

Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt 8, Abgabe: Montag, 16. Dezember 2013, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)Sei für $\varepsilon > 0$ $f_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & |x| \geq \varepsilon \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- 1) $f_\varepsilon \in L_2(\mathbb{R}^1)$
- 2) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{f}_\varepsilon(\xi) = -i \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \operatorname{sgn}(\xi), \xi \neq 0.$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Zeigen Sie: Für

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, f(x) := \frac{1}{\|x\|}$$

gilt

$$\hat{f}(\xi) = f(\xi).$$

Mit Hilfe dieser Formel werden wir einen heuristischen Beweis für die ρ -filtered-Layergram-Inversion der Radontransformation angeben.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Es sei ein verrausches Bild $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ gemessen worden. Wir betrachten das Entrauschungsproblem für die Tikhonov–Regularisierung und die Seminorm

$$|f|_\alpha^2 = \|\partial_x^\alpha f\|_2^2 + \|\partial_y^\alpha f\|_2^2,$$

also

$$h := \inf_{f \in L^2} \|f - g\|_2^2 + c|f|_\alpha^2.$$

Hierbei lassen wir für α auch gebrochene Werte und für f auch nicht-differenzierbare Funktionen zu, die Norm definiert sich dann über die Fouriertransformierte (wenn sie existiert).

1. Geben Sie h explizit an mit Hilfe der Fouriertransformierten von g . Wann existiert h ?
2. Zeigen Sie: h entsteht aus g durch Faltung mit einer Funktion.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Implementieren Sie den Entrauschungsalgorithmus der letzten Aufgabe. Hinweis:

$$\widehat{h}(\xi) = \frac{\widehat{g}(\xi)}{1 + c\|\xi\|_2^{2\alpha}}.$$

Nehmen Sie an, dass g seinen Träger in $[-\pi, \pi]^2$ hat. Dann lässt sich nach dem letzten Übungsblatt die analytische Fouriertransformierte durch die diskrete Fouriertransformation approximieren. Berechnen Sie h mit dieser Approximation.

Nehmen Sie als Beispiel den Kameramann und addieren Sie ein 20%iges additives Rauschen. Probieren Sie diverse Werte von α und c aus. Für welche Werte erhalten Sie (visuell) das beste Ergebnis?

Approximieren Sie auch den Kern der zugehörigen Faltung und plotten Sie ihn. Hinweis: Setzen Sie die Approximation der Delta–Distribution in die Filterung ein.