Prof. Dr. M. Burger, WS 14/15

# Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt 10, Abgabe: Donnerstag, 15.1.2015, 12.00 Uhr

---

**Übungstermine:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Gruppe 1: | Di. | 12 - 14 Uhr | SRZ 205 | BK | 120 | (Bastian Pietras) |
| Gruppe 2: | Di. | 14 - 16 Uhr | SRZ 205 | BK | 110 | (Christoph Tenbrock) |

---

**Aufgabe 1:** (4 Punkte)
Seien $X, Y$ Hilberträume und $K : X \to Y$. Wir betrachten iterative Verfahren der Form

$$u^{k+1} \in \arg\min_u \|u - u^k\|_L^2 + \|Ku - f\|^2$$

mit

$$\|u\|_L = \sqrt{\langle Lu, u\rangle}$$

für einen positiv definiten Operator $L$. Zeigen Sie durch geeignete Wahl von $L$, dass die iterierte Tikhonov-Regularisierung und die Landweber-Iteration (im konvergenten Fall) als Spezialfall geschrieben werden können.

**Aufgabe 2:** (4 Punkte)
Sei $K : X \to Y$ ein nichtlinearer Frechet-differenzierbarer Operator. Berechnen Sie die Ableitung von

$$J(u) = D(K(u), f) = \frac{1}{2}\|K(u) - f\|^2$$

und basierend darauf die Optimalitätsbedingung für die Minimierung von

$$J_\alpha(u) = D(K(u), f) + \alpha R(u).$$

Was ist die Quellbedingung im nichtlinearen Fall ?

**Aufgabe 3:** (4 Punkte)
Sei $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und

$$f_i = (Ku^*)_i + n_i$$

mit $n_i$ identisch unabhängig normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz $\sigma^2$. Dazu sei $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $u^*$ erfülle die Quellbedingung $K^*w \in \partial R(u)$. $u_\alpha$ sei die Lösung einer Variationsmethode mit Regularisierung $R$, d.h.

$$K^*Ku_\alpha + \alpha p_\alpha = K^*f, \qquad p_\alpha \in \partial R(u_\alpha).$$

Als Funktionen von $f$ und damit von $n$ können wir $u_\alpha$ und $p_\alpha$ als Zufallsvariablen interpretieren.Zeigen Sie für den Erwartungswert des Fehlers in der Bregman Distanz

$$E[\langle p_\alpha - K^*w, u_\alpha - u^*\rangle] \leq \frac{m\sigma^2}{2\alpha} + \alpha\|w\|^2.$$

**Aufgabe 4:** (4 Punkte)
Wir betrachten das klassische ROF-Modell zum Bildentrauschen ($\Omega$ ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^2$)

$$J_\alpha(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega (u - f)^2 \, dx + \alpha |u|_{BV} \to \min_u .$$

Zeigen Sie, dass $J_\alpha$ einen Minimierer im Raum der Funktionen beschränkter Variation $BV(\Omega)$ hat (verwenden Sie dazu dass dieser ein Dualraum ist), wobei

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = |u|_{BV} + \|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Leiten Sie für $\Omega \subset \mathbb{R}$ formal eine Optimalitätsbedingung her, wobei sie

$$|u|_{BV} = \sup_{\|g\|_{L^\infty} \leq 1} \int_\Omega g'(x) u(x) \, dx$$

verwenden. Folgern Sie damit, dass fast überall gilt $u'(x) = 0$ oder $u(x) = f$.