Übungen zur Vorlesung Inverse und schlecht gestellte Probleme

Übungsblatt 8, Abgabe: 8.12.2011, 12:00 Uhr, Briefkasten Nr. 88

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Beweisen Sie das Abtasttheorem von Petersen und Middleton:

Sei $f \in S(\mathbb{R}^n)$. $\widehat{f}$ verschwinde außerhalb einer kompakten Menge K. Sei $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, und es gelte

$$K + (2\pi)W^{-t}\xi \cap K = \emptyset \forall \xi \in \mathbb{Z}^n.$$

Dann ist f eindeutig durch seine Werte auf dem Gitter $W\xi$, $\xi \in \mathbb{Z}^n$, bestimmt.

Hinweis: Benutzen Sie Shannon oder die Poissonsche Formel.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Nehmen Sie an, dass die Fouriertransformation der Funktion $u(\varphi, s)$ verschwindet außerhalb von

$$K := \{(k, \sigma) : |k| < |\sigma| < \Omega\}.$$

Bestimmen Sie ein W, so dass $K + W\xi$, $\xi \in \mathbb{Z}^n$, den $\mathbb{R}^2$ möglichst gut abdeckt, und die zugehörige Abtastung. Was bedeutet dies für die Abtastung, wenn Sie u mit der Radontransformation identifizieren?

Hinweis: Machen Sie sich eine Skizze von K.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass die Radontransformierte tatsächlich wesentlich verschwindet außerhalb von K. Diese Abtastung führt zu einer Auflösungsverbesserung ohne Erhöhung der Messdichte in s, d.h. ohne bauliche Veränderung des Tomographen.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Beweisen Sie Formel 4.3.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Programmieren Sie die gefilterte Rückprojektion.