Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt 8, Abgabe: Donnerstag, 11.12.2014, 12.00 Uhr

Übungstermine:

Gruppe 1:	Di.	12 - 14 Uhr	SRZ 205	BK	120	(Bastian Pietras)
Gruppe 2:	Di.	14 - 16 Uhr	SRZ 205	BK	110	(Christoph Tenbrock)

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Eindeutigkeit von Regularisierten Problemen:
Sei $K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ mit $M < N$. Wir betrachten das Minimierungsproblem

$$J_\alpha(u) = \frac{1}{2}\|Ku - f\|^2 + \alpha\|u\|_1 \to \min_u .$$

Sei $\overline{u}$ so, dass

$$K^T(K\overline{u} - f)_i = -\alpha \ \mathrm{sign}(\overline{u}_i)$$

für $\overline{u}_i \neq 0$ und

$$|K^T(K\overline{u} - f)_i| < \alpha$$

gilt für $\overline{u}_i = 0$. Zeigen Sie, dass $\overline{u}$ dann der eindeutige Minimierer von J_α ist.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Konvexe Konjugation:
Sei $H : Z \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein Funktional auf einem Banachraum Z. Das konvex konjugierte Funktional $H^* : Z^* \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (auch genannt Legendre Transformation von H) is definiert durch

$$H^*(u) = \sup_{z \in Z} \langle u, z \rangle - H(z).$$

Zeigen Sie:

(i) Hj ist konvex.

(ii) Für Z reflexiv, d.h. $Z^{**} = Z$, gilt $H^{**}(z) \leq H(z)$ für alle z, wobei $H^{**} = (H^*)^*$.

(iii) Unter den Annahmen aus (ii) gilt für jedes konvexe Funktional G, das $G(z) \leq H(z)$ für alle z erfüllt auch $G(z) \leq H^{**}(z)$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Konvexe Konjugation 2:
Berechnen Sie die Legendre Transformation folgender Funktionale.

(i) $J : X \to \mathbb{R}$, $J(x) = \|x\|_X$ für einen Banachraum X.

(ii) $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $J(x) = \frac{1}{2}(x - c)^2$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

(iii) $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $J(x) = c \log \frac{c}{x} - c + x$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Schwache Konvergenz und Operatoren
Sei $K : X \to Y$ ein beschränkter linearer Operator. Zeigen Sie, dass K stetig in den schwachen Topologien ist (nehmen Sie diese als metrisierbar an). Sei $X = Z^*$ und $K = L^*$ für einen beschränkten linearen Operator $L : Y^* \to Z$. Zeigen Sie, dass dann K stetig von der schwach-stern Topologie in X in die schwache Topologie in Y ist.