Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt 11, Abgabe: Donnerstag, 22.1.2015, 12.00 Uhr

Übungstermine:

Gruppe 1:	Di.	12 - 14 Uhr	SRZ 205	BK	120	(Bastian Pietras)
Gruppe 2:	Di.	14 - 16 Uhr	SRZ 205	BK	110	(Christoph Tenbrock)

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Wir betrachten einen Vorwärtsoperator, der implizit über die Lösung einer Gleichung (z.B.PDGL definiert ist). D.h. $Ku = Lv(u)$, wobei $v(u)$ die Lösung von $e(u, v) = 0$ ist. Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel eine Formel für die Ableitung des Datenterms

$$D(Ku, f) = \frac{1}{2}\|Ku - f\|^2.$$

Zeigen, Sie, dass die Ableitung auch mit Hilfe des Lagrange-Funktionals

$$L(u, v, w) = D(Ku, f) + \langle w, e(u, v)\rangle$$

berechnet werden kann, und zwar als $\partial_u D(Ku, f) = \partial u L(u, v, w)$ mit

$$F(u) = L(u, v(u), w(u))$$

und $w(u)$ Lösung des sogenannten adjungierten Problems

$$\partial_u L(u, v, w) = 0.$$

Wenden Sie dieses Resultat für $e(u, v) = \Delta v - u$ in Ω mit homogenen Neumann-Randwerten auf $\partial\Omega$ an, wobei L der Spuroperator, der u auf $\partial\Omega$ auswertet ist.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
In der Rekonstruktion von Hirnaktivität durch EEG-Daten an der Kopfoberfläche erhält man bei allen Standardverfahren eine Überschätzung der Aktivität am Rand im Vergleich zum Inneren. Wir vollziehen dies an einem skalaren Modellproblem nach. Die Messung sei v auf dem Rand von Ω, wobei $v = v(u)$ die Lösung von

$$\Delta v = u$$

in Ω mit Neumann-Randdaten $\nabla \cdot n = 0$ auf dem Rand von Ω ist. Dabei beschreibt v das elektrische Potential, die Neumann Randbedingung bedeutet dass kein Strom aus dem Kopf fließt und u ist die gesuchte Aktitivätsverteilung. Wir berechnen u mit Hilfe von Tikhonov-Regularisierung, d.h. wir minimieren

$$J_\alpha(u) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (v(u) - f)^2 \, d\sigma + \frac{\alpha}{p}\int_\Omega |u|^p \, dx,$$

für ein $p \in (1, \infty)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Rechnungen aus Aufgabe 1, dass u sein Maximum immer auf $\partial\Omega$ annimmt.
(Hinweis: Verwenden Sie das Maximumprinzip für die Laplace-Gleichung).

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Verwenden Sie die auf der Homepage zur Verfügung gestellten Codes um das ROF-Modell

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u-f)^2 \, dx + \alpha TV(u) \to \min_u$$

für einige Testbilder ihrer Wahl zu testen. Stören Sie diese dazu mit additivem Rauschen mit verschiedener Varianz. Implementieren Sie basierend darauf eine Bregman iteration durch einfachen Update von f und testen Sie diese ebenfalls.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Implementieren Sie ein Forward-Backward Splitting Verfahren zur Lösung von Problemen der Form

$$\frac{1}{2}\|Ku-f\|_2^2 + \alpha\|u\|_1,$$

d.h.

$$\begin{aligned} u^{k+1/2} &= u^k - \tau K^*(Ku^k - f) \\ u^{k+1} &= S_{\alpha\tau}(u^{k+1/2}) \end{aligned}$$

mit dem Shrinkage-Operator S_t zur ℓ^1-norm. Testen Sie ihr Programm an den Jonglier-Daten zur Berechnung der Beschleunigung.