Prof. Dr. M. Burger, WS 14/15

# Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt 1, Abgabe: Donnerstag, 23.10.2013, 12.00 Uhr

---

**Übungstermine:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Gruppe 1: | Di. | 12 - 14 Uhr | SRZ 205 | BK | 120 | (Bastian Pietras) |
| Gruppe 2: | Di. | 14 - 16 Uhr | SRZ 205 | BK | 110 | (Christoph Tenbrock) |

---

**Aufgabe 1:** (4 Punkte)
Sei $I = [0, 1]$. Wir betrachten den Operator

$$K : L^2(I) \to L^2(I), u \mapsto \int_0^t u(s)\ ds.$$

Zeigen sie:

(i) $K$ ist wohldefiniert, d.h. für jedes $u \in L^2(I)$ ist auch $Ku \in L^2(I)$.

(ii) $K$ ist ein beschränkter linearer Operator, d.h.

$$\|Ku\|_{L^2} \leq \|K\| \|u\|_{L^2}$$

und geben sie eine Abschätzung für $\|K\|$ an.

(iii) Der adjungierte Operator zu $K$ ist gegeben durch

$$(K^* v)(t) = \int_t^1 v(s)\ ds.$$

**Aufgabe 2:** (4 Punkte)
Zur regularisierten Inversion des Operators $K$ aus Aufgabe 1 betrachten wir die Glättung

$$S_\alpha(y)(t) = \frac{1}{\max\{1, t+\alpha\} - \min\{0, t-\alpha\}} \int_{\min\{0,t-\alpha\}}^{\max\{1,t+\alpha\}} y(s)\ ds$$

und daraus

$$R_\alpha(u) = \frac{d}{dt} S_\alpha(y).$$

(i) Berechnen sie eine explizite Form für $R_\alpha$ und zeigen sie, dass für $\alpha > 0$ der Operator $R_\alpha$ beschränkt auf $L^2(I)$ ist.

(ii) Schätzen sie für $u^* \in C^1(I)$ und $y^\delta \in L^2(I)$ mit $\|y^\delta - Ku^*\|_{L^2(I)}$ den Fehler $\|R_\alpha y^\delta - u^*\|_{L^2(I)}$ ab.

**Aufgabe 3:** (4 Punkte)
Ein Ball wird mit einem Marker versehen und seine Bewegung beim Jonglieren wird mit einer Hochgeschwindigkeitskamera verfolgt, d.h. man erhält zu verschiedenen Zeitpunkten $t_j = j\Delta t$ die Position $X^\delta(t_j) \in \mathbb{R}^3$. Dabei ist $\delta$ die Messgenauigkeit bei der Rekonstruktion der Markerposition (z.B. 1mm). Daraus möchte man die Kraft, die auf den Ball wirkt, berechnen (neben der Erdanziehung ist dies die Kraft bei der Berührung durch die Hand). Modellieren sie dies als inverses Problem unter Verwendung der Newton'schen Gesetze bei gegebener Masse des Balls. Versuchen sie eine Fehlerschranke an die Messung der kontinuierlichen Trajektorie $X^\delta(t)$, $t \in [0, t_{\max}]$ herzuleiten, die sie durch lineare Splineinterpolation in der Zeit erhalten, wobei $v_{\max}$ eine bekannte obere Schranke an die Geschwindigkeit des Balls ist.