Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt 1, Abgabe: Montag, 28.10.2013, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei

$$f \in L^2([-\pi, \pi])$$

und für schwach differenzierbare Funktionen g sei

$$I(g) = ||g - f||_2^2 + ||g'||_2^2.$$

Bestimmen Sie h explizit mit

$$h = \arg\min_g I(g).$$

Hinweis: Schreiben Sie die Funktionen als Fourierreihe.

Begründen Sie: h ist zweimal schwach differenzierbar. Geben Sie die Ableitung von h an und vergleichen Sie sie für den Fall, dass f schwach differenzierbar ist, mit der Ableitung von f.

Aufgabe 2: (8 Punkte)
Die Helmholtzgleichung im $\mathbb{R}^2$ lautet für ein festes $k > 0$

$$\Delta u(x, y) + k^2 u(x, y) = 0.$$

Sie entsteht aus der Wellengleichung durch Trennung der Variablen. Wir betrachten auf $[0, \pi] \times \mathbb{R}^+$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u(0, y) = u(\pi, y) &= 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

für eine Funktion $f \in C^2$ mit $f(0) = f(\pi) = 0$. Weiter sei $g(x) = u(x, 1)$.

1. Bestimmen Sie u explizit. Hinweis: Benutzen Sie die Sinusreihe

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \sin(lx).$$

2. Zeigen Sie: g hängt nicht stetig von f ab (in der 2–Norm). Die Berechnung der Lösung des direkten Problems ist eine schlecht gestellte Aufgabe.

3. Es sei bekannt, dass $a_l = 0$ für $l > L$ (a priori–Wissen). Geben Sie die Lösung g so an, dass sie stetig von f abhängt. Geben Sie für $L = k$ eine Abschätzung des Fehlers in g abhängig vom Fehler in f an.

4. Geben Sie eine Integralgleichung für f und g an.

Aufgabe 3 (Programmieraufgabe): (4 Punkte)
Lösen Sie das Anfangswertproblem aus der letzten Aufgabe numerisch durch Diskretisierung mit einem einfachen Fünf–Punkte–Stern. Setzen Sie als Anfangswert

$$f(x) := \sin(jx),\ j < k,$$

und $k = 10$. Visualisieren Sie das Ergebnis und vergleichen Sie mit der analytischen Lösung. Warum geht das schief, obwohl die a priori–Bedingung aus der letzten Aufgabe erfüllt ist?

Wie könnte man das Ergebnis stabilisieren? Hinweis: Benutzen Sie in jedem Schritt eine Sinusreihe und schneiden Sie Frequenzen jenseits von k ab (Regularisierung durch Projektion).