Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt 7, Abgabe: Montag, 9. Dezember 2013, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)

1. Es seien $J_k(x)$ die Koeffizienten der Laurent–Reihe
$$e^{x(z-1/z)/2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k J_k(x).$$
Zeigen Sie:
$$J_k(x) = \frac{i^{-k}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix\cos\varphi - ik\varphi} d\varphi.$$
$J_k(x)$ heißt Bessel–Funktion erster Art der Ordnung k.

2. Es sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ radial, d.h.
$$F(x) = f_0(|x|).$$
Zeigen Sie: Dann ist auch $\widehat{f}$ radial, genauer gilt
$$\widehat{f}(\xi) = |\xi|^{(2-n)/2} \int_0^{\infty} f_0(r) r^{n/2} J_{(n-2)/2}(r|\xi|) dr.$$
Bei dem Beweis der Formel können Sie sich auf $n = 2$ beschränken.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Bestimmen Sie jeweils alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die die Integrale
$$\int_{\mathbb{R}^n} ||x||^{\alpha} e^{-||x||_2^2} \mathrm{dx}$$
bzw.
$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||x||)^{\alpha} \mathrm{dx}$$
existieren.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion mit Träger in $(-\pi, \pi)$. Zeigen Sie: Die diskrete Fouriertransformierte der Zahlen

$$f_k = f(x_k),\ x_k = k\frac{\pi}{N},\ k = -N \dots N$$

liefert eine Approximation an $\widehat{f}$ (Trapezregel). An welcher Stelle?

Aufgabe 4: (4 Punkte)

1. Berechnen Sie analytisch die Radontransformation

   $$Rf(\theta, s) = \int_{x\cdot\theta=s} f(x)dx$$

   für die folgenden Funktionen:

   (a) Charakteristische Funktion eines Kreises

   (b) Charakteristische Funktion einer Ellipse

   (c) Charakteristische Funktion eines Rechtecks

   (d) $\exp(-(\lambda x)^2)$

2. Programmieren Sie die Formeln. Testen Sie Ihr Programm am (vereinfachten) Shepp–Logan–Phantom (wie in matlab in der Dokumentation zu phantom() angegeben). Vergleichen Sie mit dem Ergebnis, das Matlab liefert.
   Bemerkung: phantom benutzt eine Diskretisierung, ist also nicht exakt!