Eigenschaften kompakter Operatoren

Definition

Seien X, Y normierte Räume und sei $A : X \to Y$ linear. Dann heißt A kompakt (vollstetig), wenn für jede beschränkte Menge $B \subset X$ die Menge $\overline{A(B)}$ kompakt ist.

Eigenschaften kompakter Operatoren

Definition

Seien X, Y normierte Räume und sei $A : X \to Y$ linear. Dann heißt A kompakt (vollstetig), wenn für jede beschränkte Menge $B \subset X$ die Menge $\overline{A(B)}$ kompakt ist.

Theorem

Seinen X, Y, Z Hilberträume und sei $A : X \to Y$ linear. Dann gilt:

1. *A ist genau dann kompakt, wenn für jede beschränkte Folge $(x_n)_n$ in X die Folge $(Ax_n)_n$ eine konvergente Teilfolge besitzt.*
2. *Ist A kompakt, so ist A beschränkt (also stetig) und damit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.*
3. *Linearkombinationen kompakter linearer Operatoren sind kompakt.*
4. *Sei $A_1 \in \mathcal{L}(X, Y)$, $A_2 \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Dann ist $A_1 A_2$ kompakt, falls A_1* **oder** *A_2 kompakt ist.*

5. Sei Y ein Banachraum und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n : X \to Y$ linear und kompakt. Es gelte $\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\| = 0$. Dann ist A kompakt.
6. Sei A beschränkt und $\dim(R(A)) < \infty$, dann ist A kompakt.

5. Sei Y ein Banachraum und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n : X \to Y$ linear und kompakt. Es gelte $\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\| = 0$. Dann ist A kompakt.
6. Sei A beschränkt und $\dim(R(A)) < \infty$, dann ist A kompakt.

- Sei $(x_n)_n \in X$ beschränkt mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_Y \leq C$.
- Da A_1 kompakt $\Rightarrow$ die Folge $(A_1 x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(A_1 x_{m_1(k)})_{k\in\mathbb{N}}$
- Da A_2 kompakt $\Rightarrow$ die Folge $(A_2 x_{m_1(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(A_2 x_{m_2(k)})_{k\in\mathbb{N}}$
- ... (vollst. Induktion) $(x_{m_i(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ T.F. von $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $(x_{m_{i-1}(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(x_{m_i(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist für alle $i \in \mathbb{N}$ jeweils $(K_i x_{m_i(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
  (insb. ist dann auch für alle $j \geq i$ die Folge $K_i(x_{m_j(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent).
- Sei nun $y_i := x_{m_i(i)}$ die “Diagonalfolge”, Teilfolge von x_m.

Zu zeigen:

$$(Ky_i) \text{ ist konvergent.}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\| = 0$ ex. für jedes $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ so dass

$$\|A - A_n\| \leq \frac{\epsilon}{3C}.$$

Aus der Konstruktion von y_i folgt, dass $A_n y_i$ konvergiert (endl. viele Elemente spielen keine Rolle), sei also $i_0 \in \mathbb{N}$ so dass für $i, j > i_0$ gilt

$$\|A_n y_i - A_n y_j\| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Damit gilt für $i, j > i_0$

$$\begin{aligned} \|Ay_i - Ay_j\| &\leq \|Ay_i - A_n y_i\| + \|A_n y_i - A_n y_j\| + \|A_n y_j - Ay_i\| \quad (1) \\ &\leq \|A - A_n\|(\|y_i\| + \|y_j\|) + \frac{\epsilon}{3} < \frac{\epsilon}{3C}2C + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \quad (2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow (Ay_i)$ ist Cauchy-Folge.
Da Y Banachraum (vollständig)
$\Rightarrow (Ay_i)$ konvergiert.
Da x_n bel. war $\Rightarrow A$ ist kompakt.

6.: Folg aus dem Satz von Heine-Borel, das danach der Abschluss der beschränkten Teilmengen von $R(A)$ kompakt ist.

Definition

Sei $A : X \to X$ linear und kompakt. A selbstadjungiert, falls

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \forall x,\ y \in X$$

Definition

Sei $A : X \to X$ linear und kompakt. A selbstadjungiert, falls

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \forall x,\ y \in X$$

Theorem

Sei $A \in \mathcal{L}(X, X)$ kompakt und selbstadjungiert. Dann sind alle Eigenwerte von A reell. Weiterhin sind Eigenfunktionen zu unterschiedlichen Eigenwerten orthogonal.

Theorem

Sei $A \in \mathcal{L}(X, X)$ kompakt und selbstadjungiert. Dann sind $\|A\|_{X,X}$ oder $(-\|A\|_{X,X})$ Eigenwerte von A.

Theorem

Sei $A \in \mathcal{L}(X, X)$ kompakt und selbstadjungiert. Dann existiert eine Hilbertbasis aus Eigenvektoren von A und für jedes $f \in X$ gilt die Darstellung

$$f = \sum_i (f, \phi_i)\phi_i + f_0, \quad \textit{mit } Af_0 = 0.$$

Beweis.

Sei $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ die Folge aller nicht verschwindenden Eigenwerte von A. Setze

$$\lambda_0 = 0, \quad E_0 = N(A), \quad \text{und} \quad E_n = N(A - \lambda_n I).$$

Es gilt (s.o.) $0 \leq \dim(E_0) \leq \infty$ und $0 < \dim(E_n) < \infty$. Zu zeigen: $H = \bigoplus_{n\geq 0} E_n$.

- Die Räume $(E_n)_{n\geq 0}$ sind orthogonal:
  Sei $u \in E_n$, $v \in E_m$, $n \neq m$, dann gilt

  $$\lambda_m(u, v) = (Au, v) = (u, Av) = \lambda_n(u, v),$$

  und da $\lambda_n \neq \lambda_m$ folgt $(u, v) = 0$.

$\square$

- Sei F der Raum aufgespannt von den Räumen $(E_n)_{n\geq 0}$. Zu zeigen: F ist Dicht in H (i.e. $F^\perp = 0$, $\perp$ bzgl. H).
  Es ist klar, dass $A(F) \subset F$. Sei nun $u \in F^\perp$ dann gilt

$$(Au, v) = (\underbrace{u}_{\in F^\perp}, \underbrace{Av}_{\in F}) = 0, \quad \forall v \in F,$$

  und daher $A(F^\perp) \perp F$ und somit $A(F^\perp) \subset F^\perp$. Sei

$$T_0 := T|_{F^\perp}.$$

  T_0 ist wieder selbstadjungiert und kompakt. Wir zeigen nun per Widerspruch dass $\sigma(T_0) = 0$ und damit $T_0 = 0$: Nehme also an, es ex. $\lambda \neq 0$ mit $T_0 u = \lambda u$. Damit ist λ aber auch einer der Eigenwerte von T, o.b.D.a. λ_n mit $n \geq 1$. Daher ist $u \in E_n \subset F$. Da aber $u \in F \cap F^\perp$ folgt, dass $u = 0$, also ein Widerspruch und daher $T_0 = 0$. Damit folgt schließlich $F^\perp \subset N(T)$. Da auf der anderen Seite gilt aber $N(T) \subset F$ und damit $F^\perp \subset F$. Daraus folgt $F^\perp = 0$ und F dicht in H.

Theorem

Sei W der Eigenraum eines kompakten Operators zum Eigenwert $\mu \neq 0$. Dann ist W endlichdimensional.

Theorem

Sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ kompakt und selbstadjungiert. Dann häufen sich die Eigenwerte von A höchstens bei 0, d.h. wenn λ_n eine Folge von Eigenwerten von A ist, so dass

$$\lambda_n \to \lambda \text{ wenn } n \to \infty$$

dann ist $\lambda = 0$.

Theorem

Sei W der Eigenraum eines kompakten Operators zum Eigenwert $\mu \neq 0$. Dann ist W endlichdimensional.

Theorem

Sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ kompakt und selbstadjungiert. Dann häufen sich die Eigenwerte von A höchstens bei 0, d.h. wenn λ_n eine Folge von Eigenwerten von A ist, so dass

$$\lambda_n \to \lambda \text{ wenn } n \to \infty$$

dann ist $\lambda = 0$.

Theorem (Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren)

Sei $A \in \mathcal{L}$ kompakt, selbstadjungiert. Sei λ_n die Folge der Eigenwerte und x_n die zugehörigen, normalisierten Eigenvektoren. Dann gilt

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n (x, x_n)_X$$