Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt 5, Abgabe: Donnerstag, 20.11.2013, 12.00 Uhr

Übungstermine:

Gruppe 1:	Di.	12 - 14 Uhr	SRZ 205	BK	120	(Bastian Pietras)
Gruppe 2:	Di.	14 - 16 Uhr	SRZ 205	BK	110	(Christoph Tenbrock)

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Iterative Regularisierung :
Sei $K : X \to Y$ ein kompakter linearer Operator mit Singulärwertzerlegung (σ_n, u_n, v_n). Betrachten Sie für $0 < \tau < \frac{2}{\|K\|^2}$ die Fixpunktiteration

$$u^{k+1} = u^k - \tau K^*(Ku^k - f).$$

Daraus erhalten wir eine zugehörige Familie von Operatoren $R_k : Y \to X$ mit $R_k f := u_k$.

(a) Zeigen Sie, dass die R_k wohldefinierte lineare Operatoren sind und bestimmen Sie die Funktionen $g_k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, sodass

$$R_k u = \sum_{n=1}^{N} g_k(\sigma_n)\langle f, v_n\rangle u_n$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $g_k(\sigma)$ punktweise gegen $\frac{1}{\sigma}$ konvergiert für $k \to \infty$.

(c) Unter Annahme einer source condition $K^+ f = (K^*K)^\nu z$ berechnen sie eine Abschätzung des Fehlers $\|K^+ f - R_k f^\delta\|$ unter den üblichen Annahmen, und eine möglichst optimale Wahl des Abbruchindex $\overline{k}(\delta)$.

Aufgabe 2: (5 Punkte)
Tikhonov und iterierte Tikhonov Regularisierung :
Sei $K : X \to Y$ ein kompakter linearer Operator mit Singulärwertzerlegung (σ_n, u_n, v_n). Betrachten Sie für $\alpha > 0$ die Tikhonov-Regularisierung

$$R^1_\alpha = (K^*K + \alpha I)^{-1} K^*$$

und die iterierte Tikhonov-Regularisierung

$$R^2_\alpha = (K^*K + \alpha I)^{-1}(K^* + \alpha(K^*K + \alpha I)^{-1}K^*),$$

(a) Berechnen Sie die entsprechenden Funktionen $g^i_\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, sodass

$$R^i_\alpha = \sum_{n=1}^{N} g^i_\alpha(\sigma_n)\langle f, v_n\rangle u_n$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $g^i_\alpha(\sigma)$ punktweise gegen $\frac{1}{\sigma}$ konvergiert für $k \to \infty$.

(c) Unter Annahme einer source condition $K^+ f = (K^*K)^\nu z$ berechnen sie eine Abschätzung des Fehlers $\|K^+f - R_\alpha f^\delta\|$ unter den üblichen Annahmen, und eine möglichst optimale Wahl des Abbruchindex $\overline{\alpha}(\delta)$. Was ist die jeweilige Qualifikation der beiden Verfahren ?

Aufgabe 3: (3 Punkte)
Tikhonov-Regularisierung und Regularität:
Sei $I = [0, M]$ mit $M > 0$ und $K : L^2(I) \to L^2(I)$ definiert durch

$$(Ku)(s) = \int_0^M e^{-st} u(t)\, dt, \quad s \in I.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $f \in L^2(I)$ und $\alpha > 0$ die Lösung der Tikhonov-Regularisierung

$$u^\delta_\alpha = (K^*K + \alpha I)^{-1} K^* f$$

unendlich oft stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 27.11.2014, 12.00 Uhr)
Benutzen Sie ihr Programm zur Diskretisierung eines Integraloperators aus Übungsblatt 3 um eine diskretisierte Version der Tikhonov und der iterierten Tikhonov Regularisierung (wie Aufgabe 2) zu implementieren. Testen sie ihr Programm für Eingangsdaten f, die sie durch exakte Integration einer gegebenen Funktion u^* erhalten und addieren sie in den Gitterpunkten zufälliges oder hochfrequentes Rauschen um f^δ zu erhalten. Variieren Sie sowohl α als auch n (wenn die andere Variable fix bleibt) und interpretieren Sie die Ergebnisse.