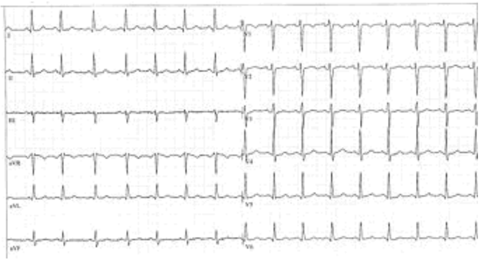
- Standardverfahren zur Aufzeichnung elektrischer Potentiale
- Örtliche und zeitliche Veränderungen messbar, charakteristische Veränderungen im Thoraxbereich nicht erfassbar

12-Punkt-EKG

- Standardverfahren zur Aufzeichnung elektrischer Potentiale
- Örtliche und zeitliche Veränderungen messbar, charakteristische Veränderungen im Thoraxbereich nicht erfassbar
- Messungen über größeren Thoraxbereich ermöglichen genauere Diagnostik des Herzens

12-Punkt-EKG

- Standardverfahren zur Aufzeichnung elektrischer Potentiale
- Örtliche und zeitliche Veränderungen messbar, charakteristische Veränderungen im Thoraxbereich nicht erfassbar
- Messungen über größeren Thoraxbereich ermöglichen genauere Diagnostik des Herzens



Body Surface Potential Mapping

- Das sogenannte BSPM wird mit deutlich mehr Elektroden durchgeführt.

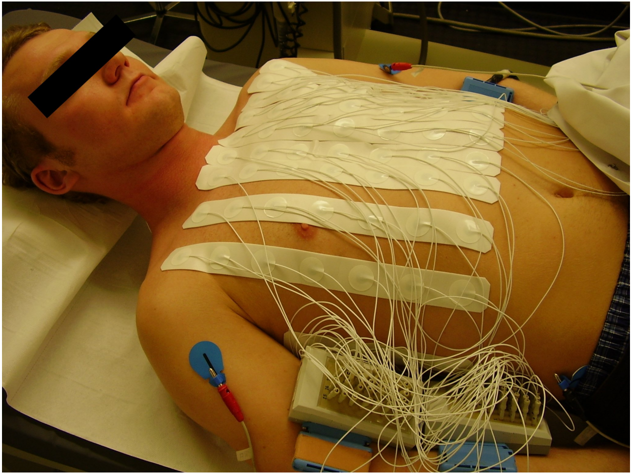
Body Surface Potential Mapping

- Das sogenannte BSPM wird mit deutlich mehr Elektroden durchgeführt.
- Durch die größere Menge an Daten kann (bei Wissender der Lage der Elektroden) genauer auf das elektrische Potential am Herzen geschlossen werden.

Body Surface Potential Mapping

- Das sogenannte BSPM wird mit deutlich mehr Elektroden durchgeführt.
- Durch die größere Menge an Daten kann (bei Wissender der Lage der Elektroden) genauer auf das elektrische Potential am Herzen geschlossen werden.
- Die Bestimmung des Potential am Herzen wird als *Inverses Problem der Elektrokardiologie* bezeichnet.

BSPM - Anwendungsbeispiel



Vorwärtsproblem

Vorwärtsproblem

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{in } T \tag{2.1}$$

$$(\sigma \nabla u) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{auf } \partial T \tag{2.2}$$

$$u = g \quad \text{auf } \partial H \tag{2.3}$$

Mit den Bezeichnungen

- u für das elektrische Potential
- σ für die Leitfähigkeit des Torsos T
- $\vec{n}$ für die äußere Normale auf ∂T
- g für das Potential auf dem Rand des Herzens ∂H

Lösung des Vorwärtsproblems

- Das Vorwärtsproblem ist ein sogenanntes "gut gestelltes" Problem

Lösung des Vorwärtsproblems

- Das Vorwärtsproblem ist ein sogenanntes "gut gestelltes" Problem
- Lösung mit Standardmethoden möglich

Lösung des Vorwärtsproblems

- Das Vorwärtsproblem ist ein sogenanntes "gut gestelltes" Problem
- Lösung mit Standardmethoden möglich
- Herausforderung:
  von gemessenen Daten an der Körperoberfläche auf das epikardiale Potential zu schließen.

Lösung des Vorwärtsproblems

- Das Vorwärtsproblem ist ein sogenanntes "gut gestelltes" Problem
- Lösung mit Standardmethoden möglich
- Herausforderung:
  von gemessenen Daten an der Körperoberfläche auf das epikardiale Potential zu schließen.

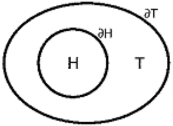


Abbildung: H=Herz, T=Torso

Inverses Problem

Inverses Problem

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\sigma \nabla u) &= 0 \quad \text{in } T && (3.1)\\
(\sigma \nabla u) \cdot \vec{n} &= 0 \quad \text{auf } \partial T && (3.2)\\
u &= d \quad \text{auf } \partial T && (3.3)
\end{aligned}
$$

- d sind die gemessenen Daten an der Körperobfläche ∂T zu einem festen Zeitpunkt
- u, σ, $\vec{n}$ wie beim Vorwärtsproblem

Schlechtgestelltheit des Inversen Problems

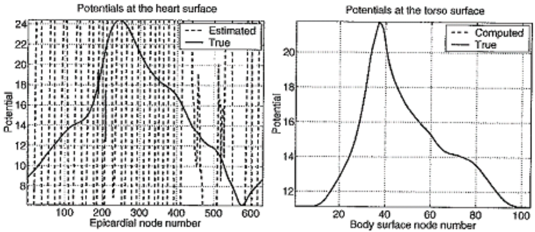
- Das Inverse Problem ist ein sogenanntes schlecht gestelltes Problem und somit (numerisch) schwer zu lösen.

Schlechtgestelltheit des Inversen Problems

- Das Inverse Problem ist ein sogenanntes schlecht gestelltes Problem und somit (numerisch) schwer zu lösen.
- Ein Problem heisst (nach Hadamard) *schlecht gestellt*, falls eine der folgenden Bedingungen nicht erfüllt ist:
    1. Es existiert eine Lösung
    2. Die Lösung ist eindeutig
    3. Die Lösung hängt stetig von den Eingabedaten ab

Schlechtgestelltheit des Inversen Problems

- Das Inverse Problem ist ein sogenanntes schlecht gestelltes Problem und somit (numerisch) schwer zu lösen.
- Ein Problem heisst (nach Hadamard) *schlecht gestellt*, falls eine der folgenden Bedingungen nicht erfüllt ist:
  1. Es existiert eine Lösung
  2. Die Lösung ist eindeutig
  3. Die Lösung hängt stetig von den Eingabedaten ab



Definition des Lösungsoperators

- Für das Vorwärtsproblem können wir einen Lösungsoperator R definieren.

$$R : H^1(\partial H) \to L^2(\partial T) \tag{4.1}$$

$$\text{mit } R(g) = u(g)|_{\partial T} \tag{4.2}$$

Definition des Lösungsoperators

- Für das Vorwärtsproblem können wir einen Lösungsoperator R definieren.

$$R : H^1(\partial H) \to L^2(\partial T) \tag{4.1}$$

$$\text{mit } R(g) = u(g)|_{\partial T} \tag{4.2}$$

- R bildet das epikardiale Potential auf das Körperoberflächenpotential ab.

Definition des Lösungsoperators

- Für das Vorwärtsproblem können wir einen Lösungsoperator R definieren.

$$R : H^1(\partial H) \to L^2(\partial T) \tag{4.1}$$

$$\text{mit } R(g) = u(g)|_{\partial T} \tag{4.2}$$

- R bildet das epikardiale Potential auf das Körperoberflächenpotential ab.
- Wobei $u(g)$ Lösung des Vorwärtsproblems in Abhängigkeit von g.

Definition des Lösungsoperators

- Für das Vorwärtsproblem können wir einen Lösungsoperator R definieren.

$$R : H^1(\partial H) \to L^2(\partial T) \tag{4.1}$$

$$\text{mit } R(g) = u(g)|_{\partial T} \tag{4.2}$$

- R bildet das epikardiale Potential auf das Körperoberflächenpotential ab.
- Wobei $u(g)$ Lösung des Vorwärtsproblems in Abhängigkeit von g.
- R ist linear, d.h. es gilt für $u, v \in H^1(\partial H)$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$R(c_1 \cdot u + c_2 \cdot v) = c_1 \cdot R(u) + c_2 \cdot R(v) \tag{4.3}$$

Diskretisierung

Wir definieren einen endlichdimensionalen Teilraum V_n von $H^1(\partial H)$ durch n linear unabhängige Funktionen $g_1, \ldots, g_n \in H^1(\partial H)$

$$V_n := span\{g_1, \ldots, g_n\} \subset H^1(\partial H). \tag{4.4}$$

Diskretisierung

Wir definieren einen endlichdimensionalen Teilraum V_n von $H^1(\partial H)$ durch n linear unabhängige Funktionen $g_1, \ldots, g_n \in H^1(\partial H)$

$$V_n := span\{g_1, \ldots, g_n\} \subset H^1(\partial H). \tag{4.4}$$

Die Restriktion des Operators R auf V_n bezeichnen wir mit R_n, d.h.

$$R_n := R|_{V_n} : V_n \to L^2(\partial T). \tag{4.5}$$

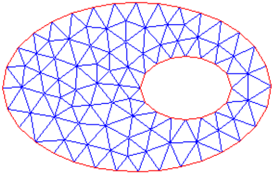
Diskretisierung

Wir definieren einen endlichdimensionalen Teilraum V_n von $H^1(\partial H)$ durch n linear unabhängige Funktionen $g_1, \ldots, g_n \in H^1(\partial H)$

$$V_n := span\{g_1, \ldots, g_n\} \subset H^1(\partial H). \tag{4.4}$$

Die Restriktion des Operators R auf V_n bezeichnen wir mit R_n, d.h.

$$R_n := R|_{V_n} : V_n \to L^2(\partial T). \tag{4.5}$$



Eigenschaften des restringierten Operators R_n

- Auch R_n ist linear, und somit lässt sich jedes $g \in V_n$ eindeutig als Linearkombination mit reellen Koeffizienten p_i darstellen

$$g = \sum_{i=1}^{n} p_i g_i \tag{4.6}$$

Eigenschaften des restringierten Operators R_n

- Auch R_n ist linear, und somit lässt sich jedes $g \in V_n$ eindeutig als Linearkombination mit reellen Koeffizienten p_i darstellen

$$g = \sum_{i=1}^{n} p_i g_i \tag{4.6}$$

- Die Lösungen dieser Vorwärtsprobleme bezeichnen wir mit r_i, also gilt für $i = 1, \ldots, n$

$$r_i = R_n(g_i) = u(g_i)|_{\partial T} \tag{4.7}$$

Eigenschaften des restringierten Operators R_n

- Auch R_n ist linear, und somit lässt sich jedes $g \in V_n$ eindeutig als Linearkombination mit reellen Koeffizienten p_i darstellen

$$g = \sum_{i=1}^{n} p_i g_i \tag{4.6}$$

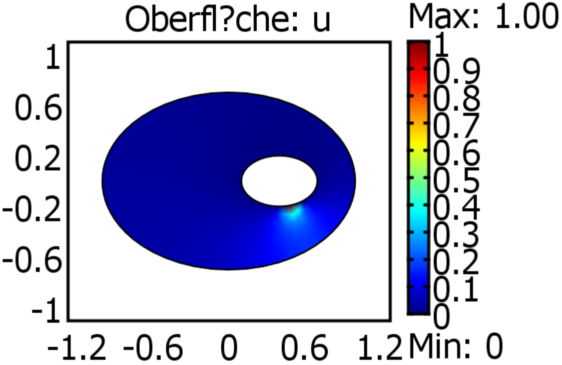
- Die Lösungen dieser Vorwärtsprobleme bezeichnen wir mit r_i, also gilt für $i = 1, \dots, n$

$$r_i = R_n(g_i) = u(g_i)|_{\partial T} \tag{4.7}$$

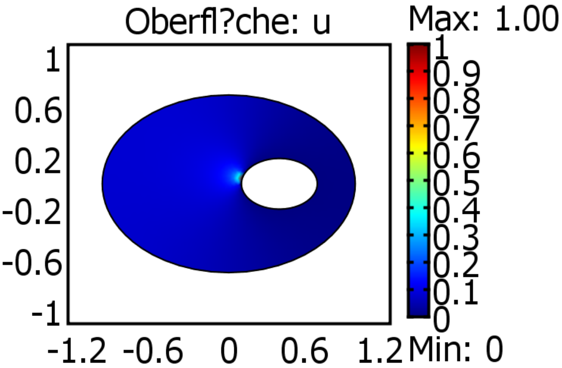
- Aus der Linearität von R_n folgt dann

$$R_n(g) = \sum_{i=1}^{n} p_i r_i \tag{4.8}$$

Beispiele für g_i



Beispiele für g_i



Bestimmung der r_i

Nach Lösung von n Vorwärtsproblemen:

Bestimmung der r_i

Nach Lösung von n Vorwärtsproblemen:

- "Ablesen" der Funktionswerte am Rand des Torsos.

Bestimmung der r_i

Nach Lösung von n Vorwärtsproblemen:

- "Ablesen" der Funktionswerte am Rand des Torsos.
- Nenne diese n Vektoren der Länge m r_i
  (m ist die Anzahl der Diskretisierungspunkte am Rand des Torso)

Bestimmung der r_i

Nach Lösung von n Vorwärtsproblemen:

- "Ablesen" der Funktionswerte am Rand des Torsos.
- Nenne diese n Vektoren der Länge m r_i
  (m ist die Anzahl der Diskretisierungspunkte am Rand des Torso)
- Beschreibung des Operators R_n durch die berechneten r_i

Bestimmung der r_i

Nach Lösung von n Vorwärtsproblemen:

- "Ablesen" der Funktionswerte am Rand des Torsos.
- Nenne diese n Vektoren der Länge m r_i
  (m ist die Anzahl der Diskretisierungspunkte am Rand des Torso)
- Beschreibung des Operators R_n durch die berechneten r_i
- Dafür stelle Matrix A auf mit:

$$A = (\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Umformulierung des Problems

Anstatt von

$$R(g) = Au = d \tag{4.9}$$

lösen wir die Normalengleichung

$$A'Au = A'd. \tag{4.10}$$

Umformulierung des Problems

Anstatt von

$$R(g) = Au = d \tag{4.9}$$

lösen wir die Normalengleichung

$$A'Au = A'd. \tag{4.10}$$

Wir definieren

$$B := A'A \qquad \text{und} \qquad c := A'd \tag{4.11}$$

und lösen das LGS

$$Bu = c \tag{4.12}$$

Zusammenfassung des Lösungsalgorithmus

1. Wähle n linear unabhängige Basisfunktionen

$$g_1, \ldots, g_n \in H^1(\partial H), \tag{4.13}$$

welche auf der Oberfläche des Herzens definiert sind.

Zusammenfassung des Lösungsalgorithmus

1. Wähle n linear unabhängige Basisfunktionen

$$g_1, \dots, g_n \in H^1(\partial H), \tag{4.13}$$

welche auf der Oberfläche des Herzens definiert sind.

2. Setze $g = g_i$ in (2.3) für $i = 1, \dots, n$ und löse für $u = u(g_i)$ das Vorwärtsproblem (2.1) - (2.3).

Zusammenfassung des Lösungsalgorithmus

1. Wähle n linear unabhängige Basisfunktionen
$$g_1, \ldots, g_n \in H^1(\partial H), \tag{4.13}$$
welche auf der Oberfläche des Herzens definiert sind.
2. Setze $g = g_i$ in (2.3) für $i = 1, \ldots, n$ und löse für $u = u(g_i)$ das Vorwärtsproblem (2.1) - (2.3).
3. Berechne $r_i = u(g_i)|_{\partial T}$, für $i = 1, \ldots, n$

Zusammenfassung des Lösungsalgorithmus

1. Wähle n linear unabhängige Basisfunktionen

$$g_1, \ldots, g_n \in H^1(\partial H), \tag{4.13}$$

welche auf der Oberfläche des Herzens definiert sind.

2. Setze $g = g_i$ in (2.3) für $i = 1, \ldots, n$ und löse für $u = u(g_i)$ das Vorwärtsproblem (2.1) - (2.3).
3. Berechne $r_i = u(g_i)|_{\partial T}$, für $i = 1, \ldots, n$
4. Stelle die in (4.11) definierte Matrix B und den Vektor c auf.

Zusammenfassung des Lösungsalgorithmus

1. Wähle n linear unabhängige Basisfunktionen

$$g_1, \dots, g_n \in H^1(\partial H), \tag{4.13}$$

welche auf der Oberfläche des Herzens definiert sind.

2. Setze $g = g_i$ in (2.3) für $i = 1, \dots, n$ und löse für $u = u(g_i)$ das Vorwärtsproblem (2.1) - (2.3).
3. Berechne $r_i = u(g_i)|_{\partial T}$, für $i = 1, \dots, n$
4. Stelle die in (4.11) definierte Matrix B und den Vektor c auf.
5. Löse, wenn möglich, das LGS (4.12)

Zusammenfassung des Lösungsalgorithmus

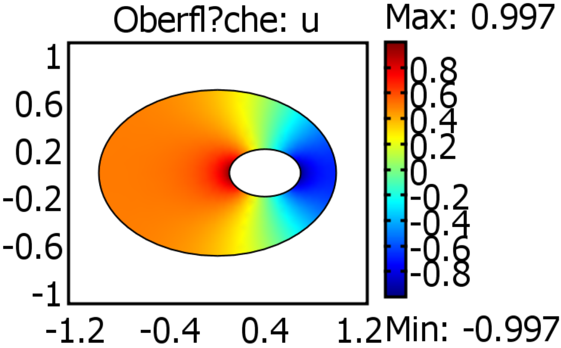
1. Wähle n linear unabhängige Basisfunktionen

$$g_1, \ldots, g_n \in H^1(\partial H), \tag{4.13}$$

welche auf der Oberfläche des Herzens definiert sind.

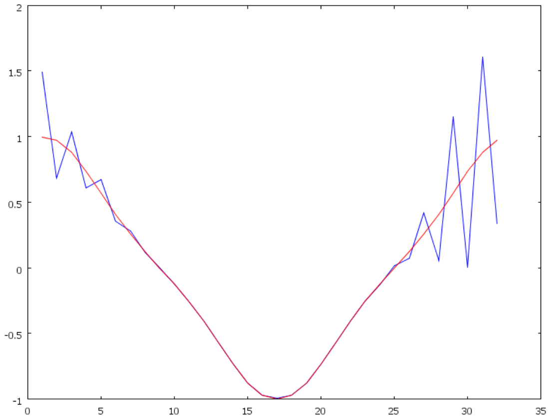
2. Setze $g = g_i$ in (2.3) für $i = 1, \ldots, n$ und löse für $u = u(g_i)$ das Vorwärtsproblem (2.1) - (2.3).
3. Berechne $r_i = u(g_i)|_{\partial T}$, für $i = 1, \ldots, n$
4. Stelle die in (4.11) definierte Matrix B und den Vektor c auf.
5. Löse, wenn möglich, das LGS (4.12)
6. Bestimme mit den berechneten p_i die Lösung $g = \sum_{i=1}^{n} p_i g_i$

Lösung bei vorgegebenem Potential am Herzen



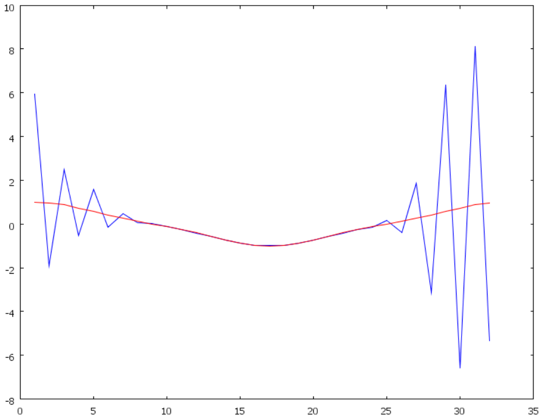
Ergebnisse bei einer Störung der Daten um 10^{-9}

BLAU: berechnete Lösung ROT: exakte Lösung



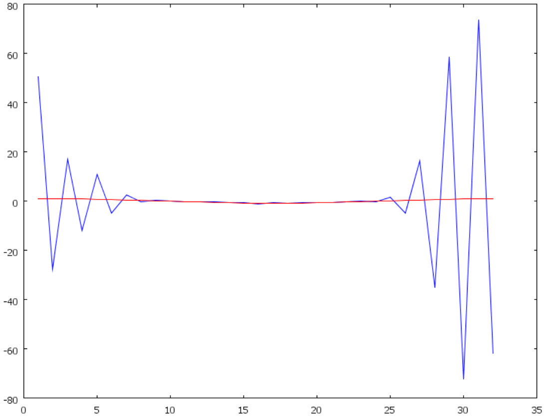
Ergebnisse bei einer Störung der Daten um 10^{-8}

BLAU: berechnete Lösung ROT: exakte Lösung



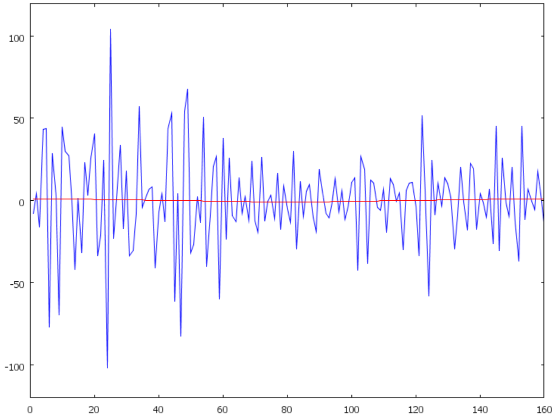
Ergebnisse bei einer Störung der Daten um 10^{-7}

BLAU: berechnete Lösung ROT: exakte Lösung

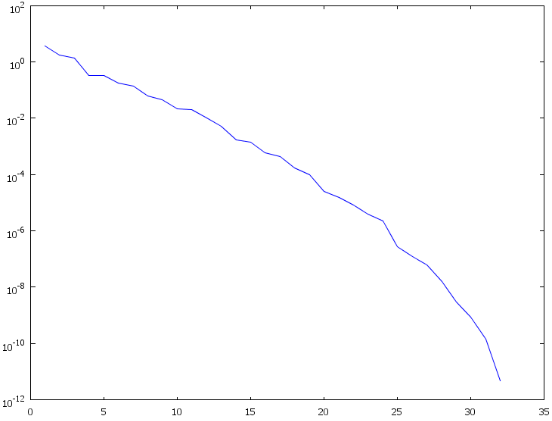


Ergebnisse bei kleinerer Gitterweite ohne Störung

BLAU: berechnete Lösung ROT: exakte Lösung

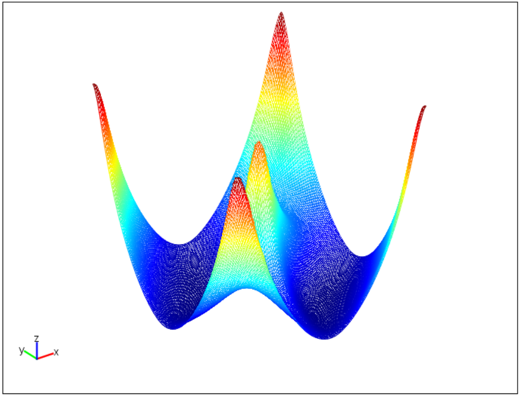


Eigenwerte der Matrix B



Kondition der Matrix B

$$\text{Kondition}(B) = 792912149292,2158 \approx 7,93 \cdot 10^{11}$$



Vielen Dank für die Aufmerksamkeit