Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt 10, Abgabe: Montag, 13. Januar 2014, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (6 Punkte)
Abtasttheorem von Petersen und Middleton:
Sei W eine reelle, nichtsinguläre $n \times n$-Matrix, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Sei

$$L_W = Wk,\ k \in \mathbb{Z}^n$$

ein Abtastgitter. Weiter Sei

$$\operatorname{supp} \widehat{f} \subset K, K \,\text{kompakt}.$$

Zeigen Sie: Falls

$$K + \xi \cap K + \xi' = \emptyset \ \forall \xi \neq \xi' \in L_{W^{-t}},$$

so ist f durch die Werte auf dem Gitter eindeutig bestimmt.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Abtasttheorem für periodische Funktionen
Sei f eine stetige, periodische Funktion. Die Fourierkoeffizienten $\widehat{f_k}$ verschwinden für $|k| > n$. Sei $h = \pi/n$. Zeigen Sie:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{dx} = h \sum_{k=-n}^{n-1} f(kh)$$

und folgern Sie, dass die Funktion f eindeutig durch die Werte von $f(kh)$ bestimmt ist.

Aufgabe 3: (6 Punkte)
Optimale Abtastung
Man kann zeigen, dass die (volle!) Fouriertransformierte $\widehat{g}$ von $g = Rf$ klein ist außerhalb von $K = \{(k, \sigma) : |\sigma| < \Omega, |\sigma\rho| > |k|\}$.

1. Zeichnen Sie K und bestimmen Sie die kleinste Diagonalmatrix W, so dass die Bedingung aus Aufgabe 1 erfüllt ist. Zeigen Sie: Dadurch erhält man die Bedingung für die parallele Abtastgeometrie.

2. Bestimmen Sie die beste Matrix W (zeichnerisch), so dass die Bedingung von Aufgabe 1 erfüllt ist. Überlegen Sie, welcher Abtastung das entspricht.

Bemerkung: Die so erhaltene effiziente Abtastung wurde schon von Cormack vorgeschlagen und ist optimal in dem Sinne, dass die Translate des Trägers von $\widehat{g}$ den Raum vollständig ausfüllen.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Aufgabe 5 (Programmieraufgabe): (4 Punkte)