Dr. Frank Wübbeling, Dr. Jan-F. Pietschmann WS 2011/2012

Übungen zur Vorlesung Inverse und schlecht gestellte Probleme

Übungsblatt 1, Abgabe: wird in der Vorlesung bekanntgegeben

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Parameteridentification: Betrachten Sie die eindimensionale Diffusionsgleichung

$$-(a(x)u'(x))' = f(x),\ x \in [0,1],$$

mit den Randbedingungen

$$a(0)u'(0) = b_0, \quad a(1)u'(1) = b_1.$$

Analysieren Sie das inverse Problem der Bestimmung des Diffusionskoeffizienten $a(x)$ aus $u(x)$ und $f(x)$.

1. Sei $f(x) = -1$, $b_0 = 0$ und $b_1 = 1$. Für $a(x) = x$ ist offensichtlich $u(x) = x$ eine Lösung der Gleichung. Zeigen Sie, dass die gestörte Funktion

   $$u_\delta(x) = x + \delta \sin\left(\frac{x}{\delta^2}\right),$$

   eine Lösung der Gleichung mit

   $$a_\delta(x) = \frac{\delta x}{\delta + \cos(x/\delta^2)}$$

   ist. Wie verhalten sich u_δ und a_δ für $\delta \to 0$?

2. Wir betrachten nun allgemein zwei Diffusionskoeffizienten $a(x)$ und $a_\delta(x)$ mit den zugehörigen Lösungen $u(x)$ und $u_\delta(x)$. Zeigen Sie

   $$a(x) - a_\delta(x) = \frac{u'_\delta(x) - u(x)}{u'(x)u'_\delta(x)}\left(b_0 - \int_0^x f(s)\, ds\right).$$

   Geben Sie eine Norm an, in der die Abschätzung

   $$\|a(x) - a_\delta(x)\| \leq C\|u(x) - u_\delta(x)\|$$

   gilt, wobei die Konstante C nur von f, b_0, b_1, u und a anhängen soll.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Helmholtzgleichung: $u(x, y)$ erfülle die Helmholtzgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

auf $[0, \pi] \times [0, Y]$, und es gelte $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$, $u(x, 0) = g(x)$, $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, 0) = 0$.

1. Berechnen Sie die Lösung u der Gleichung in der Form

$$u(x, y) = \sum_k v_k(y) \sin(kx).$$

2. Sei $u_1(x) = u(x, Y)$, $Y > 0$. Zeigen Sie: Die Abbildung von g nach u_1 ist unstetig im Sinne der L^2–Norm, d.h. die Anfangswertaufgabe ist nicht stabil lösbar.

3. Statt g sei nur eine Näherung g_ϵ bekannt mit

$$||g - g_\epsilon||_{L^2} < \epsilon.$$

   Geben Sie abhängig von ϵ ein u_ϵ an, so dass u_ϵ stetig von g_ϵ abhängt, und

$$u_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \to 0} u$$

   in der L^2-Norm. Hinweis: Schneiden Sie die Sinusreihe geeignet ab.

4. Schränken Sie den Laufindex in der Sinusreihe ein bis zum Maximalwert $|k|$. Zeigen Sie: Dann ist die Abbildung von g nach u_1 unabhängig von Y stetig in der L^2-Norm.

Aufgabe 3: (Programmieraufgabe, 4 Punkte**)** Implementieren Sie Teil 3 und 4 der Helmholtzaufgabe in Matlab. Machen Sie sich damit vertraut, was passiert, wenn der Regularisierungsparameter (hier der Maximalwert von $|k|$) zu klein oder zu groß gewählt wird. Zeichnen Sie die zugehörige L-Kurve.