Übungen zur Vorlesung Inverse und schlecht gestellte Probleme

Übungsblatt 6, Abgabe: 23. November 2010, 12:00 Uhr, Briefkasten Nr. 88

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit Träger in $[-a, a]$. Es sei $f_k = f(kh)$ bekannt, $k \in \mathbb{Z}$.
Zeigen Sie mit Hilfe der Trapezregel, dass $\widehat{f}$ an diskreten Stellen mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation approximiert werden kann. Geben sie die exakten Formeln an.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand, und sei χ_K die zugehörige charakteristische Funktion von K.
Zeigen Sie: In $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\chi_K = -\nu_i \delta_{\partial K},$$

wobei ν_i die i-te Komponente der außeren Normalen auf ∂K ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
(Ableitung des Logarithmus): Sei $f(x) = \log|x|$. Zeigen Sie:

- f ist lokal integrierbar ($f \in L^1_{\text{loc}}$) und induziert damit eine Distribution in $\mathcal{D}'$.
  Hinweis: Zeigen sie dass f bei Null integrierbar ist, indem Sie f als Ableitung einer Funktion darstellen.
- Die Ableitung dieser Distribution ist durch den Cauchy-Hauptwert von $1/x$ gegeben, d.h. es gilt

  $$T'(\varphi) = ⨍ \frac{\varphi(s)}{s}\, ds$$

  Hinweis: Benutzen Sie die Definition des Cauchy-Hauptwerts aus der Vorlesung. Was passiert nach partieller Integration mit den Randwerten?

Aufgabe 4: (4 Punkte)
(Programieraufgabe): Implementieren Sie die Inversion der Radontransformation mit Hilfe des Fourier-Scheiben-Theorems. Benutzen Sie die schnelle Fouriertransformation auf rechteckigen Gittern. Benutzen Sie dabei eine Interpolationsroutine Ihrer Wahl. Testen Sie Ihr Programm mit dem Shepp-Logan-Phantom.

Zeigen Sie, dass das schlechte Ergebnis tatsächlich durch die Interpolation zustandekommt, indem Sie eine alternative Methode zur Inversion der Fouriertransformation benutzen.