Kathrin Smetana 23. März 2010

Matlab - Kompaktkurs

Übungsblatt 2

Bei einer vorgegebenen Aufgabe liegen die Schwierigkeiten, die Lösung zu ermitteln, nicht immer in den zugrunde liegenden Formeln bzw. genutzten Algorithmen. Häufig ist das Problem auch bei exakter Rechnung anfällig gegen Schwankungen in den Eingangsdaten. Dabei heißt eine numerische Problemstellung "gut konditioniert" falls kleine Änderungen der Daten zu kleinen Änderungen der Lösung führt, sonst heißt das Problem "schlecht konditioniert".

Aufgabe 1 (Kondition)

(a) Die Konditionierung eines Linearen Gleichungssystems (LGS) $Ax = b$ lässt sich sehr gut durch den Wert $cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ abschätzen. Natürlich hängt dieser Wert von der Wahl der Norm ab. Im Allgemeinen wählt man $cond(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$, wobei λ_{max} der maximale und λ_{min} der minimale Eigenwert der Matrix A sind. In Matlab lässt sich die Konditionierung eines LGS mit dem Befehl `cond` bestimmen.

1. Machen Sie sich mit der Matlab-Hilfe mit dem Befehl `cond` vertraut.
2. Sei $A = \begin{pmatrix} 1,2969 & 0,8648 \\ 0,2161 & 0,1441 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 0,86419999 \\ 0,14400001 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 0,8642 \\ 0,1440 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Lösungen der LGS $Ax_1 = b_1$ und $Ax_2 = b_2$. Vergessen Sie dabei nicht im Command Window auf 16-stellige Ausgabe umzustellen. Berechnen Sie danach `cond(A)`. Kommentieren Sie die Resultate.

(b) Ein Problem das ebenfalls schlecht konditioniert ist, ist die Subtraktion zweier betragsmäßig nahezu gleich großer Zahlen desselben Vorzeichens. Dies bezeichnet man als Auslöschung. Wir betrachten dazu das Beispiel der Exponentialfunktion, die für sehr kleine Argumente "x" nahe der 1 liegt.

1. Machen Sie sich mit der Matlab-Hilfe mit den Befehlen `expm1` und `abs` vertraut.
2. Berechnen Sie für die Werte 1.0e-4, 1.0e-6 und 1.0e-8 den relativen Fehler $\frac{|\sqrt{expm1(x)} - \sqrt{(exp(x)-1)}|}{\sqrt{expm1(x)}}$ und kommentieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2 (Verwendung der Exponentialfunktion)

(a) Berechnen Sie für $N = 10^k,\ k = 1, \ldots, 5$ die Näherung der Eulerschen Zahl e mittels der Formel

$$e \approx (1 + \frac{1}{N})^N$$

Speichern Sie in einem fünfdimensionalen Vektor `diff` die absoluten Fehler dieser Näherungen zum exakten Wert und beurteilen Sie die Entwicklung des Fehlers. Benötigte Matlab Befehle: `abs` und `exp` (ggf. Matlab-Hilfe aufrufen).

(b) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = -2 + i$, $z_2 = i$, $z_3 = 1 + i$. Verifizieren Sie für diese Zahlen mittels der Matlab-Funktionen `exp`, `sin`, `cos` die Gültigkeit der Formeln

$$\sin(z_k) = \frac{e^{iz_k} - e^{-iz_k}}{2i} \quad \text{and} \quad \cos(z_k) = \frac{e^{iz_k} + e^{-iz_k}}{2}.$$

Aufgabe 3 (Relationsoperatoren und Logische Operatoren)
Es seien die Vektoren $x = (-2\ \ 3\ \ 1\ \ 0\ \ 4)$, $y = (9\ \ 0\ \ 7\ \ 0\ \ 0)$ und $z = (-4\ \ 6\ \ 2\ \ 0\ \ 8)$ gegeben. Was wird Matlab ausgeben? Überlegen Sie, bevor Sie es ausprobieren.

a) `x>y` b) `x & (~y)` c) `x==-2*z`
d) `x>2 & x<8 & y<=0` e) `y(x<=1)` f) `z((x<=2)|(y>=4))`

Aufgabe 3 (Löschen von Nullelementen)
Finden Sie zwei verschiedene Wege, wie man Nulleinträge aus einem Vektor löschen kann. Testen Sie Ihre Überlegungen an `x=[-1 9 0 0 -5 0 1]`.
Hinweis: Schauen Sie sich den Befehl `find` an.

Aufgabe 5 (Erzeugung von Matrizen):

(a) Erzeugen Sie für ein festes $n \in \mathbb{N}$ eine $(n \times n)$-Matrix X und eine $(n \times n)$-Matrix Y mit $X_{i,k} = i \cdot h$ und $Y_{i,k} = k \cdot h$, $h = 1/n$ (ohne die Verwendung von Schleifen).

(b) Erzeugen Sie eine $(n \times n)$-Matrix B mit

$$B_{i,k} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{falls } (i \cdot h - 0.5)^2 + (k \cdot h - 0.5)^2 < 0.3 \cdot 0.3, \\ 0, & \text{sonst }. \end{array} \right\}$$

Hinweis: Benutzen Sie die soeben erzeugten Matrizen aus Teil (a).

(c) Zeigen Sie B als Bild an (Matlab-Befehl: `imagesc`).