Optionsbewertung

Christof Heuer und Fabian Lenz

2. Februar 2009

Inhaltsverzeichnis

Kauf oder Verkauf

- Call
- Put

Zeitpunkt der Einlösung

- Europäische Optionen
- Amerikanische Optionen
- ...

Optionen können erworben werden für

- Rohstoffen
- Aktien
- ...

Allgemeine Modellannahmen

- vollkommener Kapitalmarkt; insbesondere Arbitragefreiheit, Leerverkäufe sind erlaubt
- Europäische Option auf eine Aktie

Vorerst gibt es keine Sprünge im Akienkursmodell.
Das Modell ist die Brownsche Bewegung

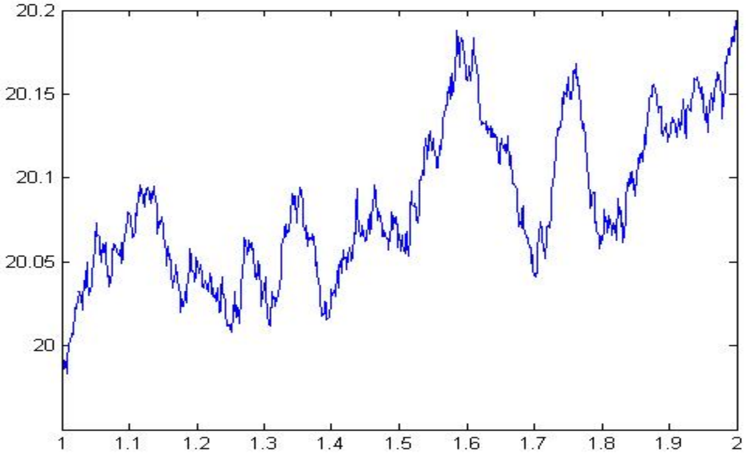
$$\frac{dS}{S} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW,$$

wobei

- μ der Drift der Aktie S
- σ die Volativität der Aktie
- dW ist ein Wiener Prozess
- E[dS]=μSdt, da E[dW]=0
- Var[dS]= $\sigma^2 S^2 dt$

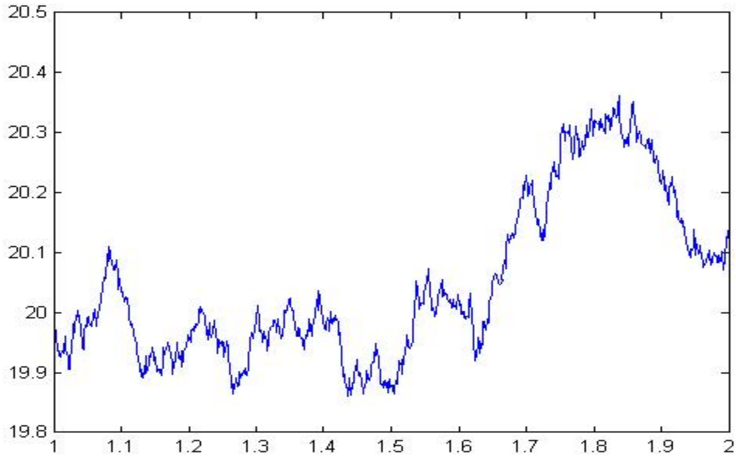
Parameter

- Drift der Aktie α : 2%
- Volatilität der Aktie σ: 25 %
- Zeitschrittweite: 720 Zeitschritte/Jahr


20.2
20.15
20.1
20.05
20
1
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
1.6
1.7
1.8
1.9
2

Parameter

- Drift der Aktie α : 1%
- Volatilität der Aktie σ: 50 %
- Zeitschrittweite: 720 Zeitschritte/Jahr


20.5
20.4
20.3
20.2
20.1
20
19.9
19.8
1
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
1.6
1.7
1.8
1.9
2

Ist V: $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit:

- V stetig differenzierbar ersten Komponente
- V zweimal stetig differenzierbar in der zweiten Komponente
- $\mathrm{d}S = f(S,t)\mathrm{d}t + g(S,t)\mathrm{d}W_t$

Es gilt:

$$\mathrm{d}V = \left(\frac{\partial V(S,t)}{\partial S} f(S,t) + \frac{\partial V(S,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2} g^2(S,t)\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial V(S,t)}{\partial S} g(S,t)\mathrm{d}W_t$$

Sei also wieder $\frac{dS}{S} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW$ gegeben

Man erhält mit Ito's Lemma:

- $f(S,t) = \mu S$
- $g(S,t) = \sigma S$
- dV $=(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t})dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW$

Sei P ein Portfolio mit dem Wert P=V - α·S Dann gilt:

- dP= dV - α·dS

Setzt man nun dV und dS in diese Gleichung ein, so erhält man

- $dP = \sigma S(\frac{\partial V}{\partial S} - \alpha)dW + (\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \alpha\mu S)dt$

Damit P risikolos ist, wählt man $\alpha = \frac{\partial V}{\partial S}$. Das liefert:

- dP= $(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt$

Aufgrund der Arbitragefreiheit muss im Zeitraum von t nach t+ dt gelten:

- dP = r P dt
- r P dt = $(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt$

wobei

- r der risikolose Zinssatz ist

Mit P = V - α S = V - $\frac{\partial V}{\partial S} S$ folgt:

Die Black-Scholes-Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r \cdot S \cdot \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = r \cdot V$$

Randbedingungen

- Optionswert für den Put ist zum Endzeitpunkt bekannt
- $max(K - S, 0)$ mit K Erfüllungspreis
- Für den Aktienwert wird ein Maximum festgelegt
- Der Aktienpreis S gilt immer $S \geq 0$

Diskretisierung

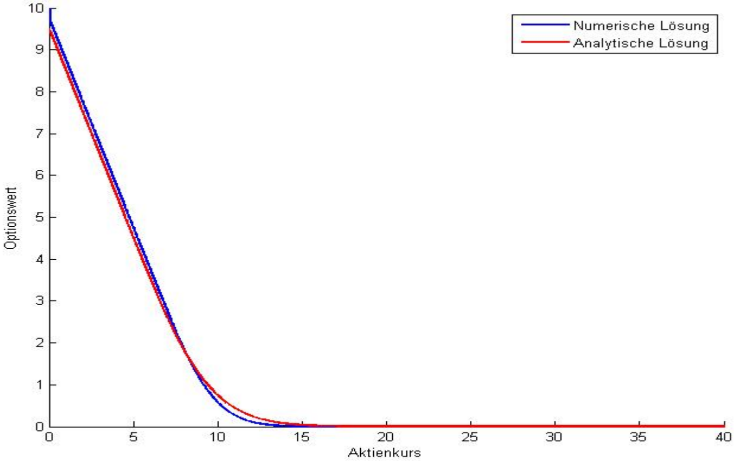
- Zeitdiskritisierung: implizit, rückwärts vom Endzeitpunkt zum Startzeitpunkt
- rS $\frac{\partial V}{\partial S}$: Upwind-Verfahren, aber rS $\geqslant 0$
- $\frac{\sigma^2 S^2}{2}\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$: zentraler Differenzenquotient für 2. Ableitungen

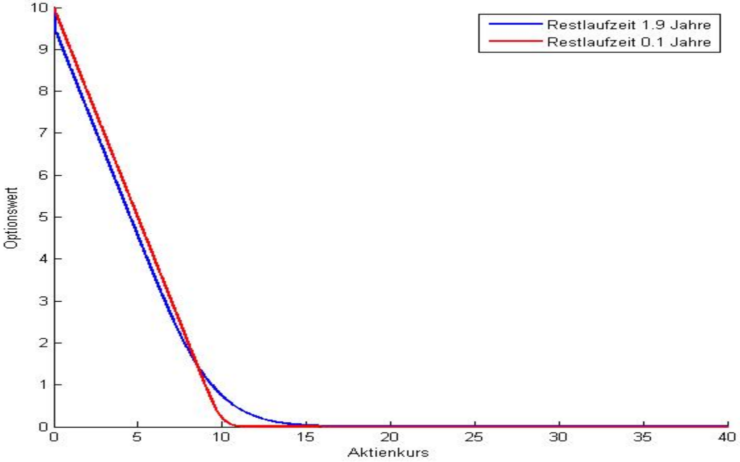
$$\frac{V_i^{h+1} - V_i^h}{\Delta t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{V_{i+1}^h - 2V_i^h + V_{i-1}^h}{(\Delta S)^2} + \max(rS, 0) \frac{V_i^h - V_{i-1}^h}{\Delta S} - rV_i^h = 0$$

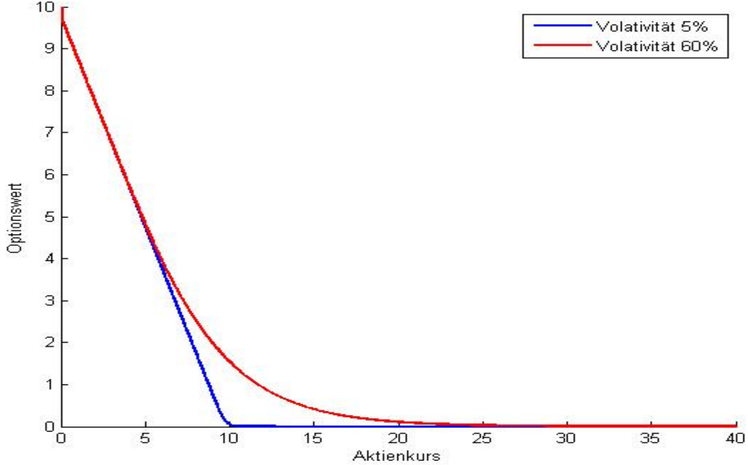
Parameter

- Zinssatz r: 5%
- Ausübungspreis K: 10 GE
- maximaler Aktienkurs S_{max}: 40 GE
- Gesamtlaufzeit der Option T: 2 Jahre
- Restlaufzeit der Option L: 1 Jahr
- Volatilität der Aktie σ: 25%
- Zeitschrittweite: 720 Zeitschritte/Jahr
- Kursschrittweite: 50 Schritte/GE

Vergleich mit analytischer Lösung




Restlaufzeit 1.9 Jahre
Restlaufzeit 0.1 Jahre
Optionswert
Aktienkurs
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
5
10
15
20
25
30
35
40


Volativität 5%
Volativität 60%
Optionswert
Aktienkurs
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
5
10
15
20
25
30
35
40

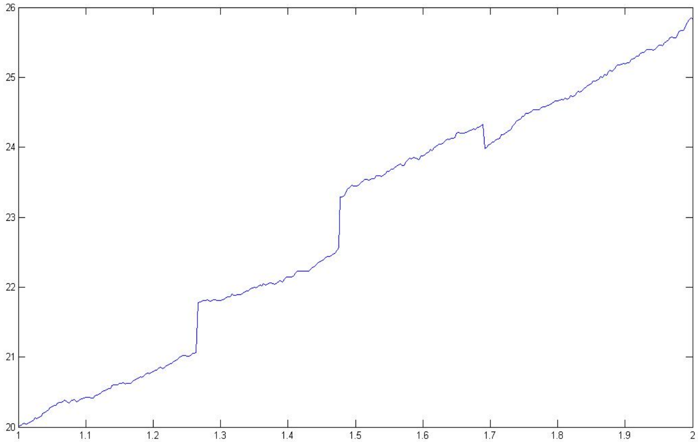
- Aktienkurse können sich schnell stark ändern(z.B. durch Übernahmespekulationen, veröffentlichte Gewinnerwartungen, Bankenkrise, etc.)
- verlaufen also i.A. nicht nur wie ein Wiener Prozess
- daher: Einbau von zufälligen Sprüngen

Unsere Annahmen

- Aktienkurs hat eine bestimmte Wahrscheinlichkeit $\lambda \cdot dt$ für ein Sprung im Zeitintervall dt
- Sprunghöhe ist log-normalverteilt, mit bekannten Parametern $\overline{\mu}$ und γ
- sonst gleiche Annahmen wie vorher für Aktienkurs

$$\frac{dS}{S} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW + (J - 1) \cdot dq$$

Aktienkurs mit Sprung



Herleitung der Differentialgleichung

- Wert des Portfolios $P = V - \alpha S$
- Aus Ito's Lemma und durch das risikolose Portfolio ($\alpha = \frac{\partial V}{\partial S}$) folgt:
- $dP = [\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}]dt + [V(JS,t) - V(S,t)]dq - \frac{\partial V}{\partial S}(J-1)Sdq$
- Betrachte den Erwartungswert $E[dP]$
- Wir wissen: $E[dq] = \lambda dt$
- Erwartungswert der Sprunghöhe: $E[J-1] =: \kappa$

Weitere Annahmen

- Investor hält ein gestreutes Portfolio solcher Portfolios für verschiedene Aktien
- die verschiedene Aktien seien unkorelliert
- daher: kleine Varianz des Portfolios
- daraus folgt dann: $E[dP] = rPdt$
- $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial S}(rS - S\kappa\lambda) - (r + \lambda)V + E[V(JS, t)]\lambda = 0$

- Ist g die Verteilungsfunktion der Sprunghöhe mit $g(J) = 0$ für $J < 0$, so gilt:
- $E[V(JS, t)] = \int_0^\infty g(J) V(JS, t) dJ$

Damit erhalten wir folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial S}(rS - S\kappa\lambda) - (r+\lambda)V + \lambda \int_0^\infty g(J) V(JS, t) dJ = 0$$

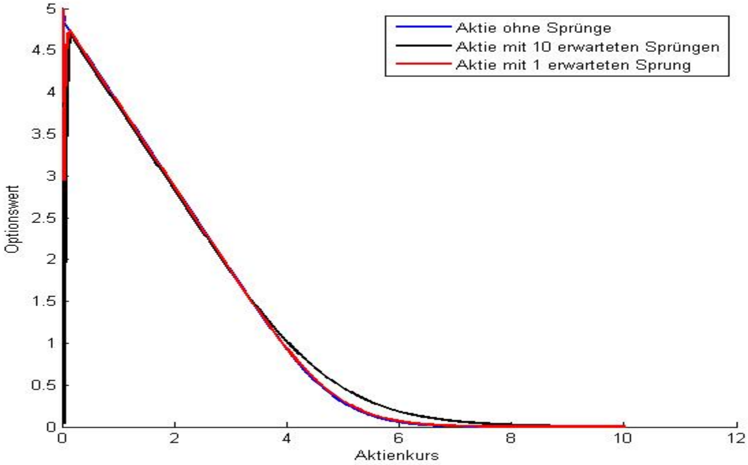
Diskretisierung

- Differenzenquotienten wie eben
- Integral mit zusammengesetzter Trapezregel
- obere Integralgrenze setzen wir auf $\frac{S_{max}}{S}$
- Problem: $g(\frac{S_{max}}{S})$ kann noch groß sein
- aber: $V(\frac{S_{max}}{S}S)$ sollte für hinreichend großes S_{max} Null sein

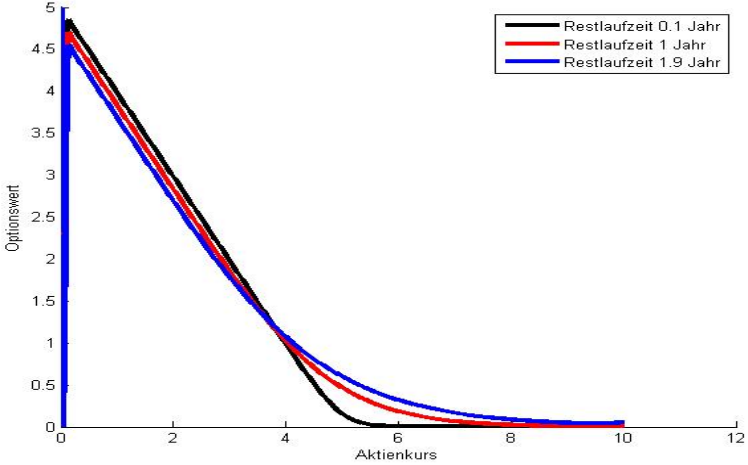
Parameter

- Zinssatz r: 5%
- Ausübungspreis K: 5 GE
- maximaler Aktienkurs S_{max}: 10 GE
- Gesamtlaufzeit der Option T: 2 Jahre
- Restlaufzeit der Option L: 1 Jahr
- Drift der Aktie α: 2%
- Volatilität der Aktie σ: 25%
- Zeitschrittweite: 100 Zeitschritte/Jahr
- Kursschrittweite: 40 Schritte/GE
- Erwartete Sprunghöhe: $+1,5$%

Vergleich mit Lösung ohne Sprung



Vergleich der verschiedenen Restlaufzeiten



Die Option verhält sich folgendermaßen:

- dS(t)= μ S dt + $\sqrt{v(t)}$S dz_1
- d$\sqrt{v(t)}$ = -$\beta\sqrt{v(t)}$ dt + δ dz_2

wobei

- $z_1(t)$ und $z_2(t)$ sind Wiener Prozesse
- die Volativität v folgt Ornstein-Uhlenbeck Prozess
- es werden keine Sprünge betrachtet

Ito's Lemma führt mit

- f(S,t) $= -\beta\sqrt{v(t)}$
- g(S,t) $= \delta$
- v $= S^2$

zu

- $dv(t) = (\delta^2 - 2\beta v(t))dt + 2\delta\sqrt{v(t)}dz_2(t)$

was umgeschrieben zu

- dv(t) $= \kappa(\theta$ - v(t))dt $+ \sigma\sqrt{v(t)}dz_2(t)$

wird.

Mit der mehrdimensionalen Formel von Ito führt dies zur allgemeinen PDE:

$$\frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + rS \frac{\partial U}{\partial S}$$

$$+ [\kappa(\theta - v(t)) - \lambda(S, v, t)] \frac{\partial U}{\partial v} - rU + \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

- U ist der Preis der allgemeinen Option
- $\lambda(S, v, t)$ der Preis für das Volativitätsrisiko
- r der risikolose Zinssatz ist

Mit

- x = ln(S)
- $S\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{\partial U}{\partial x}$
- $S^2\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial x}$
- U = C für eine Call-Option

wird daraus

$$\frac{1}{2}v\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \rho\sigma v\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 C}{\partial v^2} + (r - \frac{1}{2}v)\frac{\partial C}{\partial x}$$

$$+(\kappa[\theta - v] - \lambda(e^x, v, t))\frac{\partial C}{\partial v} - rC + \frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

Wenn man jetzt noch für den Call

- C(S,v,t) = SP_1 - K $e^{r(T-t)}$ P_2

setzt, mit

- C(S,T) = max(S-K,0) als Randbedingung
- $e^{r(T-t)}$ risikoloser Verzinsung

erhält man folgende zwei PDE's

$$\frac{1}{2}v\frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2}+\rho\sigma v\frac{\partial^2 P_j}{\partial x\partial v}+\frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 P_j}{\partial v^2}+(r+u_j v)\frac{\partial P_j}{\partial x}+(a-b_j v)\frac{\partial P_j}{\partial v}+\frac{\partial P_j}{\partial t}=0$$

für j = 1,2 mit

- $u_1 = \frac{1}{2}$
- $u_2 = -\frac{1}{2}$
- a $= \kappa\theta - \lambda$
- $b_1 = \kappa - \rho\sigma$
- $b_2 = \kappa$

und der Randbedingung

- $P_j(x, v, T; ln(K)) = 1_{[ln(K) \leq x]}$

Durch Fourriertransformation von P_1 und P_2 erhält man:

$$P_j(x, v, t; ln(K)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Re[\frac{e^{-i\phi ln(K)} f_j(x,v,t;\phi)}{i\phi}]d\phi$$

mit

- C(S,v,t) = SP_1 - K $e^{r(T-t)}$ P_2

kann der Call-Wert dann berechnet werden

Was könnte man jetzt noch alles machen???

- Implementierung der Ergebnisse mit stochastischer Volatilität
- Verbindung von Sprüngen mit stochastischer Volatilität
- Betrachtung von Amerikanischen/Asiatischen Optionen
- Betrachtung von Portfolios anstatt von einzelnen Optionen
- ...

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!!!!!!