Prof. Dr. M. Burger, WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt 4, Abgabe: Donnerstag, 13.11.2013, 12.00 Uhr

Übungstermine:

Gruppe 1:	Di.	12 - 14 Uhr	SRZ 205	BK	120	(Bastian Pietras)
Gruppe 2:	Di.	14 - 16 Uhr	SRZ 205	BK	110	(Christoph Tenbrock)

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei $K : X \to Y$ ein kompakter Operator mit Singulärsystem (σ_n, u_n, v_n). Dazu sei $R_\alpha : Y \to X$ definiert als

$$R_\alpha f = \sum_{n=1}^{\infty} g_\alpha(\sigma_n)\langle f, v_n\rangle u_n \in Y,$$

wobei $g_\alpha : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative und beschränkte Funktion ist. Zeigen Sie, dass R_α ein wohldefinierter linearer Operator ist und zeigen sie

$$\|R_\alpha\| \leq \sup_{t \geq 0} g_\alpha(t).$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Inverse Probleme der Transportgleichung:
Wir betrachten im Folgenden zwei inverse Probleme für die Transportgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - a(x)\frac{\partial u}{\partial x} = f(x), \qquad x, t \in \mathbb{R}_+,$$

mit gegebenem Anfangswert $u(x, 0) = u_0(x)$:

(i) Identifikation des Quellterms $f(x)$ für $a > 0$ konstant aus der zusätzlichen Messung $u(0,t)$, $0 \leq t \leq T$.

(ii) Identifikation der Geschwindigkeit $a(x)$ für $f \equiv 1$ aus der zusätzlichen Messung $u(0,t)$, $0 \leq t \leq T$.

Benutzen Sie die Formel aus dem letzten Übungsblatt um in den jeweiligen Fällen folgende Resulte zu zeigen:

(i) Zeigen Sie, dass f im Intervall $[0, aT]$ eindeutig bestimmt ist und leiten Sie eine Lösungsformel her.

(ii) Sei u_0 streng monoton. Zeigen Sie, dass es ein $x_0 > 0$ (abhängig von T) gibt, sodass a im Intervall $[0, x_0]$ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Verallgemeinerte Inverse:
Bestimmen Sie die verallgemeinerten Inversen folgender Operatoren.

1. $K_1 : L^2((0,1)) \to L^2((0,1)), \quad f \mapsto gf$, wobei $0 \neq g \in \mathcal{C}([0,1])$ ist.
2. $K_2 : L^2((0,1)) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\, dt.$
3. $K_3 : L^2((0,1)) \to \mathbb{R}^n, \quad f \mapsto \left(\int_0^1 f(t)w_1(t)\, dt, \ldots, \int_0^1 f(t)w_n(t)\, dt,\right)^T$, mit dem Orthonormalsystem $\{w_1, \ldots, w_n\}$ in $L^2((0,1))$.

Hinweis: Bestimmen sie zunächst die Unterräume $N(K)$ und $R(K)$, sowie ihre Orthogonalräume. Berechnen Sie dann $\tilde{K}^{-1}$ der Einschränkung $\tilde{K}$ von K auf $\tilde{K} : N(K)^\perp \to R(K)$ (s. Vorlesung).

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Schlechtgestellte Wärmeleitungsgleichung:
Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung in die falsche Zeitrichtung

$$\partial_t v = \partial_{xx} v \qquad \text{in } (0,1) \times (0,T) \tag{1}$$

mit Randwerten $v(0,t) = v(1,t) = 0$ und gegebenem Endwert $v(x,T) = f \in L^2(\Omega)$. Formulieren Sie die Berechnung von $u = v(x,0)$ als inverses Problem. Berechnen Sie durch einen Ansatz der Form

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin n\pi x$$

die Lösung des inversen Problems und interpretieren Sie die Lösbarkeit und Schlechtgestelltheit analog zur Picard-Bedingung.
Hinweis: Benutzen Sie die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit gegebenem Anfangswert um einen Operator K zu definieren