Prof. Dr. M. Burger, WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt , Abgabe: Donnerstag, 30.10.2013, 12.00 Uhr

Übungstermine:

Gruppe 1:	Di.	12 - 14 Uhr	SRZ 205	BK	120	(Bastian Pietras)
Gruppe 2:	Di.	14 - 16 Uhr	SRZ 205	BK	110	(Christoph Tenbrock)

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei X ein Banachraum. Zeigen Sie, dass die Einheitskugel

$$B := \{x \in X \mid \|x\|_X \leq 1\} \tag{1}$$

nicht kompakt ist, wenn X unendlichdimensional ist.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Sigma)$ gegeben durch

$$(Ku)(x) = \int_\Omega k(x,y)u(y)\ dy,$$

und die Folge $K_n : L^2(\Omega) \to L^2(\Sigma)$ duch

$$(K_n u)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\int_{\Omega_i^n} k(x,y)\ dy}{\int_{\Omega_i^n} 1\ dy} \int_{\Omega_i^n} u(y)\ dy,$$

wobei

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i^n$$

eine disjunkte Zerlegung mit

$$\max_i \operatorname{diam}(\Omega_i^n) = \max_i \sup_{x,y\in\Omega_i^n} |x-y| \to 0$$

für $n \to \infty$ ist. Zeigen Sie, dass $\|K - K_n\| \to 0$ gilt. (Es genügt auch das Resultat für $k \in C^1(\Omega \times \Sigma)$ zu zeigen).

Aufgabe 3: (3 Punkte)
Sei u^* ein Singulärvektor zu K, d.h. $K^*Ku^* = \sigma^2 u$ und sei $f = Ku^*$. Berechnen sie exakt die Lösung von

$$K^*Ku_\alpha + \alpha u_\alpha = K^*f,$$

für $\alpha > 0$ sowie die Iterierten zu

$$u^{k+1} = u^k - \tau K^*(Ku^k - f), \qquad u^0 = 0.$$

Berechnen Sie den Grenzwert für $\alpha \to 0$ bzw. $k \to \infty$ und interpretieren Sie die Konvergenzgeschwindigkeit bezüglich der Grösse von σ. (Hinweis: benutzen Sie die Eindeutigkeit der Lösung und machen sie einen einfachen Ansatz um diese zu berechnen).

Aufgabe 4: (5 Punkte)
EKG-Messung: Bei einer EKG-Messung klebt man einen Ring aus Elektroden um die Brust, sendet mit diesen kleine elektrische Ströme in den Körper, und misst das elektrische Potential. Dies lässt sich mathematisch vereinfacht (wenn man Körper und Herz als konzentrische Kreise ansetzt) durch die Lösung folgenden Problems modellieren

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \text{in } \{x \mid R_0 \leq x \leq R\}$$

mit den Randbedingungen für Potential und Strom

$$u(x) = f(x), \qquad \nabla u \cdot x = gR \qquad \text{für } |x| = R.$$

In Polarkoordinaten lässt sich das Problem umschreiben zu

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \qquad R_0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

mit

$$u(R,\varphi) = F(\varphi), \qquad \frac{\partial u}{\partial r} = G(\varphi).$$

Berechnen Sie durch einen Ansatz der Form

$$u(R,\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty}(a_j(r)\sin(j\varphi) + b_j(r)\cos(j\varphi))$$

eine Lösung dieses Problems und insbesondere das Potential am Herz $u(R_0,\varphi)$. Interpretieren Sie das Ergebnis bezüglich der Fehlerverstärkung.