**Übungen zur Vorlesung Inverse und schlecht gestellte Probleme**

Übungsblatt 9, Abgabe: 15.12.2011, 12:00 Uhr, Briefkasten Nr. 88

---

**Aufgabe 1:** (4 Punkte)
Sei $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ die Landweber-Folge zum Problem $Tx = y$ mit Startwert $x_0$, wobei $T$ ein linearer Operator von $X$ nach $Y$ ist, also

$$x_{k+1} = x_k - \tau T^*(Tx_k - y), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sei $\{\tilde{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ die Landweber-Folge zum Problem $T\tilde{x} = y - Tx_0$ mit Startwert $\tilde{x}_0 = 0$. In beiden Iterationen wird der selber Dämpfungsparameter $\tau$ verwendet. Zeigen Sie:

$$\tilde{x}_k + x_0 = x_k, \quad \forall\, k \geq 1.$$

**Aufgabe 2:** (6 Punkte)
Wir betrachten das Parameteridentifikationsproblem

$$\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}\right) = f, \text{in}[0,1]$$

mit den Randbedingungen $\frac{du}{dx}(0) = u(1) = 0$. Wir nehmen an, dass $a > 0$ überall in $[0,1]$ gilt und suchen $b := \frac{1}{a}$ als Unbekannte.

1. Leiten Sie eine Integralgleichung der Form

   $$(Ab)(x) = \int_0^1 k(x,y)b(y)dy = u(x)$$

   für $b$ her.

2. Berechnen Sie im $L^2-$Skalarprodukt den adjungierten Operator $A^*$.

3. Sei für $\hat{u} = A\hat{b}$ die Folge $(b^k)$ definiert durch die Fixpunktiteration

   $$b^{k+1} = b^k - \tau A^*(Ab^k - \hat{u}).$$

   Zeigen Sie, dass für $\tau > 0$ hinreichend klein die Monotonieeigenschaften

   $$\|Ab^{k+1} - \hat{u}\|_{L^2} \leq \|Ab^k - \hat{u}\|_{L^2}$$

   und

   $$\|b^{k+1} - \hat{b}\|_{L^2} \leq \|b^k - \hat{b}\|_{L^2}$$

   erfüllt sind.

**Aufgabe 3:** (6 Punkte)
(inverses Problem im Ultraschall)

Zu bestimmen sei eine (der Einfachheit halber reelle) Funktion $f$ (Schallgeschwindigkeit im Ultraschall), $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Es stehen Messungen von $u(\theta, x)$ und $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\theta, x)$ für $x \in \partial\Omega$ zur Verfügung, kontinuierlich in $x$, für diskrete Werte $\theta = \theta_1 \dots \theta_N$ (Einfallsrichtung der Ultraschallwelle).

$u$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\Delta_x u(\theta, x) + k^2(1 + f(x))u(\theta, x) = 0, \; x \in \Omega.$$

Es sei

$$R : L^2(\Omega) \mapsto (L^2(\partial\Omega)^2)^N$$

der Messoperator.

1. Bestimmen Sie die Adjungierte. Hinweis: Benutzen Sie die Greenschen Formeln und zeigen Sie, dass die Adjungierte eine Differentialgleichung erfüllt.
   Hinweis: Es ist einfacher, zunächst nur die Adjungierte von $R_j$ berechnen.

2. Geben Sie informell an (als Pseudocode, ohne die Lösung der Differentialgleichung zu implementieren) an, wie die Landweber-Iteration für diesen Fall aussieht. Bestimmen Sie die Komplexität. Nehmen Sie dabei an, dass sich die Differentialgleichungen in $O(N^3 \log N)$ lösen lassen, wobei $h = 1/N$ die Diskretisierungskonstante von $\Omega$ ist.

3. Was ändert sich, falls Sie in jedem Diskretisierungsschritt nur eine Messfunktion $u(\theta_j, x)$ für ein (vom Schritt abhängiges) $j$ benutzen dürfen? Wie ist in diesem Fall die Komplexität pro Schritt?