Vorlesungsskript
Inverse Probleme partieller Differentialgleichungen

F. Natterer

*Institut für Numerische
und instrumentelle Mathematik*

SS 1997, Stand: September 2000

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Gegenstand der Vorlesung sind inverse Probleme bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Während beim direkten Problem die Lösung aus der gegebenen Differentialgleichung zu berechnen ist, versucht man beim inversen Problem die Differentialgleichung aus Informationen über ihre Lösung zu bestimmen. Wir erläutern dies an Hand einiger Beispiele.

1. Das inverse Streuproblem der Akustik

Beim direkten Streuproblem sucht man eine Lösung u_θ der Differentialgleichung

$$\Delta u_\theta + k^2 u_\theta = q u_\theta \qquad , \qquad q = q(x) \quad \text{gegeben,}$$

der Form

$$u_\theta(x) = e^{ikx\cdot\theta} + v_\theta(x) \ ,$$

wobei v_θ der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial r} v_\theta(x) - ikv_\theta(x) \to 0 \ , \qquad |x| = r \to \infty$$

(in geeignetem Sinne) genügt. Dabei beschreibt das "Potential" q die akustischen Eigenschaften eines beschränkten Objekts. Außerhalb des Objekts sei $q = 0$. Wird dieses Objekt aus der Richtung θ mit der Frequenz k beschallt, so entsteht die gestreute Welle v_θ.

Beim inversen Problem möchte man q innerhalb des Objekts aus den Werten von v_θ für alle Richtungen θ außerhalb des Objektes bestimmen. Dies ist z.B. das mathematische Problem der Ultraschall-Tomographie.

2. Impedanz-Tomographie

Ein beschränktes Objekt Ω besitze die Leitfähigkeit σ. Dann gilt für das Potential u einer stationären Stromverteilung in Ω

$$\operatorname{div}(\sigma\nabla u) = 0 \qquad \text{in } \ \Omega\,. \tag{0.1}$$

Beim direkten Problem berechnet man u (bis auf eine additive Konstante) aus den Randwerten

$$j = \sigma\frac{\partial u}{\partial \nu} \qquad \text{auf } \ \partial\Omega\,. \tag{0.2}$$

Man hat also eine Neumannsche Randwertaufgabe zu lösen.

Beim inversen Problem nimmt man an, man kenne für jedes j auf $\partial\Omega$ das Potential u, welches (0.1), (0.2) genügt, auf $\partial\Omega$. Mit anderen Worten, man kennt die Neumann-zu-Dirichlet-Abbildung Λ_σ, welche folgendermaßen erklärt ist:

Schritt 1	:	Löse (0.1), (0.2) für vorgegebenes j	.
Schritt 2	:	$\Lambda_\sigma j = u\|_{\partial\Omega}$	.

Technisch wird das so gemacht: Man appliziert mit Hilfe von Elektroden auf $\partial\Omega$ alle möglichen Stromdichten j auf $\partial\Omega$ und mißt die zugehörigen Spannungen $\Lambda_\sigma j$. Aus Λ_σ ist dann σ zu berechnen.

3. Inverse Probleme bei chemischen Reaktionen

In einem Gefäß der Länge L seien zwei Substanzen mit den Konzentrationen $u(x,t)$, $v(x,t)$ an der Stelle $x \in [0,L]$ und der Zeit t enthalten, welche gemäß

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - kuv \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -kuv\,, \qquad 0 \le x \le L \quad , \quad t \ge 0 \tag{0.3}$$

miteinander reagieren. Dabei bedeutet D den Diffusionskoeffizienten, k die Reaktionsgeschwindigkeit. Das Gefäß sei bei $x = L$ für die erste Substanz undurchdringlich, bei $x = 0$ sei die erste Substanz nicht vorhanden, also

$$u(0,t) = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \quad , \quad t \ge 0\,. \tag{0.4}$$

Zur Zeit $t = 0$ seien beide Konzentrationen 1, also

$$u(x,0) = 1 \quad , \quad v(x,0) = 1 \quad , \quad 0 \le x \le 1\,. \tag{0.5}$$

Das direkte Problem besteht darin, bei bekanntem D, k das (nichtlineare, parabolische) Anfangsrandwertproblem (0.3 - 0.5) zu lösen. Beim inversen Problem bestimmt man aus Information über u, v, z.B. der Gesamtmasse von u, also

$$h(t) = \int_0^L u(x,t)dx \ ,$$

die Parameter k, D.

4. Ein inverses Eigenwertproblem der Seismologie

Wir betrachten die Erde als Kugel vom Radius R und nehmen an, daß ihre Dichte ρ und Steifigkeit (rigidity) μ im Mantel $r = |x| > R_c$ nur von r abhängen. Dann genügen die Eigenschwingungen der Erde der Differentialgleichung

$$-(r^4 \mu u')' + \frac{(\ell+2)(\ell-1)}{r^2} r^4 \mu u = \lambda r^4 \rho u \ , \quad R_c \leq r \leq R \ , \tag{0.6}$$
$$u(R_c) = u(R) = 0 \ .$$

Hier ist $\ell = 0, 1, \ldots$.

Man kann (unter geeigneten Voraussetzungen an μ, ρ) zeigen, daß dieses Problem nur für diskrete Werte $\lambda_{\ell j}$, $j = 0, 1, \ldots$ Lösungen u hat, die nicht identisch verschwinden. $\lambda_{\ell j}$ heißen Eigenwerte von (0.6), und $\sqrt{\lambda_{\ell j}/2\pi}$ sind die Frequenzen der Eigenschwingungen.

Das direkte Problem besteht darin, bei bekannten μ, ρ die $\lambda_{\ell j}$ zu berechnen. Praktisch interessanter ist das inverse Problem: Aus den Eigenfrequenzen $\sqrt{\lambda_{\ell j}/2\pi}$, die man bei jedem Erdbeben messen kann, die Funktionen μ, ρ zu berechnen.

5. Das inverse Streuproblem der Quantenmechanik

Die Schrödinger-Gleichung für das Potential V lautet

$$-\Delta\psi + V\psi = E\psi \ . \tag{0.7}$$

Unter gewissen Voraussetzungen an V kann man zeigen, daß es für jede Richtung θ und jede Frequenz k mit $k^2 = E$ eine Lösung $\psi_\theta(k,x)$ gibt mit

$$\psi_\theta(k,x) = e^{ik\theta\cdot x} + \frac{e^{ik|x|}}{|x|} A(k, \frac{x}{|x|}, \theta) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \ .$$

A ist das Fernfeld, das bei Einstrahlung einer Welle aus Richtung θ mit Frequenz k entsteht. Das direkte Problem besteht in der Berechnung von A aus V. Beim inversen Problem möchte man V aus A berechnen.

6. Das inverse kinematische Problem

Sei Ω ein Objekt mit dem Brechungsindex n. Für x_0, $x_1 \in \partial\Omega$ sei $T(x_0, x_1)$ die Zeit, die ein Signal von x_0 nach x_1 benötigt. Dieses Signal läuft entlang der Geodätischen $\Gamma_n(x_0, x_1)$ bezüglich der Metrik

$$ds = n \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (dx_i)^2}\ ;$$

diese ist Lösung des Systems

$$\ddot{x} = \frac{n'}{n^3} \frac{x}{|x|} - \frac{2n'}{n} \frac{x \cdot \dot{x}}{|x|} \dot{x}\ , \quad n' = \nabla n \cdot \frac{x}{|x|}\ . \tag{0.8}$$

Das direkte Problem besteht darin, für vorgegebenes n die Laufzeit

$$T(x_0, x_1) = \int_{\Gamma_n(x_0, x_1)} n \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (dx_i)^2}$$

für jedes Paar x_0, $x_1 \in \partial\Omega$ zu berechnen. Das inverse Problem verlangt die Berechnung von n aus der Funktion $T(x_0, x_1)$.

Die Aufgaben des Mathematikers sind die folgenden:

1) Man beweise, daß das inverse Problem eindeutig lösbar ist.

2) Man untersuche, wie die Lösung von den Daten abhängt (Stabilität).

3) Man entwickle numerische Verfahren.

Die Geschichte der inversen Probleme beginnt mit der Lösung des inversen kinematischen Problems für die Erde durch Herglotz und Wiechert in den Jahren 1905-07. Der Aufbau der mathematischen Theorie beginnt mit der Arbeit von Borg zum inversen Sturm-Liouville-Problem 1946. Ab 1950 bemühten sich vor allem russische Mathematiker (I.M. Gelfand, B.M. Levitan, V.A. Marchenko) um eine Lösung des quantenmechanischen inversen

Streuproblems. Etwa ab 1970 setzten weltweit intensive Bemühungen zum mathematischen Verständnis, aber auch zur numerischen Lösung inverser Probleme ein. Treibende Kraft waren dabei die Anforderungen aus der Praxis, insbesondere aus Medizin, Materialprüfung, Seismologie, Fernerkundung, Exploration.

Kapitel 2

Die Gelfand-Levitan-Theorie

2.1 Hyperbolische Differentialgleichungen in einer räumlichen Variablen

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u \qquad , \quad x \in \mathbb{R}^1 \, , \quad t \geq 0 \, , \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = f(x) \, , \quad u_t(x,0) = g(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^1 \, . \tag{1.2}$$

Dabei seien q, f, g zunächst Funktionen aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$.

Satz 2.1.1 *Das Problem (1.1)-(1.2) besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung* $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty)) \cap C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty))$.

Beweis: Jede Lösung der genannten Art kann mit Hilfe der Kirchhoffschen Formel (siehe PDE, Kap. 4.5) in der Form

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} g(y)dy \\ &\quad + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+t-\tau} q(y)u(y,\tau)dyd\tau \end{aligned} \tag{1.3}$$

geschrieben werden. Sei X der Banachraum $C(\mathbb{R}\times[0,t_0])$ mit $t_0>0$ und der Norm des maximalen Betrags, und sei $T : X \to X$ der Operator

$$\begin{aligned}(Tv)(x,t) &= \frac{1}{2}(f(x+t)+f(x-t)) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} g(y)dy \\ &\quad + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+t-\tau} q(y)v(y,\tau)dyd\tau \ .\end{aligned}$$

Für $u,\ v \in X$ gilt dann

$$|(Tv-Tu)(x,t)| \leq \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+t-\tau} |q(y)||v(y,\tau)-u(y,\tau)|dyd\tau \ ,$$

also

$$||Tv-Tu|| \leq Q||v-u|| \ , \quad Q = \frac{1}{2}\, t_0^2 \max_{\mathrm{R}^1} |q(x)| \ .$$

Ist t_0 so klein, daß $Q<1$ gilt, so ist T also kontrahierend. $u = Tu$ besitzt dann eine eindeutig bestimmte Lösung in X. Dieses u löst dann (1.3) und ist die Lösung der behaupteten Art zunächst in dem Streifen $0<t<t_0$. Entsprechend schließt man in den anschließenden Streifen.

□

Wir interessieren uns für Anfangswerte, welche einen Impuls darstellen, also z.B. $f=0$ und $g=\delta$ mit der Dirac-Funktion δ. Dies ist eine Funktion mit den Eigenschaften $\delta(x)\geq 0$, $\delta(x)=0$ für $x\neq 0$, und

$$\int\limits_{\mathrm{R}^1} \delta(x)dx = 1 \ .$$

Dies widerspricht natürlich dem üblichen Begriff der Funktion. Man kann δ aber im Rahmen der Theorie der Distribution befriedigend definieren. Wir wollen diese Theorie weitgehend vermeiden und definieren δ durch einen Grenzprozeß. Sei $\delta_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\delta_1(x)\geq 0$, $\delta_1(x)=0$ für $x\notin[-1,+1]$ und

$$\int\limits_{\mathrm{R}^1} \delta_1(x)dx = 1 \ .$$

Für $n = 1, 2, \ldots$ setzen wir $\delta_n(x) = n\delta(nx)$. Dann ist $\delta_n(x) \geq 0$, $\delta_n(x) = 0$ für $x \notin [-1/n, 1/n]$, und

$$\int_{\mathrm{R}^1} \delta_n(x) dx = 1 \ .$$

Für jede stetige Funktion f gilt nun

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathrm{R}^1} \delta_n(x) f(x) dx = f(0) \ .$$

Hierfür schreiben wir

$$\int_{\mathrm{R}^1} \delta(x) f(x) dx = f(0) \ ,$$

setzen also formal $\delta = \lim_n \delta_n$ und vertauschen Limesbildung und Integration. δ erscheint hier also nicht als Funktion, sondern als lineares Funktional auf dem linearen Raum der stetigen Funktionen.

Nach Satz 1 ist die Lösung u_n von (1.1) mit Anfangswerten $u_n(x, 0) = 0$, $\frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = \delta_n(x)$ eindeutig bestimmt.

Satz 2.1.2 *Für $|x| \neq t$ konvergiert u_n gegen eine Lösung u von (1.1), und zwar gleichmäßig auf jedem Kompaktum. Es ist $u = 0$ für $|x| > t$ und $u(|x|, |x| + 0) = 1/2$ für $x \neq 0$.*

Beweis: Nach (1.3) erfüllt u_n

$$u_n(x,t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \delta_n(y) dy + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(y) u_n(y, \tau) dy d\tau \ . \tag{1.4}$$

Sei nun $K = \{(x,t) : 0 \leq t < |x| - \epsilon,\ t \leq t_0, |x| \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$, $\epsilon > 0$. Für hinreichend großes n ist dann

$$\int_{x-t}^{x+t} \delta_n(y) dy = 0 \quad , \quad (x,t) \in K \ .$$

Sei weiter t_0 so klein, daß Q (siehe Beweis zu Satz 1) < 1. Sei $X = C(K)$. Mit der Norm in X gilt dann $\|u_n\| \leq Q \|u_n\|$, also $u_n = 0$ in K. Wie im Beweis zu Satz 1 muß auch diese Argumentation für die "Streifen" mit $t > t_0$ wiederholt werden. In jedem Kompaktum in $t < |x|$ gilt also von einem gewissen n an $u_n = 0$. Also haben wir $u_n \to 0$ in $t < |x|$ mit gleichmäßiger Konvergenz auf kompakten Teilmengen.

Setzen wir hingegen $K = \{(x,t) : t_0 \geq t > |x| + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, so gilt für hinreichend großes n

$$\int\limits_{x-t}^{x+t} \delta_n(y)dy = 1 \ , \qquad (x,t) \in K \ .$$

Damit ist für hinreichend große n in K

$$u_n(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+t-\tau} q(y) u_n(y,\tau) dy d\tau \ . \tag{1.5}$$

Sei nun wieder t_0 so klein, daß $Q < 1$. Dann folgt aus (1.4), daß die Folge u_n in $X = C(\mathbb{R}^1 \times [0,t_0])$ beschränkt ist. Nach Arzela-Ascoli enthält der Integralterm in (1.5) eine in K konvergente Teilfolge. Wie üblich schließt man, daß die gesamte Folge in K gleichmäßig konvergieren muß. Die Grenzfunktion u erfüllt in K natürlich ebenfalls (1.5). Also ist u Lösung von (1.1). Die Beziehung $u(|x|, |x|+0) = \frac{1}{2}$ ergibt sich aus $u = 0$ für $|x| > t$.

$\square$

Definition: Die Funktion u aus Satz 2 nennen wir die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u \ , \quad x \in \mathbb{R}^1 \ , \qquad t > 0 \\ &u(x,0) = 0 \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \delta(x) \ , \quad x \in \mathbb{R}^1 \ . \end{aligned} \tag{1.6}$$

Mit Satz 2 ist das direkte Problem (1.6) erledigt: Zu vorgegebenem q gibt es eine wohlbestimmte Lösung u von (1.6).

Die Lösung aus Satz 2 ist in $t > |x|$ nichts anderes als die Lösung der charakteristischen Anfangswertaufgabe, vgl. *PDE*, Kap. 4.6, mit den Anfangswerten $u = 1/2$ auf den Charakteristiken $t = |x|$. u läßt sich auch als schwache

Lösung von (1.1) in $t > 0$ auffassen. Damit meint man folgendes. Sei L ein linearer Differentialoperator in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, z.B.

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \; .$$

Sei L^* der zu L adjungierte Operator, also

$$L^* u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij} u) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i u) + cu \; .$$

Dann ist für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} \varphi L u dx = \int\limits_{\Omega} (L^* \varphi) u dx \; ,$$

vgl. PDE Kap. 4.6. Ist also $u \in C^2(\Omega)$ eine Lösung von $Lu = f$ in Ω, so gilt

$$\int\limits_{\Omega} (L^* \varphi) u dx = \int\limits_{\Omega} \varphi f dx \; , \qquad \forall \;\; \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \; . \tag{1.7}$$

Diese Beziehung macht Sinn für $u \in L_{loc}(\Omega)$, die Menge der in Ω lokal integrierbaren Funktionen. Wir nennen daher ein $u \in L_{loc}(\Omega)$ mit (1.7) schwache Lösung von $Lu = f$.

Satz 2.1.3 *Die Lösung u aus Satz 2 ist schwache Lösung von (1.1) in $t > 0$.*

Beweis: Sei $a_{ij} = a_{ji}$ in Ω konstant und

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + c(x) u \; .$$

Dann ist

$$\int\limits_{\Omega} (Lu \cdot \varphi - u L\varphi) dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi - u \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) d\sigma$$

mit der (verallgemeinerten) Normalen $\nu_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} n_j$, wo n die äußere Normale auf $\partial\Omega$ ist. Wir wenden dies an auf $Lu = u_{tt} - u_{xx} - q(x)u$ und $\Omega = \{(x,t) : t > |x|\}$. ($x_1 = x$, $x_2 = t$). Es ist auf $\partial\Omega = \{(x,t) : t = |x|\}$

$$\nu = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(x) \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Ist u die Lösung aus Satz 2, so ist $Lu = 0$ in Ω und $u = 1/2$ auf $\partial\Omega$; außerhalb $\overline{\Omega}$ ist $u = 0$. Also ist für $\varphi \in C_0^\infty(t > 0)$

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} uL\varphi dxdt = \int_\Omega uL\varphi dxdt = \int_\Omega Lu \cdot \varphi dx \\
-\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} ((\operatorname{sgn}(x)u_x + u_t)\varphi - u(\operatorname{sgn}(x)\varphi_x + \varphi_t))(x, |x|) dx \\
= -\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \cdot \varphi - u \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right) d\sigma ,
\end{aligned}$$

wo τ einen Tangenteneinheitsvektor auf $\partial\Omega$ bedeutet. Wegen $Lu = 0$ in Ω verschwindet das Integral über Ω. Wegen $u = 1/2$ auf $\partial\Omega$ und $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ verschwindet auch das Integral über $\partial\Omega$. u ist also in der Tat schwache Lösung von $Lu = 0$ in $t > 0$.

$\square$

2.2 Das inverse Problem einer hyperbolischen Gleichung in einer räumlichen Variablen

Das inverse Problem zu (1.6) lautet nun: Gegeben sei $g(t) = u(0,t)$, $t \geq 0$. Man bestimme q.

In den Anwendungen wird das inverse Problem gewöhnlich für den Viertelraum $0 < x < \infty$, $0 < t < \infty$ formuliert:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx} + q(x)u \quad , \quad x,t > 0 \\
&u_x(0,t) = 0 \ , \quad t > 0 \ , \\
&u(x,0) = 0 \ , \quad u_t(x,0) = \delta(x) \ , \quad x > 0 \ .
\end{aligned}
$$

Man bestimme q aus $g(t) = u(0,t)$, $t > 0$. Wir führen dieses Problem auf unseres zurück, indem wir q gerade auf $\mathbb{R}^1$ fortsetzen.

Satz 2.2.1 *(Nichtlineare Gelfand-Levitan-Gleichung): Sei*

$$G(s,t) = \frac{1}{2} \int_0^s (g(t+s') + g(t-s'))ds' \ .$$

Dabei sei g als ungerade Funktion auf $\mathbb{R}^1$ fortgesetzt. Dann gilt

$$\int_{-s}^{s} u(x,s)u(x,t)dx = G(s,t) \ .$$

Wegen $u(x,t) = 0$ für $x > t$ genügt es im Falle $t \leq s$ bereits, von $-t$ bis t zu integrieren.

Beweis: Wir setzen $Lu = u_{xx} + q(x)u$. Für φ_0, $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ können wir die Lösung von

$$u_{tt} = Lu \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \quad , \quad u(x,0) = \varphi_0 \ , \quad u_t(x,0) = \varphi_1 \quad \text{in } \mathbb{R}^1$$

für $-\infty < t < \infty$ in der Form

$$u(t) = E_0(t)\varphi_0 + E_1(t)\varphi_1$$

schreiben. Dabei ist E_0 gerade und E_1 ungerade in t. Sei für φ, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$

$$w(s,t) = (E_0(s)\psi, E_0(t)\varphi)$$

mit dem inneren Produkt von $L_2(\mathbb{R}^1)$, und sei $v(s) = E_0(s)\psi$, $u(t) = E_0(t)\varphi$. Dann ist

$$\begin{aligned}
w_{ss}(s,t) &= \int\limits_{\mathrm{R}^1} v_{ss}(x,s)u(x,t)dx \\
&= \int\limits_{\mathrm{R}^1} (Lv)(x,s)u(x,t)dx \\
&= \int\limits_{\mathrm{R}^1} v(x,s)(Lu)(x,t)dx \\
&= \int\limits_{\mathrm{R}^1} v(x,s)u_{tt}(x,t)dx \\
&= w_{tt}(s,t) \ .
\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$w_t(s,0) = \left(E_0(s)\psi \ , \ \frac{d}{dt}E_0(t)\varphi|_{t=0})\right) = 0 \ .$$

Nach der Kirchhoffschen Formel gilt also

$$w(s,t) = \frac{1}{2}(w(s-t,0) + w(s+t,0)) \ .$$

Da E_0 gerade ist, ist auch $w(s,0)$ gerade, nach der letzten Formel also $w(s,t) = w(t,s)$. Für $s = 0$ ergibt dies

$$(\psi, E_0(t)\varphi) = (E_0(t)\psi, \varphi) \ .$$

E_0 ist also ein symmetrischer Operator, und das gleiche gilt für E_1.

Wir zeigen weiter, daß $\frac{d}{dt}E_1(t)\varphi = E_0(t)\varphi$ für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, wofür wir kurz $E_1' = E_0$ schreiben. Dazu setzen wir $u = E_1(t)\varphi$ und $v = u_t$. Dann ist

$$v_{tt} = v_{xx} + q(x)v \ ,$$

$$\begin{aligned} v(x,0) &= u_t(x,0) &= \varphi(x)\ , \\ v_t(x,0) &= u_{tt}(x,0) &= u_{xx}(x,0) + q(x)u(x,0) = 0\ , \end{aligned}$$

weil $u = 0$ für $t = 0$. Diese drei Beziehungen sagen aber gerade $v = E_0\varphi$.

Als weitere Eigenschaft der E_i haben wir die Halbgruppeneigenschaft

$$u(t+s) = E_0(s)u(t) + E_1(s)u_t(t)$$

für jede Lösung u von $u_{tt} = Lu$. Dies ergibt sich einfach aus der Zeitinvarianz der Differentialgleichung.

Seien nun φ, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ und $u(t) = E_1(t)\varphi$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\psi, u(t+s)) &= (\psi, E_0(s)u(t) + E_1(s)u_t(t)) \\ &= (E_0(s)\psi, u(t)) + (E_1(s)\psi, u_t(t)) \\ &= (E_0(s)\psi, E_1(t)\varphi) + (E_1(s)\psi, E_1'(t)\varphi)\ . \end{aligned}$$

Weil E_0 gerade und E_1 ungerade ist, folgt

$$(\psi, u(t-s)) = (E_0(s)\psi, E_1(t)\varphi) - (E_1(s)\psi, E_1'(t)\varphi)$$

Addition der letzten beiden Beziehungen ergibt

$$\frac{1}{2}((\psi, u(t+s)) + (\psi, u(t-s))) = (E_0(s)\psi, E_1(t)\varphi)\ ,$$

also, wegen $E_1(s) = \int_0^s E_0(s')ds'$,

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^s((\psi, u(t+s')) + (\psi, u(t-s'))ds' = (E_1(s)\psi, E_1(t)\varphi)\ .$$

Mit $\varphi = \delta_n$, $\psi = \delta_m$ und $u_n = E_1\delta_n$ lautet dies

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^s\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta_m(x)(u_n(x,t+s') + u_n(x,t-s'))dxds' = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_m(x,s)u_n(x,t)dx\ .$$

Lassen wir hier erst $n \to \infty$, dann $m \to \infty$ streben, so erhalten wir

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^s(u(0,t+s') + u(0,t-s'))ds' = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(x,s)u(x,t)dx$$

mit der Lösung u von (1.6). Wegen $u(x,t) = 0$ für $|x| > t$ ist dies die behauptete Gleichung.

$\square$

Satz 2.2.2 *(Lineare Gelfand-Levitan-Gleichung): Es gibt eine in $|t| \leq x$ stetig differenzierbare Funktion $w(x,t)$ mit $q(x) = 4\frac{d}{dx}w(x,x)$ und*

$$\int_{-x}^{x} g(t-s)w(x,s)ds = \frac{1}{2}(g(t-x) + g(t+x)) \, , \qquad |t| < x \, .$$

Dabei ist wie üblich g als ungerade Funktion auf $\mathbb{R}^1$ fortgesetzt.

Beweis: Wir nehmen δ_n gerade an und setzen

$$g_n(t) = \int_{\mathbb{R}^1} \delta_n(t-s)g(s)ds \, .$$

Weiter definieren wir

$$u_n(x,t) = \int_{\mathbb{R}^1} \delta_n(t-s)u(x,s)ds \, .$$

Dabei ist u wie üblich als ungerade Funktion auf $-\infty < t < \infty$ fortgesetzt. Die Funktion u_n erfüllt die Differentialgleichung und die Anfangs- und Randbedingungen

$$u_n(x,0) = \int_{\mathbb{R}^1} \delta_n(-s)u(x,s)ds = 0 \tag{2.1}$$

$$u_n(0,t) = \int_{\mathbb{R}^1} \delta_n(t-s)g(s)ds = g_n(t) \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}(0,t) = 0 \, . \tag{2.3}$$

Wir zeigen nun: Es gibt eine Funktion v_n, so daß

$$u_n(x,t) = \int_{\mathbb{R}^1} g(t-s)v_n(x,s)ds \, . \tag{2.4}$$

Wir definieren v_n als Lösung von

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + q(x) v_n \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

$$v_n(0,t) = \delta_n(t) \; , \quad \frac{\partial v_n}{\partial x}(0,t) = 0 \; , \quad t \in \mathbb{R}^1 \; .$$

v_n ist also die (als gerade Funktion in x fortgesetzte) Lösung der Cauchyschen Anfangswertaufgabe, wobei als Anfangsmannigfaltigkeit jetzt die t-Achse auftritt. Bei dieser Wahl von v_n erfüllt offenbar u_n die Bedingungen (2.1) - (2.3), welche u_n als Lösung der Differentialgleichung eindeutig festlegen.

Ein Blick auf die Charakteristiken zeigt, daß

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= 0 \; , \quad |t| < |x| - \frac{1}{n} \; , \\ v_n(x,t) &= 0 \; , \quad |t| > |x| + \frac{1}{n} \; . \end{aligned}$$

Also folgt aus (2.4) für $x > 0$

$$\int_{-x-1/n}^{x+1/n} g(t-s) v_n(x,s) ds = 0 \; , \quad |t| < x - 1/n \; .$$

Für v_n ergibt sich aus der Kirchhoffschen Formel

$$\begin{aligned} v_n(x,t) &= \frac{1}{2}(\delta_n(t+x) + \delta_n(t-x)) - w_n(x,t) \\ w_n(x,t) &= +\frac{1}{2} \iint\limits_{\Delta(x,t)} q(x') v_n(x',t') dx' dt' \; , \end{aligned}$$

wobei nun $\Delta(x,t)$ das Dreieck ist, das von den Charakteristiken durch (x,t) und der t-Achse gebildet wird. Damit bekommen wir schließlich

$$\int_{-x-1/n}^{x+1/n} g(t-s) w_n(x,s) ds = \frac{1}{2} \int_{-x-1/n}^{x+1/n} g(t-s)(\delta_n(s+x) + \delta_n(s-x)) ds \; , \quad |t| < -1/n \; .$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich daraus die behauptete Integralgleichung. Für die rechte Seite ist dies klar. Für die linke schreiben wir w_n in der Form

$$\begin{aligned} w_n(x,t) &= r_n(x,t) - \frac{1}{2} \iint\limits_{\Delta(x,t)} q(x') w_n(x',t') dx' dt' \ , \\ r_n(x,t) &= \frac{1}{4} \iint\limits_{\Delta(x,t)} q(x')(\delta_n(t'+x') + \delta_n(t'-x')) dx' dt' \ . \end{aligned}$$

Die δ_n-Funktionen verschwinden außerhalb von Streifen der Breite $2/n$ um die Charakteristiken. Diese treffen den Rand von $\Delta(x,t)$ für $|t| \leq x$ bei $(x+t)/2$ bzw. $(x-t)/2$. Also gilt

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x,t) = \frac{1}{4} \left(\int\limits_0^{(x-t)/2} q(x') dx' + \int\limits_0^{(x+t)/2} q(x') dx' \right) = r(x,t)$$

gleichmäßig in $|t| \leq x$. Es folgt, daß w_n für $|t| \neq x$ gegen eine Funktion w konvergiert, und zwar gleichmäßig auf kompakten Teilmengen. Diese Funktion erfüllt

$$w(x,t) = r(x,t) - \frac{1}{2} \iint\limits_{\Delta(x,t)} q(x') w(x',t') dx' dt' \ .$$

Wegen $w(x,t) = 0$ für $|t| > x$ folgt $w(x,x) = r(x,x)$, also $\frac{d}{dx} w(x,x) = 4q(x)$.

$\square$

Die Integralgleichung aus Satz 2 ist von erster Art. Man kann eine Gleichung zweiter Art erhalten, indem man nach t differenziert und dabei beachtet, daß $g(+0) = \frac{1}{2}$, $g(-0) = -\frac{1}{2}$ ist. Bezeichnen wir mit g' die gerade Fortsetzung von g' auf $\mathbb{R}^1$, so entsteht

$$w(x,x) + \int\limits_{-x}^{x} g'(t-s) w(x,s) ds = \frac{1}{2}(g'(t-x) + g'(t+x)) \ , \quad |t| \leq x \ .$$

2.3 Ein Beispiel aus der Reflektions - Seismologie

Sei t die Zeit und z die Tiefe in der Erde, die wir uns als isotropes elastisches Medium mit Dichte $\rho(z)$ und Lame'-Parameter $\lambda(z)$, $\mu(z)$ vorstellen. Sei $w(z,t)$ die z-Komponente der Teilchengeschwindigkeit und $p(z,t)$ der Druck. Dann gilt

$$\rho w_t + p_z = 0 \quad , \quad p_t + (\lambda + 2\mu) w_z = 0 \ . \tag{3.1}$$

Wir nehmen λ, μ und ρ als stetig differenzierbar an.

Wir wollen das System (3.1) in eine Gleichung zweiter Ordnung verwandeln. Dazu differenzieren wir die zweite Gleichung nach t, die erste nach z und eliminieren w_{tz}. Es entsteht

$$p_{tt} = c^2 \left(p_{zz} - \frac{\rho_z}{\rho} p_z \right) \quad , \qquad c = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2} \ .$$

c ist also die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen in der Erde. Wir wollen diese auf 1 normieren und führen dazu die neue unabhängige Tiefen-Variable

$$x = \int_0^z \frac{dz'}{c(z')} \ , \quad \text{also} \qquad p_z = \frac{1}{c} p_x \ , \quad p_{zz} = -\frac{c_z}{c^2} p_x + \frac{1}{c^2} p_{xx}$$

ein. Es entsteht

$$p_{tt} = p_{xx} - \left(c_z + \frac{\rho_z}{\rho} c \right) p_x \ .$$

Um hier eine rechte Seite der Form $u_{xx} + qu$ zu erhalten, setzen wir $p = Au$. Es entsteht

$$u_{tt} = u_{xx} + \left(2\frac{A_x}{A} - c_z - \frac{\rho_z}{\rho} c \right) u_x + \left(\frac{A_{xx}}{A} - \left(c_z + \frac{\rho_z}{\rho} c \right) \frac{A_x}{A} \right) u \ .$$

Wir wählen nun A so, daß der Koeffizient von u_x verschwindet, also

$$\frac{A_x}{A} = \frac{1}{2} \left(c_z + \frac{\rho_z}{\rho} c \right)$$

oder

$$\frac{A_z}{A} = \frac{1}{2}\left(\frac{c_z}{c} + \frac{\rho_z}{\rho}\right)$$

also

$$A = (\rho c)^{1/2} .$$

Dann lautet die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + qu , \\ q &= \frac{A_{xx}}{A} - \left(c_z + \frac{\rho_z}{\rho} c\right)\frac{A_x}{A} = \left(\frac{A_x}{A}\right)_x - 2c\left(\frac{A_x}{A}\right)^2 . \end{aligned}$$

Aus q kann man also höchstens die Funktion A bestimmen, nicht ρ, λ, μ separat.

Wir nehmen nun an, daß man für den Impuls

$$u(x,0) = 0 , \qquad u_t(x,0) = \delta(x)$$

die Funktion $g(t) = u(0,t)$ messen kann. Dann ist q nach den Methoden von §2 zu bestimmen.

2.4 Näherungslösung für kleine q

Ist q klein, so kann man leicht eine Näherungslösung für das inverse Problem angeben. Die Integralgleichung für u können wir mit Hilfe der Heaviside-Funktion

$$H(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t > 0 \, , \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

als

$$u(x,t) = \frac{1}{2} H(t - |x|) + \frac{1}{2} \int\!\!\int_{D(x,t)} q(x') u(x', t') dx' dt' \tag{4.1}$$

schreiben. Es folgt

$$u(x,t) = \frac{1}{2} H(t - |x|) + \mathrm{O}(q) \, .$$

Dies setzen wir nun auf der rechten Seite von (4.1) ein. Es folgt

$$u(x,t) = \frac{1}{2} H(t - |x|) + \frac{1}{2} \int\!\!\int_{D(x,t)} q(x') H(t' - |x'|) dx' dt' + \mathrm{O}(q^2) \, .$$

Für $x = 0$ bekommen wir also bis auf $\mathrm{O}(q^2)$

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \int_{-t}^{t} q(x') \int_{0}^{t-|x'|} H(t' - |x'|) dt' dx' \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \int_{-t/2}^{t/2} q(x') (t - 2|x'|) dx' \, . \end{aligned}$$

Durch Differenzieren bekommt man näherungsweise

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{4} \int_{-t/2}^{t/2} q(x') dx' \, , \\ g''(t) &= \frac{1}{8} \left(q(\frac{t}{2}) + q(-\frac{t}{2}) \right) = \frac{1}{4} q(\frac{t}{2}) \, , \end{aligned}$$

falls q gerade ist.

Für kleine q bekommt man q also aus g durch zweimalige Differentiation. Differentiation ist ein instabiler Prozeß. Zum ersten Mal sehen wir an dieser Stelle, daß die Lösung inverser Probleme zu Instabilitäten neigt.

2.5 Diskrete inverse Evolutionsprobleme

Sei T Tridiagonalmatrix

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & & \\ c_0 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & & & b_{n-1} \\ & & & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \quad , \qquad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$$

und seien $u^\ell \in \mathbb{R}^{n+1}$ eine Lösung von

$$u^{\ell+1} = Tu^\ell \ . \tag{5.1}$$

Wir stellen das inverse Problem: Gegeben u^0 und $g^\ell = u_0^\ell$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$. Man bestimme T!

Wir werden in diesem Abschnitt verschiedene Aufgaben dieser Art mit Hilfe eines diskreten Analogons der nichtlinearen Gelfand-Levitan-Gleichung lösen.

1. Fokussierter Anfangszustand $u^0 = e^0 = (1, 0, \ldots, 0)^t$.

Wir führen die Vektoren

$$v^{\ell+1} = T^t v^\ell \ , \quad \ell = 0, 1, \ldots \quad , \quad v^0 = e^0 \tag{5.2}$$

ein und haben dann

$$\begin{aligned} g^{\ell+k} &= e^{0t} u^{\ell+k} = e^{0t} T^{\ell+k} e^0 = \left(T^{\ell t} e^0\right)^t (T^k e^0) \\ &= v^{\ell t} u^k \ . \end{aligned}$$

Mit den $(n+1, n+1)$-Matrizen

$$G = \begin{pmatrix} g^0 & g^1 & \ldots & g^n \\ \vdots & & & \\ g^n & g^{n+1} & \ldots & g^{2n} \end{pmatrix} \ , \quad U = (u^0, \ldots, u^n) \ , \quad V = (v^0, \ldots, v^n)$$

lautet dies

$$G = V^t U \ . \tag{5.3}$$

U, V sind obere Dreiecksmatrizen, weil T tridiagonal ist.

Wir betrachten nun verschiedene Spezialfälle, je nachdem welche Information über T vorhanden ist.

(a) $c_i = b_i > 0$, $i = 0, \dots, n-1$, d.h. T ist symmetrisch. Dann ist $U = V$, und die Diagonale ist positiv. Also ist U durch (5.2) eindeutig bestimmt und durch eine Cholesky-Zerlegung berechenbar.

Ist U bestimmt, so berechnen wir T aus Gleichung ℓ, $\ell+1$ von (5.1):

$$\left.\begin{array}{rcl} u_\ell^{\ell+1} &=& c_{\ell-1}u_{\ell-1}^\ell + a_\ell u_\ell^\ell \\ u_{\ell+1}^{\ell+1} &=& c_\ell u_\ell^\ell \end{array}\right. \quad , \quad \ell = 0, \dots, n-1 \; , \tag{5.4}$$

wo $c_{-1} = u_{-1}^\ell = 0$ gesetzt wurde. Da $u_\ell^\ell \neq 0$ ist, sind dadurch $c_\ell = b_\ell$ und a_ℓ für $\ell = 0, \dots, n-1$ bestimmt. T ist also bestimmt bis auf das (n,n)-Element a_n.

(b) c_i, $i = 0, \dots, n-1$ bekannt, c_i, $b_i \neq 0$. U und V sind nach wie vor rechte Dreiecksmatrizen, und die Diagonale $(1, c_0, c_0c_1, \dots, c_0 \cdots c_{n-1})$ von U ist bekannt und enthält keine Null. (5.3) ist jetzt eine LR-Zerlegung von G. Diese ist eindeutig bestimmt, weil die Diagonale von U bekannt ist und keine Nullen enthält. Ist V bestimmt, so berechnen wir T aus den Zeilen ℓ und $\ell+1$ von (5.2), also

$$\left.\begin{array}{rcl} v_\ell^{\ell+1} &=& b_{\ell-1}v_{\ell-1}^\ell + a_\ell v_\ell^\ell \\ v_{\ell+1}^{\ell+1} &=& b_\ell v_\ell^\ell \; . \end{array}\right. \quad , \quad \ell = 0, \dots, n-1 \tag{5.5}$$

Wegen $b_\ell \neq 0$ sind alle $v_\ell^\ell = b_0 \cdots b_{\ell-1} \neq 0$, also sind $b_0, \dots, b_{n-1}$ durch die zweite Gleichung eindeutig bestimmt. Danach bestimmt man die a_ℓ bis auf a_n aus der ersten Gleichung.

(c) c_i, $b_i \neq 0$, $i = 0, \dots, n-1$. Jetzt sind die Diagonalen von U und V nach wie vor frei von Nullen, sind aber beide unbekannt. Sei D die Diagonale von V. (5.3) lautet

$$G = (D^{-1}V)^t DU \; .$$

DV^t ist eine linke Dreiecksmatrix mit Diagonale 1. Also ist die rechte Dreiecksmatrix $W = DU$ eindeutig als rechter Faktor einer LR-Zerlegung von G bestimmt. Sei $W = (w^0, \dots, w^n)$. Dann lautet (5.1)

$$w^{\ell+1} = DTD^{-1}w^\ell \quad , \quad \ell = 0, \dots, n-1 \; . \tag{5.6}$$

Da die w^ℓ bekannt und die Außerdiagonalelemente der Tridiagonalmatrix DTD^{-1} ungleich 0 sind, kann man hieraus DTD^{-1} wie oben bis auf das (n,n)-Element berechnen. Damit sind $a_0, \ldots, a_{n-1}$ bestimmt. Über b_i, c_i kann man nichts sagen.

2. Nicht-fokussierter Anfangszustand

Sei $u^0 = e$ und e ein Vektor mit von Null verschiedenen Komponenten. (5.3) gilt nach wie vor, aber U ist keine rechte Dreiecksmatrix mehr. Also machen wir eine LR-Zerlegung von U, $U = LR$ (falls es diese gibt). L wählen wir so, daß die Diagonale gerade die von V^{-1} ist (möglich, falls die $b_j \neq 0$). Dann ist

$$G = (V^t L)R$$

ein LR-Zerlegung von G, deren linker Faktor die Diagonale 1 hat. R ist dadurch eindeutig festgelegt und durch eine LR-Zerlegung von G zu berechnen. Aus (5.1) folgt für die Spalten r^ℓ von R

$$r^{\ell+1} = Sr^\ell \quad , \qquad S = L^{-1}TL \; .$$

Aus der ersten Beziehung folgt, daß S eine rechte Hessenberg-Matrix ist (d.h. $s_{\ell j} = 0$, $\ell > j+1$), aus der zweiten, daß S auch eine linke Hessenberg-Matrix ist (d.h. $s_{\ell j} = 0$, $j > \ell + 1$). Damit ist S wie T eine Tridiagonalmatrix. Wie oben sieht man, daß S durch R bis auf das (n,n)-Element bestimmt ist.

Wir nehmen nun an, die Außerdiagonalelemente b_i, c_i, $i = 0, \ldots, n-1$ seien bekannt, ebenso der Vektor e. Seien ℓ_j die Zeilen von L. Wegen $e = Lr^0$ sind dann die Elemente in der Position 0 der ℓ_j bekannt. Insbesondere ist ℓ_0 bekannt. $LS = TL$ lautet durch die ℓ_j ausgedrückt ($\ell_{-1} = \ell_{n+1} = 0$)

$$\ell_j S = c_{j-1}\ell_{j-1} + a_j \ell_j + b_j \ell_{j+1} \; , \qquad j = 0, \ldots, n \; . \tag{5.7}$$

Hieraus lassen sich die a_j rekursiv bestimmen: Für $j = 0$ ist

$$\ell_0 S = a_0 \ell_0 + b_0 \ell_1 \; .$$

ℓ_0 ist bekannt, also (für $n > 0$) auch $\ell_0 S$. Die Komponente 1 von ℓ_1 kann also bestimmt werden. a_0 ergibt sich dann aus der Komponente 0 dieser Gleichung. Somit sind a_0, ℓ_0, ℓ_1 bekannt. Nehmen wir an, es seien bereits $a_0, \ldots, a_{j-1}$, $\ell_0, \ldots, , \ell_j$ für ein $j < n$ bekannt. Dann bestimmen wir aus (5.7) zunächst einmal die Komponente $j+1$ von ℓ_{j+1}. Dies ist möglich, weil $\ell_j S$ (trotz des fehlenden (n,n)-Elements von S) berechnet werden kann und b_j bekannt und $\neq 0$ ist. Dann bestimmen wir aus der Komponenten 0 dieser Gleichung a_j. Dies ist möglich, weil die c_j bekannt und die Komponente 0 der ℓ_{j0} bekannt und $\neq 0$ sind. Damit sind $a_0, \ldots, a_j, \ell_0, \ldots, \ell_{j+1}$ bekannt. Also lassen sich $a_0, \ldots, a_{n-1}$ bestimmen.

Wenden wir uns nun Evolutionsgleichungen zweiter Ordnung zu. Im Hinblick auf die Anwendungen beschränken wir uns auf Gleichungen der Form

$$u^{\ell+1} + u^{\ell-1} = Tu^{\ell} \quad , \qquad \ell = 0, 1, \ldots \quad . \tag{5.8}$$

Dabei seien nun die Anfangszustände u^0, $u^{-1} = 0$ gegeben. Wie oben wollen wir T aus den Zahlen

$$g^{\ell} = u_0^{\ell} \quad , \quad \ell = 0, 1, \ldots$$

bestimmen.

Lemma 2.5.1 *Seien die $(n+1, n+1)$-Matrizen T_ℓ bestimmt durch die Rekursion*

$$\begin{aligned} T_{\ell+1} + T_{\ell-1} &= TT_\ell \quad , \quad \ell = 0, 1, \ldots \\ T_0 = I \quad &, \qquad T_{-1} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{5.9}$$

Dann gilt für die Vektoren aus (5.8)

$$u^{\ell+k} = T_k u^{\ell} - T_{k-1} u^{\ell-1} \; , \qquad k, \ell = 0, 1, \ldots \quad .$$

Insbesondere ist also $u^k = T_k u^0$.

Beweis: Wir führen den Beweis durch Induktion nach k. Für $k = 0, 1$ ist die Behauptung richtig. Sei die Behauptung richtig bis zu einem $k \geq 1$. Dann ist nach (5.8)

$$u^{\ell+k+1} + u^{\ell+k-1} = Tu^{\ell+k}$$

und nach Induktionsannahme

$$u^{\ell+k+1} + (T_{k-1}u^{\ell} - T_{k-2}u^{\ell-1}) = T(T_k u^{\ell} - T_{k-1}u^{\ell-1})$$

oder

$$u^{\ell+k+1} = (TT_k - T_{k-1})u^{\ell} - (TT_{k-1} - T_{k-2})u^{\ell-1} \; .$$

Wegen (5.9) ist dies die Behauptung für $k+1$.

$\square$

Wir betrachten nun den fokussierten Anfangszustand

$$u^0 = e_0 = (1, 0, \ldots, 0)^t \quad , \qquad u^{-1} = 0 \ .$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned} g^{k+\ell} &= e^{0t} u^{\ell+k} = e^{0t}(T_k u^\ell - T_{k-1} u^{\ell-1}) \\ &= (T_k^t e^0)^t u^\ell - (T_{k-1}^t e^0)^t u^{\ell-1} \\ &= v^{kt} u^\ell - v^{(k-1)t} u^{\ell-1} \ , \end{aligned} \tag{5.10}$$

wo wir

$$v^k = T_k^t e^0$$

gesetzt haben. Die v^k sind Lösung von

$$\begin{aligned} &v^{k+1} + v^{k-1} = T^t v^k \quad , \quad k = 0, 1, \ldots \\ &v^0 = e^0 \ , \quad v^{-1} = 0 \ . \end{aligned}$$

Dies folgt aus dem Lemma mit T^t an Stelle von T. Aus (5.10) folgt durch Addition für $\nu \leq \mathrm{Min}\ (k, \ell)$

$$g^{k+\ell} + g^{k+\ell-2} + \cdots + g^{k+\ell-2\nu} = v^{kt} u^\ell - v^{(k-\nu-1)t} u^{(\ell-\nu-1)} \ .$$

Für $\ell \geq k$ wählen wir $\nu = k$ und erhalten wegen $v^{-1} = 0$

$$g^{k+\ell} + g^{k+\ell-2} + \cdots + g^{\ell-k} = v^{kt} u^\ell \ .$$

Entsprechend erhalten wir für $\ell \leq k$ und $\nu = \ell$ wegen $u^{-1} = 0$

$$g^{k+\ell} + g^{k+\ell-2} + \cdots + g^{k-\ell} = v^{kt} u^\ell \ .$$

Definieren wir also die $(n+1, n+1)$-Matrix $G = (g_{\ell k})$ durch

$$g_{\ell k} = g^{k+\ell} + g^{k+\ell-2} + \cdots + g^{|k-\ell|} \ , \qquad \ell, k = 0, \ldots, n$$

und $U = (u^0, \ldots, u^n)$, $V = (v^0, \ldots, v^n)$, so haben wir

$$G = V^t U \ . \tag{5.11}$$

V, U sind wieder rechte Dreiecksmatrizen. Wir können also wie im Falle von Evolutionsgleichungen 1. Ordnung verfahren.

(a) Seien $b_i = c_i > 0$, $i = 0, \ldots, n-1$. Dann ist $T = T^t$ und damit $U = V$ mit positiver Diagonale. U kann also durch Cholesky-Zerlegung von G bestimmt werden. Die Beziehungen (5.4) gelten nach wie vor und bestimmen die b_i, c_i, a_i mit Ausnahmen von a_n.

(b) c_i, $b_i \neq 0$ und c_i bekannt, $i = 0, \ldots, n-1$. Dann ist die Diagonale von U bekannt und enthält keine Nullen, so daß U, V aus G durch LR-Zerlegung eindeutig berechnet werden können. Es gilt nach wie vor (5.5), woraus die b_i, a_i mit Ausnahme von a_n berechnet werden können.

(c) b_i, $c_i \neq 0$, aber sonst unbekannt, $i = 0, \ldots, n-1$. Wieder argumentiert man wie im Falle der Evolution erster Ordnung. Die Beziehung (5.6) lautet jetzt

$$w^{\ell+1} + w^{\ell-1} = DTD^{-1} w^\ell \ , \qquad \ell = 0, \ldots, n-1 \ ,$$

erfüllt aber den gleichen Zweck und bestimmt DTD^{-1} bis auf das (n,n)-Element. Damit sind die a_i bis auf a_n bestimmt.

Kapitel 3

Näherungen für das inverse Problem der Wellengleichung

Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$, und sei $c = c(x)$ die lokale Schallgeschwindigkeit eines Mediums in Ω. Sei $s \in \partial\Omega$ eine Quelle und $r \in \partial\Omega$ ein *receiver*. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde an der Stelle s ein Impuls mit dem Zeitverlauf $f(t)$ gegeben. An der Stelle r werde die Funktion $g(t)$ gemessen. Zu bestimmen ist c aus den Messungen von $g(t)$ für viele Paare r, s. Eine wichtige Anwendung ist die Seismologie. Hier ist Ω der Halbraum (Erde) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_3 > 0\}$, wo x_3 die Tiefe bedeutet. Die Menge der gemessenen Funktionen g heißt Seismogramm. Für die Wahl von r, s gibt es verschiedene Möglichkeiten:

1. *Zero-offset.* Es ist $r = s$, und beide laufen gemeinsam über die Erdoberfläche $x_3 = 0$. Meistens sind sie auf eine Gerade, z.B. $x_2 = 0$, beschränkt.

2. *Fixed source.* Hier ist s fest, z.B. $(0, 0, 0)$, und r läuft über die Oberfläche oder nur über eine Gerade, z.B. $x_2 = x_3 = 0$.

Wir werden in diesem Kapitel eine Reihe von Näherungslösungen zunehmender Raffinesse kennenlernen. In der Seismologie spricht man von Migration. Am Ende geben wir eine einheitliche Darstellung dieser Techniken durch die Born-Approximation.

3.1 Klassische Migration (Hagedorn 1954)

Die hierzu zu besprechenden Migrationstechniken machen keinen Gebrauch von der Wellengleichung. Sie beruhen auf einfachen Laufzeitüberlegungen und können nur auf sehr einfache Erdmodelle angewendet werden. Betrachten wir etwa ein zweidimensionales Erdmodell, bei dem c oberhalb einer Kurve Γ den konstanten Wert c_0, unterhalb den Wert $c_1 \neq c_0$ hat. Wir stellen uns vor, daß Γ aus Reflektoren unterschiedlicher Stärke aufgebaut ist. Sei $g(x_1, t)$ das *zero-offset* Seismogramm, also die Zeitreihe des Seismometers an dem gemeinsamen Ort x_1 von Quelle und *receiver*. Ist Γ die Gerade $x_3 = z \in \mathbb{R}$, so *peaked* $g(x_1, t)$ für $t = 2z/c_0$, und der Funktionswert im *peak* ist ein Maß für die Stärke des Reflektors. Bei allgemeinen Kurven *peaked* $g(x_1, t)$ entlang einer gewissen, Γ ähnlichen Kurve Γ'.

Aufgabe der Migration ist es, aus Γ' die ursprüngliche Kurve Γ wiederzugewinnen. Wir lösen dieses Problem durch drei Techniken. In jedem Fall konvertieren wir im Seismogramm die Zeitangaben in Tiefenangaben, so daß also die Zeit t der Tiefe $\frac{c_0}{2}t$ entspricht. Ebensogut können wir $c_0 = 2$ annehmen.

1. *Geometrische Migration.* Sei a ein Reflektor in der Erde. Die von ihm erzeugten *peaks* im Seismogramm sind auf der Kurve $R_a = \{(x_1, t) : t = \frac{2}{c_0}\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + a_3^2}\}$ (vgl. Abb. 3.1) zu finden. Dies ist eine Hyperbel, deren Scheitel direkt über a liegt. Γ' ist nun gerade die Einhüllende all dieser Kurven, wenn a Γ durchläuft. Dies sieht man wie folgt ein. Um die Einhüllende der Kurvenschar $R_a : a \in \Gamma$ zu berechnen, stellt man Γ als Kurve $a = a(\lambda)$ mit dem Parameter λ dar. Die Einhüllende bekommt man dann dadurch, daß man die Gleichung von R_a nach λ differenziert, nach λ auflöst und in die Gleichung für R_a einsetzt. Differentiation der Gleichung nach λ bedeutet aber, $|r - a|$ für $a \in \Gamma$ zu minimieren. Für das minimierende a ergibt sich aus der Gleichung für R_a aber gerade ein Punkt auf Γ'!

Um nun Γ aus Γ' zu gewinnen, berechnet man für jeden Punkt von Γ' die berührende Hyperbel R_a und addiert den Funktionswert von g in den Scheitel von R_a. Dies ergibt das migrierte Seismogramm.

2. *Wave front migration.* Für jeden Punkt (x_1, t) im Seismogramm sei $I_{x_1,t}$ die Kurve $\{a = (a_1, a_2) : t = \frac{2}{c_0}\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + a_3^2}\}$ (vgl. Abb. 3.1) der

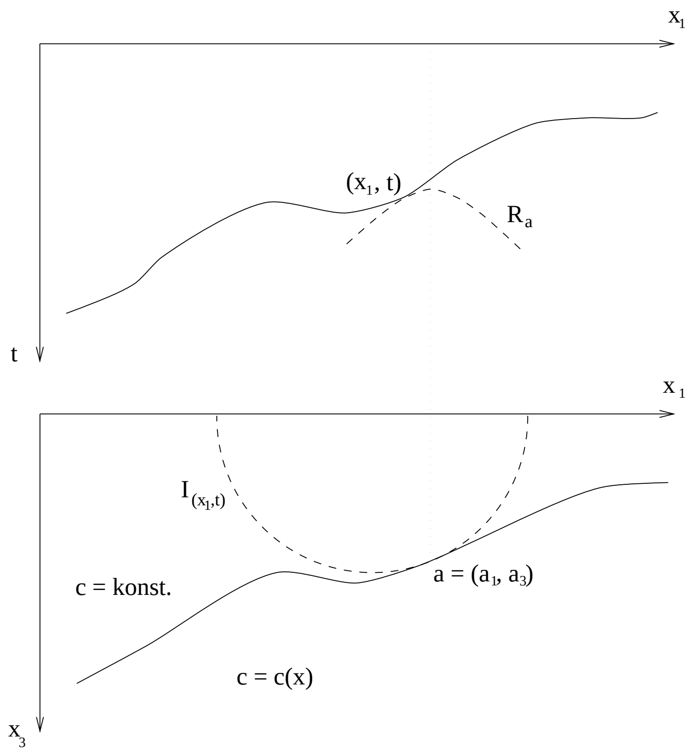


Abbildung 3.1: Darstellung von Seismogramm und Schallgeschwindigkeit im Boden. Die Unstetigkeit von $c(x)$ im Boden zeigt sich als Kurve im Seismogramm.

Reflektoren, die zu einem Signal bei (x_1, t) beitragen können. Man ordnet den Punkten dieser Kurve den Wert $g(x_1, t)$ zu. Um Γ aus Γ' zu gewinnen, mittelt man für jeden Punkt a über alle $I_{x_1,t}$, welche durch a gehen.

3. *Maximal convexity migration.* Für jeden Punkt a in der Erde betrachtet man die Kurve R_a im Seismogramm. Jeder Punkt (x_1, t) dieser Kurve entspricht einem *receiver*, der von einem Reflektor in a ein Signal bekommt. Man mittelt den Wert $g(x_1, t)$ über alle diese Punkt und weist diese Mittel dem migrierten Seismogramm im Punkt a zu.

Das migrierte Seismogramm ist also im letzten Fall

$$\int_{(x_1,t)\in R_a} g(x_1,t) ,$$

im zweiten Fall

$$\int_{a\in I_{(x_1,t)}} g(x_1,t) .$$

Hier wird offenbar über die gleichen Mengen integriert. Die beiden Methoden liefern also das gleiche Resultat.

Die letzten beiden Methoden können weitgehend verallgemeinert werden. Sei $\tau(x,y)$ die Laufzeit eines Signals von x nach y. Sei $d=(r,s,t)$ ein Punkt im Seismogramm und $g(d)$ der zugehörige Funktionswert. Sei

$$\begin{aligned} R_a &= \{d=(r,s,t) : \tau(s,a)+\tau(a,r)=t\} , \\ I_d &= \{a : \tau(s,a)+\tau(a,r)=t\} . \end{aligned}$$

R_a heißt Fläche maximaler Konvexität (*maximal convexity curve, reflection-time surface*), I_d die isochrone Fläche (*maximal convexity surface*). Die migrierten Seismogramme sind dann

$$\int_{d\in R_a} g = \int_{I_d\ni a} g .$$

3.2 Migration durch die Wellengleichung

Wir betrachten wieder den zweidimensionalen Fall ($x_2 = 0$) mit *zero-offset*-Daten, welche von einer reflektierenden Kurve Γ herrühren, oberhalb derer die Schallgeschwindigkeit c konstant ist. Im *exploding reflector model* nimmt man an, die Quellen seien entlang Γ verteilt, und man halbiert alle Laufzeiten. Dann hat man näherungsweise folgendes Modell: Es ist

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \qquad c = c_0 \in \mathbb{R}_+ \tag{2.1}$$

zwischen Erdoberfläche und Γ. An der Erdoberfläche $x_3 = 0$ ist

$$u(x_1, 0, t) = g(x_1, t) \tag{2.2}$$

gegeben, und für $t = 0$ hat man

$$u(x_1, x_3, 0) = \delta_\Gamma(x_1, x_3)\ . \tag{2.3}$$

Dabei ist δ_Γ eine Funktion, deren Träger in etwa mit Γ übereinstimmt. Man versucht nun, δ_Γ (und damit Γ) aus g zu bestimmen. Selbst durch diese groben Vereinfachungen ist noch kein vernünftiges inverses Problem entstanden. Wir werden aber trotzdem so eine Art Lösung angeben. Dazu bemerken wir zunächst, daß für jedes $f \in C^2$ die Funktion

$$u(x_1, x_3, t) = f(\omega t + \xi_1 x_1 + \xi_3 x_3) \tag{2.4}$$

die Wellengleichung erfüllt, wenn nur die Dispersionsrelation

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \xi_1^2 + \xi_3^2 \tag{2.5}$$

erfüllt ist. Diese hat die beiden Lösungen $\omega = \pm c\sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2}$. u ist entlang $\omega t + \xi_1 x_1 + \xi_3 x_3 =$ const. konstant. Man nennt u daher eine ebene Welle und die Ebenen $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 =$ const. ihre Wellenfronten. Haben ω und ξ_3 das gleiche Vorzeichen, so läuft die Welle mit wachsendem t in Richtung fallender x_3-Werte, also nach oben, andernfalls nach unten. Da im *exploding reflector model* die Quellen in der Erde sitzen, sind wir nur an aufsteigenden Wellen interessiert, wählen also

$$\omega = c\xi_3 \sqrt{1 + \xi_1^2/\xi_3^2}\ . \tag{2.6}$$

Spezielle ebene Wellen sind

$$e^{i(\omega t+\xi_1 x_1+\xi_3 x_3)}\ .$$

Linearkombinationen von Lösungen der Wellengleichung sind wieder Lösungen. Also ist auch

$$u(x_1,x_3,t)=\int\int \hat{A}(\xi_1,\xi_3)e^{i(\omega t+\xi_1 x_1+\xi_3 x_3)}d\xi_1 d\xi_3$$

eine Lösung. Wir wollen $\hat{A}$ so bestimmen, daß u die Lösung unseres Problems wird. Dazu muß zunächst einmal die Bedingung an der Oberfläche, also

$$g(x_1,t)=\int\int \hat{A}(\xi_1,\xi_3)e^{i(\omega t+\xi_1 x_1)}d\xi_1 d\xi_3 \tag{2.7}$$

erfüllt sein. Wir werden von jetzt an von der Fourier-Transformation Gebrauch machen (siehe §3). Danach ist

$$\begin{aligned} g(x_1,t) &= \frac{1}{2\pi}\int\int e^{i(\xi_1 x_1+\omega t)}\hat{g}(\xi_1,\omega)d\xi_1 d\omega\ , \\ \hat{g}(\xi_1,\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int\int e^{-i(\xi_1 x_1+\omega t)}g(x_1,t)dx_1 dt\ . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Mit ω aus (2.6) ergibt sich

$$\frac{d\omega}{d\xi_3}=c\frac{|\xi_3|}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_3^2}}=\frac{c}{\sqrt{1+\xi_1^2/\xi_3^2}}$$

und damit aus (2.8) nach der Transformationsformel

$$g(x_1,t)=\frac{c}{2\pi}\int\int e^{i(\xi_1 x_1+\omega t)}\hat{g}(\xi_1,\omega)\frac{d\xi_1 d\xi_3}{\sqrt{1+\xi_1^2/\xi_3^2}}\ . \tag{2.9}$$

Vergleich von (2.7), (2.9) führt zu

$$\hat{A}(\xi_1,\xi_3)=\frac{c}{\sqrt{1+\xi_1^2/\xi_3^2}}\hat{g}\left(\xi_1,c\xi_3\sqrt{1+\xi_1^2/\xi_3^2}\right)\ .$$

Aus (2.3) bekommt man jetzt

$$\begin{aligned} \delta_\Gamma(x_1,x_3) &= \int\int \hat{A}(\xi_1,\xi_3)e^{i(\xi_1 x_1+\xi_3 x_3)}d\xi_1 d\xi_3 \\ &= 2\pi A(x_1,x_3)\ . \end{aligned}$$

Da Γ im wesentlichen der Träger von δ_Γ ist, ist Γ damit näherungsweise bestimmt.

Wir wollen nachweisen, daß die Methoden für lineares Γ, also $x \cdot \theta = s$, $\theta = (\theta_1, 0, \theta_3)$, $\theta_1^2 + \theta_3^2 = 1$ das exakte Resultat liefert. Die Daten sind in diesem Fall $g(x_1, t) = \delta(t + x_1\theta_1 - s)$ für $c = 1$. Für $\theta_3 > 0$ sind dies die Werte der aufsteigenden Welle $\delta(t + x \cdot \theta - s)$ an der Oberfläche. Damit wird mit Hilfe von III.3.4

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\xi_1, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int\int e^{-i(\xi_1 x_1 + \omega t)} \delta(t + x_1\theta_1 - s) dx_1 dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int e^{-i(\xi_1 x_1 - \omega(x_1\theta_1 - s))} dx_1 \\
&= e^{-i\omega s} \delta(\xi_1 - \omega\theta_1) \ .
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\hat{A}(\xi_1, \xi_3) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2/\xi_3^2}} \hat{g}\left(\xi_1, \xi_3\sqrt{1 + \xi_1^2/\xi_3^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{}} e^{-is\xi_3\sqrt{}} \ \delta(\xi_1 - \xi_3\theta_1\sqrt{}) \ .
\end{aligned}$$

Inverse Fouriertransformation ergibt

$$A(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int\int \frac{1}{\sqrt{}} e^{-is\xi_3\sqrt{}} \delta(\xi_1 - \xi_3\theta_1\sqrt{}) e^{i(x_1\xi_1 + x_3\xi_3)} d\xi_1 d\xi_3 \ .$$

An Stelle von ξ_1 führen wir die neue Variable

$$y = \xi_1 - \xi_3\theta_1\sqrt{}$$

ein. Man berechnet

$$\frac{dy}{d\xi_1} = 1 - \frac{\theta_1\xi_1/\xi_3}{\sqrt{}} \ .$$

Für $y = 0$ ist für $\theta_3 > 0$

$$\sqrt{} = \frac{1}{\theta_3} \ , \quad \xi_1 = \frac{\theta_1}{\theta_3}\xi_3 \ , \quad \frac{dy}{d\xi_1} = \theta_3^2 \ .$$

Damit erhält man mittels III.3.4

$$
\begin{aligned}
A(x_1, x_3) &= \frac{1}{2\pi} \int\int \frac{1}{\sqrt{}} e^{-is\xi_3\sqrt{}} \delta(y) e^{i(x_1\xi_1 + x_3\xi_3)} \, \frac{dy d\xi_3}{|\frac{dy}{d\xi_1}|} \\
&= \frac{1}{2\pi\theta_3} \int e^{i(-s\xi_3/\theta_3 + x_1\xi_3\theta_1/\theta_3 + x_3\xi_3)} d\xi_3 \\
&= \frac{1}{\theta_3} \delta(\frac{1}{\theta_3}(-s + x_1\theta_1 + x_3\theta_3)) \\
&= \qquad \delta(x \cdot \theta - s) \, .
\end{aligned}
$$

3.3 Fourier-Transformation und Distributionen

Für $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die Fourier-Transformation

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\cdot\xi} f(x) dx \ .$$

Offenbar ist $\hat{f}$ stetig und beschränkt,

$$\|\hat{f}\|_\infty \le (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1 \ , \quad \|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \left(\int |f|^p dx \right)^{1/p} \ .$$

Die inverse Fourier-Transformation ist

$$\tilde{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\cdot\xi} f(x) dx \ .$$

Satz 3.3.1 *Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$ und $g = \hat{f}$. Dann existiert $\tilde{g}$ im Sinne von*

$$\tilde{g}(x) = \lim_{k\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{|\xi_j|\le k} e^{i\xi\cdot x} g(\xi) d\xi \ ,$$

und es gilt $\tilde{g} = f$.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x) &= \lim_{k\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{|\xi_j|<k} e^{i\xi\cdot x} (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i\xi\cdot y} f(y) dy d\xi \\ &= \lim_{k\to\infty} \int f(y) (2\pi)^{-n} \int\limits_{|\xi_j|\le k} e^{i\xi\cdot(x-y)} d\xi dy \\ &= \lim_{k\to\infty} \int f(y) \delta_k(x-y) dy \ , \end{aligned}$$

$$\delta_k(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{|\xi_j|\le k} e^{i\xi\cdot x} d\xi \ . \tag{3.1}$$

Für $n = 1$ ist
$$\delta_k(x) = \frac{k}{\pi}\mathrm{sinc}(kx) \ , \quad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} \ .$$
Man berechnet leicht
$$\int \delta_k(x)dx = 1 \ .$$
Damit wird für $f \in C^1(\mathbb{R}^1) \cap L_1(\mathbb{R}^1)$
$$\begin{aligned} \int f(x)\delta_k(x)dx &= \int (f(x) - f(0))\delta_k(x)dx + f(0) \\ &= \frac{1}{\pi}\int \frac{f(x) - f(0)}{x} \sin kx \ dx + f(0) \ . \end{aligned}$$
Mit $k \to \infty$ geht das Integral gegen 0. Also gilt
$$\lim_{k\to\infty} \int f(x)\delta_k(x)dx = f(0) \ .$$
Für $n > 1$ ist δ_k das Produkt der eindimensionalen δ_k-Funktion. Es folgt $\tilde{g}(x) = f(x)$.

□

Die Funktion δ_k aus (3.1) ist also eine approximative δ- Funktion. Ist
$$\chi_k(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \begin{cases} 1 & , \quad |\xi_j| \le k \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \ ,$$
so gilt $\tilde{\chi}_k = \delta_k$ und $\hat{\delta}_k = \chi_k$. Wir schreiben deshalb
$$((2\pi)^{-n/2})^{\sim} = \delta \quad , \quad \hat{\delta} = (2\pi)^{-n/2} \ .$$
Als Beispiel berechnen wir das (im klassischen Sinn nicht existierende) Integral
$$u(x,t) = -\frac{1}{2(2\pi)^3} \int\limits_{\mathrm{R}^3} e^{ix\cdot\xi}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\frac{d\xi}{|\xi|} \ , \tag{3.2}$$

wo ω die Dispersionsrelation $\omega = c|\xi|$ erfüllt. Wir führen für ξ Polarkoordinaten ρ, φ, ψ um x ein, so daß also $|\xi| = \rho$, $x \cdot \xi = r\rho\cos\psi$ mit $r = |x|$ wird. Es wird dann

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= -\frac{1}{2(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho \sin\psi e^{ir\rho\cos\psi} (e^{ic\rho t} - e^{-ic\rho t}) d\psi d\varphi d\rho \\
&= -\frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty (e^{ic\rho t} - e^{-ic\rho t}) \int_0^\pi \rho \sin\psi \; e^{ir\rho\cos\psi} d\psi d\rho \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \int_0^\infty (e^{ic\rho t} - e^{-ic\rho t})(e^{-ir\rho} - e^{ir\rho}) d\rho \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-ic\rho t} - e^{ic\rho t}) e^{ir\rho} d\rho \\
&= \frac{1}{4\pi r} (\delta(r - ct) - \delta(r + ct)) \,. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

Damit haben wir Kugelwellen als Linearkombination von ebenen Wellen dargestellt.

Sei $\phi \in C^1(\Omega)$ und sei $\Gamma = \{x \in \Omega : \phi(x) = 0\}$. Sei $|\nabla\phi| \neq 0$ entlang Ω. Wir zeigen

$$
\int_\Omega f(x)\delta(\phi(x))dx = \int_\Gamma f \frac{d\sigma}{|\nabla\phi|} \,. \qquad (3.4)
$$

Dazu nehmen wir an, daß $\phi(x) = z$ nach einem x_i, etwa x_1 auflösbar ist. Dies ist zumindest lokal möglich. Dann ist mit $x' = (x_2, \ldots, x_n)$

$$
\begin{aligned}
\int f(x)\delta(\phi(x))dx &= \int\int f(x_1, x')\delta(z) dx_1 dx' \\
&= \int\int f(\psi(z, x'), x')\delta(z) \; \frac{dz dx'}{|\phi_{x_1}(x_1, x')|} \\
&= \int f(\psi(0, x'), x') \; \frac{dx'}{|\phi_{x_1}(x_1, x')|} \,.
\end{aligned}
$$

$x_1 = \psi(0, x')$ ist eine Darstellung von Γ. Das Oberflächenelement auf Γ ist

$$d\sigma(x) = \left(1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2} dx' \ .$$

Wegen $\phi(\psi(0, x'), x') = 0$ entlang Γ ist

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \ , \qquad i = 2, \ldots, n \ .$$

Also folgt

$$d\sigma(x) = \frac{1}{|\frac{\partial \phi}{\partial x_1}|} \, |\nabla \phi| dx'$$

und damit (3.4).

Durch eine ähnliche Rechnung bestätigt man

$$\delta(rx) = r^{-n} \delta(x)$$

für die n-dimensionale δ-Funktion und $r > 0$.

Die Fourier-Transformation hat folgende Eigenschaften:

1. Sei $f_r(x) = f(rx)$, $r > 0$. Dann ist $\hat{f}_r(\xi) = r^{-n} \hat{f}(\xi / r)$.
2. Sei $f_y(x) = f(x + y)$, $y \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\hat{f}_y(\xi) = e^{i\xi \cdot y} \hat{f}(\xi)$.
3. Ist f, $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, so ist $(\frac{\partial f}{\partial x_j})^\wedge(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)$.
4. Sei $f \star g(x) = \int f(x - y) g(y) dy$, $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f \star g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, und
$$(f \star g)^\wedge = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \hat{g} \ .$$

Sei $\phi \in L_1(\mathbb{R}^n)$. ϕ definiert einen Filter gemäß

$$\hat{f} \ \rightarrow \ \hat{\phi} \hat{f} \ , \qquad f \in L_1(\mathbb{R}^n) \ .$$

Nach Eigenschaft 4 ist hierzu äquivalent

$$f \rightarrow (2\pi)^{-n/2} \phi \star f \ .$$

Einer Faltung im Orts- (oder Zeit-) raum entspricht also einer Multiplikation im Fourier-Raum. Ein Filter ϕ mit der Eigenschaft $\hat{\phi}(\xi) = 0$, $|\xi| > \Omega$ heißt Tiefpassfilter, Ω seine Bandbreite. Wichtigstes Beispiel ist der ideale Tiefpass

$$\hat{\phi}(\xi) = \begin{cases} 1 & , \quad |\xi| \leq \Omega \\ 0 & , \quad \text{sonst} . \end{cases}$$

Für diesen ist (vgl. Aufgabe 16)

$$\phi(x) = (2\pi)^{-n/2} \Omega^n \frac{J_{n/2}(\Omega|x|)}{(\Omega|x|)^{n/2}} = \delta_\Omega(x) .$$

$\phi \star f$ ist eine geglättete Version von f, bei der Details $\leq \pi/\Omega$ geglättet wurden. Ein Filter ψ mit $\hat{\psi}(\xi) = 0$ für $|\xi| \leq \Omega$ heißt Hochpass. Der ideale Hochpass

$$\hat{\psi}(\xi) = \begin{cases} 1 & , \quad |\xi| \geq \Omega \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

ist zwar nicht in L_1. Man kann seine Wirkung aber beschreiben durch

$$f \to f - \delta_\Omega \star f = \psi \star f .$$

Er hat folgende Eigenschaft: Für eine beliebig offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $f \in C^\infty(U)$ genau dann, wenn $\psi \star f \in C^\infty(U)$. Sucht man also nur die Stellen von f, wo f nicht C^∞ ist (der singuläre Träger $s\sup(f)$), so kann man genausogut $\psi \star f$ wie f studieren.

3.4 Asymptotische Lösung der Wellengleichung

Wieder betrachten wir die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(x)\Delta u$$

mit einer Funktion $c(x) > 0$, und wir suchen Lösungen der Form

$$u(x,t) = e^{-i\omega t} v(x) \ ,$$

$$\Delta v + \frac{\omega^2}{c^2} v = 0 \ . \tag{4.1}$$

Wir nehmen nun an, daß ω groß ist, und suchen eine Lösung von (4.1) in der Form

$$v(x) = e^{i\omega\phi(x)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v_j(x)}{(i\omega)^j} \ . \tag{4.2}$$

Setzen wir dies in (4.1) ein, so entsteht

$$(i\omega\Delta\phi - \omega^2|\nabla\phi|^2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v_j}{(i\omega)^j} + 2i\omega\nabla\phi \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\nabla v_j}{(i\omega)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Delta v_j}{(i\omega)^j}$$

$$+\frac{\omega^2}{c^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v_j}{(i\omega)^j} = 0 \ .$$

Diese Beziehung soll für alle ω gelten. Vergleichen wir die Faktoren der Potenzen ω^2, ω, 1, $\omega^{-1}, \ldots$, so entsteht der Reihe nach

$$\begin{array}{rcl} \omega^2 & : & |\nabla\phi|^2 = \frac{1}{c^2} \\ \omega & : & 2\nabla\phi \cdot \nabla v_0 + v_0\Delta\phi = 0 \\ 1 & : & 2\nabla\phi \cdot \nabla v_1 + v_1\Delta\phi + \Delta v_0 = 0 \\ \omega^{-1} & : & 2\nabla\phi \cdot \nabla v_2 + v_2\Delta\phi + \Delta v_1 = 0 \end{array}$$

usw. Die erste Gleichung ist die uns wohlbekannte Eikonal-Gleichung. Wir schreiben sie in der Form

$$F(x,p,\phi) = |p| - \frac{1}{c(x)} = 0 \ . \tag{4.3}$$

Die weiteren Gleichungen sind sogenannte Transportgleichungen. Diese Gleichungen werden nun sukzessive nach ϕ, $v_0, \ldots, v_j$ aufgelöst und dadurch eine Funktion v bestimmt, welche (4.1) bis auf Terme der Ordnung ω^{-j} erfüllt. Z.B. wird (4.1) für $j = 0$ bis auf den Term Δv_0 erfüllt.

Betrachten wir zunächst die Funktion

$$v(x) = e^{i\omega\phi(x)} \; ,$$

wobei ϕ die Eikonal-Gleichung erfüllt. Sie führt zu der Näherung

$$u(x,t) = e^{i\omega(\phi(x)-t)}$$

für die Wellengleichung. Sie erfüllt (4.1) bis auf $\mathrm{O}(\omega)$. u beschreibt eine Welle, deren Phase in allen Punkten der Fläche $\phi(x) = t$ die gleiche ist. Diese Fläche heißt daher Wellenfront. Für konstantes $c > 0$ ist z.B. $\phi(x) = p \cdot x$ mit $|p| = \frac{1}{c}$ eine Lösung der Eikonal-Gleichung, die Wellenfront also die Ebene $p \cdot x = t$. Diese bewegt sich mit der Geschwindigkeit c. Ein anderes Beispiel ist $\phi(x) = \frac{1}{c}|x|$. Die Wellenfront hat jetzt die Gleichung $|x| = ct$ und stellt ebenfalls eine sich mit der Geschwindigkeit c fortbewegende Fläche dar. Dies stimmt auch für nicht konstantes c. Ist nämlich $x(t)$ ein Punkt einer Wellenfront, der sich senkrecht zu ihr fortbewegt, so gilt

$$\phi(x(t)) = t \; , \qquad \dot{x}(t) = \alpha(t)\nabla\phi(x(t))$$

mit einem Skalar $\alpha(t)$. Differenzieren der ersten Beziehung nach t ergibt zusammen mit der zweiten

$$\alpha(t)|\nabla(\phi(x(t))|^2 = 1$$

und damit wegen der Eikonal-Gleichung

$$\alpha(t) = c^2(x(t)) \; , \qquad |\dot{x}(t)| = c^2(x(t))|\nabla\phi(x(t))| = c(x(t)) \; .$$

Also bewegt sich unser Punkt $x(t)$ mit der Geschwindigkeit $c(x(t))$ und damit die ganze Wellenfront in jedem ihrer Punkte x mit der Geschwindigkeit $c(x)$ senkrecht zu sich selbst.

Das charakteristische System der Eikonal-Gleichung ist nach PDE 1

$$\dot{x} = \frac{p}{|p|} \; , \qquad \dot{p} = \nabla(\frac{1}{c(x)}) \; , \qquad \dot{\phi} = \frac{1}{c(x)} \; . \tag{4.4}$$

Wir wollen zeigen, daß die Lösungen $x(t)$ von (4.4), also die Kurven, welche charakteristische Streifen tragen, gerade die Kurven sind, entlang denen sich Signale in dem Geschwindigkeitsfeld $c(x)$ ausbreiten. Nach dem Fermat'schen Prinzip erfolgt diese Ausbreitung nämlich so, daß die Laufzeit zwischen zwei Punkten minimal ist. Mit anderen Worten: Ist K eine beliebige Kurve, welche die Punkte x_0, x_1 verbindet, so läuft ein Signal, das bei x_0 startet und bei x_1 beobachtet wird entlang der Kurve K^*, für welche

$$\int_K \frac{ds}{c(x)} , \qquad s = \text{Bogenlänge} \tag{4.5}$$

möglichst klein ist.

Wir brauchen nun folgendes Hilfsmittel aus der Variationsrechnung.

Satz 3.4.1 *Sei $L \in C^1(\mathbb{R}^{2n})$, und sei x_0, $x_1 \in \mathbb{R}^n$. Unter allen Kurven x, welche x_0 mit x_1 verbinden, sei x^* so, daß*

$$\int_0^1 L(x^*, \dot{x}^*)dt \leq \int_0^1 L(x, \dot{x})dt .$$

Ist $x^* \in C^2[0,1]$, so gelten die Euler'schen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(x^*, \dot{x}^*) - \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, \dot{x}^*) = 0 , \qquad i = 1, \ldots, n .$$

Wenden wir dies nun an auf das Problem, (4.5) zu minimieren. Hier haben wir

$$L(x, \dot{x}) = \frac{|\dot{x}|}{c(x)} .$$

Die Euler'schen Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{c(x)|\dot{x}|} - |\dot{x}| \nabla \frac{1}{c(x)} = 0$$

Diese Gleichungen sind invariant gegenüber Parametertransformationen. Also können wir z.B. die Bogenlänge als Parameter verwenden. Dann ist $|\dot{x}| = 1$, und wir erhalten

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{c(x)} = \nabla \frac{1}{c(x)} .$$

Mit $p = \dot{x}/c(x)$, also $|p| = c(x)$, wird hieraus gerade (4.4).

Damit steht fest: Die (Träger der) Charakteristiken der Eikonal-Gleichung genügen dem Fermatschen Prinzip (und werden daher als "Strahlen" angesehen).

3.5 Die Bornsche Näherung

Wir nehmen an, die gesuchte Schallgeschwindigkeit c unterscheide sich nur in einem Gebiet Ω von der Hintergrundschallgeschwindigkeit c_0:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_0^2}(1+f) , \qquad \mathrm{supp}(f) \subseteq \Omega . \tag{5.1}$$

Die Quellen s und die *receiver* r liegen außerhalb von Ω. Zur Zeit $t = 0$ werde an der Stelle s ein Impuls gegeben, dessen Zeitverlauf durch das *wavelet* $w(t)$ mit $w(t) = 0$, $t < 0$ beschrieben wird. Typische *wavelets* sind

$$w(t) = \delta(t) , \quad w(t) = e^{i\omega t}\chi(t) , \quad \chi \in C_0^\infty(0,\infty) .$$

Wir beschreiben das Experiment durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2(\Delta u - \delta(x-s)w(t)) \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1 , \\ u &= 0 \text{ für } t < 0 . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Sei u^0 die Lösung für $c = c_0$. Wir setzen $u = u^0 + v$ und finden für v

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c_0^2 \Delta v - f\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1 , \\ v &= 0 \quad \text{für } t < 0 . \end{aligned}$$

Die Born-Approximation besteht nun darin, daß man hier u durch u^0 ersetzt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c_0^2 \Delta v - f\frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1 \\ v &= 0 \quad \text{für } t < 0 . \end{aligned} \tag{5.3}$$

Wir führen die weiteren Rechnungen zunächst für den Fall einer konstanten Hintergrundschallgeschwindigkeit c_0 durch.

Wir benutzen die Kirchhoffsche Lösung

$$v(x,t) = \frac{1}{4\pi c_0^2} \int\limits_{|x-x'| \le c_0 t} \frac{h(x', t - |x-x'|/c_0)}{|x-x'|} dx' \tag{5.4}$$

der Anfangswertaufgabe

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta v + h(x,t) \ , \quad v = v_t = 0 \quad \text{bei} \ \ t = 0 \ .$$

Mit $h = -f u_{tt}^0$ erhalten wir

$$v(x,t) = -\frac{1}{4\pi c_0^2} \int\limits_{|x-x'| \le c_0 t} f(x') \ \frac{u_{tt}^0(x', t - |x-x'|/c_0)}{|x-x'|} \ dx' \ .$$

Da $u^0(x,t) = 0$ für $t < 0$ können wir die Einschränkung des Integrationsbereiches weglassen und dann die zweite Ableitung bei u^0 vor das Integral ziehen. Da f außerhalb Ω verschwindet, erhalten wir

$$v(x,t) = -\frac{1}{4\pi c_0^2} \ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ \int\limits_{\Omega} f(x') \ \frac{u^0(x', t - |x-x'|/c_0)}{|x-x'|} \ dx' \ . \tag{5.5}$$

Ebenfalls aus der Kirchoffschen Formel (5.4) erhalten wir

$$\begin{aligned} u^0(x,t) \quad &= \quad -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{|x-x'| \le c_0 t} \delta(x'-s) w(t - |x-x'|/c_0) \ \frac{dx'}{|x-x'|} \\ &= \quad -\frac{1}{4\pi} \ \frac{w(t - |x-s|/c_0)}{|x-s|} \ . \end{aligned}$$

Setzen wir dies in (5.5) ein, so entsteht schließlich

$$v(x,t) = \frac{1}{16\pi^2 c_0^2} \ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int\limits_{\Omega} f(x') \ \frac{w(t - (|x-x'| + |x'-s|)/c_0)}{|x-x'||x'-s|} \ dx' \ . \tag{5.6}$$

Dies ist die Lösung des direkten Problems in der Bornschen Näherung. Sie wird zur Lösung des inversen Problems in folgender Weise benutzt. Sei $g(r,s,t)$ die Daten-Funktion, also $g(r,s,t) = v(r,t)$, mit der Lösung $u = u^0 + v$ von (5.3). Dann lautet (5.6)

$$g(r,s,t) = \frac{1}{16\pi^2 c_0^2} \ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ \int\limits_{\Omega} f(x) \frac{w(t - (|r-x| + |x-s|)/c_0)}{|r-x||x-s|} \ dx \ .$$

Dies ist eine lineare Integralgleichung für f. Für $w = \delta$ lautet sie (vgl. (3.4))

$$g(r,s,t) = \frac{1}{16\pi^2 c_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int\limits_{I_d} f(x) \frac{d\sigma(x)}{||r-x|(s-x) + |s-x|(r-x)|} \tag{5.7}$$

mit der Isochronen $I_d = \{x \in \Omega : c_0 t = |r-x| + |x-s|\}$, $d = (r,s,t)$ aus §1.

Die Born-Approximation reduziert also inverse Streuprobleme auf die Bestimmung von f aus Integralen über Mannigfaltigkeiten niedriger Dimension. Dies ist das Problem der Integralgeometrie, das wir in Kap. IV behandeln werden.

An Stelle der *wavelets* w kann man auch die zeitharmonische Einstrahlung mit $w(t) = e^{-i\omega t}$ bei fester Frequenz ω verwenden. Dann kann man $u(x,t) = e^{-i\omega t} u(x)$ annehmen und hat dann an Stelle von (5.3)

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2} u = \delta(x-s) \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

oder, mit $k = \omega / c_0$

$$\Delta u + k^2 u = -k^2 f u + \delta(x-s) \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \, . \tag{5.8}$$

Aus PDE I wissen wir, daß

$$\Delta u + k^2 u = h$$

zusammen mit der Ausstrahlungsbedingung

$$u = \mathrm{O}\left(\frac{1}{r}\right) \, , \quad \frac{\partial u}{\partial r} - iku = \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

mit $r = |x|$ für $h \in C_0^1(\mathbb{R}^3)$ eindeutig lösbar ist, und zwar ist

$$u(x) = \int \gamma(x-y) h(y) dy$$

mit der Fundamentallösung

$$\gamma(x) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} \, . \tag{5.9}$$

Die zugehörige Lösung

$$e^{-i\omega t}\gamma(x) = \frac{e^{i\omega(|x|/c_0 - t)}}{4\pi|x|}$$

entspricht dann einer Welle, deren Wellenfronten $|x| = tc_0 + \text{const.}$ sich mit wachsender Zeit ausbreitenden Kugeloberflächen entsprechen. Das eben besagt das Wort "Ausstrahlungsbedingung".

Wir suchen wieder Lösungen in der Form $u^0 + v$, wo u^0 die Lösung mit $c = c_0$ darstellt und alle Funktionen die Ausstrahlungsbedingung erfüllen. Offenbar ist

$$u^0(x) = \gamma(x - s) \ .$$

Aus (5.9) folgt dann

$$v(x) = -k^2 \int \gamma(x - x')f(x')u(x')dx' \ .$$

Wieder erhalten wir die Born-Approximation, indem wir hier u durch u^0 ersetzen:

$$v(x) = -k^2 \int_\Omega \gamma(x - x')f(x')\gamma(x' - s)dx'$$

Mit der Daten-Funktion $g(r, s, \omega) = v(r)$ erhalten wir

$$g(r, s, \omega) = -\frac{k^2}{16\pi^2} \int_\Omega f(x) \frac{e^{ik(|r-x|+|x-s|)}}{|r - x||x - s|} dx \ . \tag{5.10}$$

Hier machen wir eine weitere Approximation. Wir nehmen an, daß r und s auf einer großen Kugel vom Radius R liegen und lassen $R \to \infty$ streben. Mit $r = R\alpha$, $s = R\beta$, α, $\beta \in S^2$ ist dann

$$\begin{aligned} |r - x| &= R - \alpha \cdot x + \mathrm{O}(\tfrac{1}{R}) \\ |s - x| &= R - \beta \cdot x + \mathrm{O}(\tfrac{1}{R}) \end{aligned}$$

und damit bis auf O $(\frac{1}{R^3})$, d.h. bis auf einen relativen Fehler von O $(\frac{1}{R})$

$$\begin{aligned} g(r, s, \omega) &= -\frac{k^2 e^{ikR}}{16\pi^2 R^2} \int_\Omega f(x)e^{-ik(\alpha+\beta)\cdot x}dx \\ &= -\frac{k^2 e^{ikR}}{16\pi^2 R^2}(2\pi)^{3/2}\hat{f}(k(\alpha + \beta)) \ . \end{aligned}$$

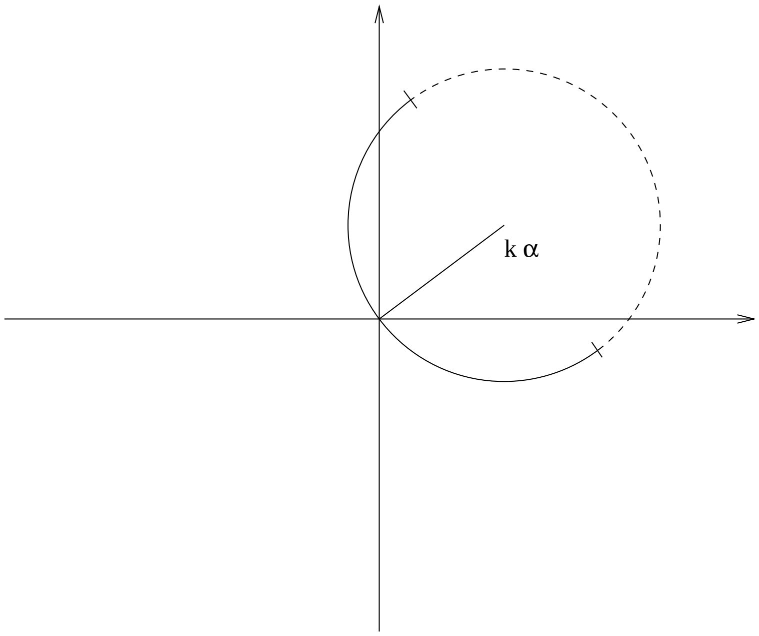


Abbildung 3.2: Ewald-Sphäre für eine feste *receiver*-Position α. Der gestrichelte Anteil entspricht dem *backscatter*, der durchgezogene der Transmissionsmessung.

Für eine feste Quelle s liefert g also die Werte der Fourier-Transformation auf einer Sphäre um $k\beta$ mit Radius k. Man nennt diese Sphären Ewald-Sphären. Entsprechendes gilt für eine feste *receiver*-Position.

Mißt man nur den *backscatter* (d.h. $\alpha \cdot \beta \geq 0$), so kann man $\hat{f}(\xi)$ nur für $|\xi| \geq k\sqrt{2}$ bestimmen. Dies bedeutet, daß man nur eine hochpassgefilterte Version von f bestimmen kann. Dies reicht aus, um z.B. Unstetigkeiten von f bestimmen zu können. Macht man hingegen nur Transmissionsmessungen ($\alpha \cdot \beta \leq 0$), so kann man $\hat{f}(\xi)$ nur für $|\xi| \leq \sqrt{2}k$ bestimmen. Dadurch wird die räumliche Auflösung beschränkt.

Zur Gültigkeit der Born-Approximation wollen wir noch eine heuristische Bedingung angeben. Dazu beschränken wir uns auf eine konstante Störung

f in $[-\rho, \rho]$. Die ungestörte Helmholtz-Gleichung lautet dann

$$u_0'' + k^2 u_0 = 0 \ ,$$

die gestörte

$$u'' + k^2(1+f)u = 0 \ .$$

Die Lösungen sind

$$u_0(x) = e^{\pm ikx} \ , \qquad u(x) = e^{\pm ik\sqrt{1+f}x} \ .$$

Die Born-Approximation verlangt $u \sim u_0$. Dazu ist (hochgradig) notwendig, daß die Phasen sich um deutlich weniger als π unterscheiden, d.h.

$$|k\sqrt{1+f} - k| 2\rho \ll \pi \ .$$

Für kleines f bedeutet dies

$$k|f|\rho \ll \pi \ .$$

Ist D der Durchmesser eines Objekts mit konstantem f, so erhalten wir

$$D|f| \ll \frac{2\pi}{k} \ .$$

3.6 Die "distorted" Born-Approximation

Ist der Hintegrund nicht konstant, so kann man nicht mehr die Fundamentallösung (5.9) benutzen. Statt dessen nehmen wir die in §4 abgeleitete Näherung

$$\begin{aligned} u(x) &= A(x)e^{i\omega\tau} && (6.1)\\ |\nabla\tau| &= \frac{1}{c_0(x)}\ , \quad 2\nabla\tau\ \nabla A + A\Delta\tau = 0\ . && (6.2) \end{aligned}$$

Sei s eine Quelle außerhalb supp (f) und Γ_s eine kleine Kugelsphäre um s. Dann legen wir A, τ durch die Anfangsbedingungen

$$\tau(x) = \frac{|x-s|}{c_0(s)}\ , \qquad A(x) = \frac{1}{4\pi|x-s|} \tag{6.3}$$

fest. Die Anfangswertaufgaben (6.2), (6.3) sind - zumindest in einer Umgebung von Γ_s - eindeutig lösbar. Dazu erinnern wir an die Theorie der quasilinearen Differentialgleichung $F(x, u, p) = 0$ mit $p = \nabla u$ in $\mathbb{R}^n$. Die Anfangswertaufgabe lautet: Sei eine Streifenmannigfaltigkeit

$$\begin{gathered} S : x = \varphi(t)\ , \qquad u = \chi(t)\ , \quad p = p(t)\ , \qquad t \in \mathbb{R}^{n-1}\\ \frac{d\chi}{dt_j} = p \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial t_j} \qquad j = \ell, \dots, n-1\ ,\\ F(\varphi(t), \chi(t), p(t)) = 0 \end{gathered}$$

gegeben. Gesucht ist eine Lösung u der Differentialgleichung, welche S enthält, also

$$\begin{aligned} u(\varphi(t)) &= \chi(t)\ ,\\ \nabla u(\varphi(t)) &= p(t)\ . \end{aligned}$$

Nach II.5 aus PDE I ist u eindeutig bestimmt, wenn S nicht charakteristisch ist, d.h.

$$Rg\left(\nabla_p F\ ,\ \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_{n-1}}\right) = n\ .$$

Wir wenden dies an auf $|\nabla\tau| = 1/c_0$ mit der Anfangsbedingung $\tau = \varepsilon/c_0(y)$ für $|x-y| = \varepsilon$. Wir ergänzen die Anfangsmannigfaltigkeit zu einer Streifenmannigfaltigkeit

$$\varphi(t) = s + \varepsilon\theta(t)\ , \quad \chi(t) = \frac{\varepsilon}{c_0(s)}\ , \qquad p = p(t)\ ,$$

wobei $\theta(t)$ eine Parametrisierung von S^{n-1} ist und p die Streifenbedingung

$$\frac{\partial\chi}{\partial t_j} = 0 = p \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}\,, \qquad j = 1, \ldots, n$$

und $|p(t)| = 1/c_0(\varphi(t))$ erfüllt. Die Rangbedingung lautet

$$Rg\left(\frac{p}{|p|}\ ,\ \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_{n-1}}\right) = n$$

und ist offenbar erfüllt.

Für die Differentialgleichung $2\nabla\tau \cdot \nabla A + A\Delta\tau = 0$ lautet die Rangbedingung

$$Rg\left(2\nabla\tau\ ,\ \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_{n-1}}\right) = n\ .$$

Wegen $\nabla\tau = p$ ist auch diese Bedingung erfüllt.

Die Lösungen von (6.2), (6.3) bezeichnen wir auch mit $\tau(x, s)$, $A(x, s)$. (5.10) nimmt dann die Form

$$g(r, s, \omega) = -\omega^2 \int\limits_\Omega \frac{f(x)}{c_0(x)} A(r, x)A(x, s)e^{i\omega(\tau(r,x)+\tau(x,s))}dx \tag{6.4}$$

an. Dies ist eine Näherung für großes ω.

Um eine entsprechende Approximation im Zeitbereich zu bekommen, also für das Problem (5.1), (5.3) mit $w(t) = \delta(t)$ nehmen wir an, daß (6.4) auch für kleine ω näherungsweise gilt. Fourier-Transformation von (6.4) bezüglich ω ergibt dann

$$\begin{aligned}
\hat{g}(r, s, t) &= \int\limits_\Omega f(x)A(r, x)A(x, s)(2\pi)^{-1/2} \int \omega^2 e^{-i\omega(t-\tau(r,x)-\tau(x,s))} d\omega dx \\
&= (2\pi)^{1/2} \int\limits_\Omega f(x)A(r, x)A(x, s)\delta''(t - \tau(r, x) - \tau(x, s))dx \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int f(x)A(r, x, s)\delta(t - \tau(r, x, s))dx\ ,
\end{aligned}$$

$$A(r, x, s) = (2\pi)^{1/2} A(r, x)A(x, s)\ ,\quad \tau(r, x, s) = \tau(r, x) + \tau(x, s)\ .$$

Nach (3.4) erhalten wir schließlich als Analogon zu (5.7)

$$g(r,s,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int\limits_{I_d} f(x) A(r,x,s) \frac{d\sigma(x)}{c_0(x) |\nabla_x \tau(r,x,s)|} \tag{6.5}$$

mit der Isochronen $I_d = \{x : t = \tau(r,x,s)\}$ und $d = (r,s,t)$. Die Größen A, τ sind durch das bekannte c_0 bestimmt.

In Kap. IV werden wir integralgeometrische Aufgaben dieser Art durch Inversionsformeln lösen.

Kapitel 4

Integral-Geometrie

4.1 Die Radon-Transformation

Prototyp der integralgeometrischen Transformationen ist die Radon-Transformation

$$Rf(\theta,s) = \int\limits_{x\cdot\theta=s} f(x)d\sigma(x)\ , \qquad \theta\in S^{n-1}\ , \quad s\in\mathbb{R}^1.$$

Dies hat Sinn z.B. für $f\in C_0(\mathbb{R}^1)$. Andere Schreibweisen sind

$$\begin{aligned}(Rf)(\theta,s) &= \int\limits_{y\in\theta^\perp} f(s\theta+y)dy\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\delta(s-x\cdot\theta)dx\end{aligned}$$

Satz 4.1.1 *(Projektionssatz): Sei $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$. Dann ist*

$$(Rf(\theta,\cdot))^\wedge(\sigma) = (2\pi)^{(n-1)/2}\hat{f}(\sigma\theta)\ .$$

Dabei steht links die Fourier-Transformation in $\mathbb{R}^1$, rechts in $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Es ist

$$((Rf)(\theta,\cdot))^\wedge(\sigma) = (2\pi)^{-1/2}\int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{-is\sigma}(Rf)(\theta,s)ds$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-is\sigma} \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy ds \; .$$

Mit $x = s\theta + y$ lautet dies

$$\begin{aligned} ((Rf)(\theta, \cdot))^\wedge(\sigma) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\sigma x \cdot \theta} f(x) dx \\ &= (2\pi)^{(n-1)/2} \hat{f}(\sigma\theta) \; . \end{aligned}$$

□

Für eine Funktion $g \in C(S^{n-1} \times \mathbb{R}^1)$ definieren wir

$$(R^* g)(x) = \int_{S^{n-1}} g(\theta, x \cdot \theta) d\sigma(\theta) \; .$$

Betrachten wir R als Operator von $L_2(\mathbb{R}^n)$ in $L_2(S^{n-1} \times \mathbb{R}^1)$, so ist R^* gerade der adjungierte zu R:

$$\begin{aligned} (Rf, g) &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^1} (Rf)(\theta, s) \overline{g}(\theta, s) ds d\sigma(\theta) \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy \overline{g}(\theta, s) d\sigma(\theta) ds \\ &= \int f(x) \int_{S^{n-1}} \overline{g}(\theta, x \cdot \theta) d\sigma(\theta) dx \\ &= (f, R^* g) \; . \end{aligned}$$

Satz 4.1.2 *Für $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$R^* R f = |S^{n-2}| \; |x|^{-1} \star f \; .$$

Beweis: Es ist

$$(R^* Rf)(x) = \int_{S^{n-1}} (Rf)(\theta, x \cdot \theta) d\sigma(\theta)$$

$$\begin{aligned} &= \int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{\theta^\perp} f((x\cdot\theta)\theta + y)dyd\sigma(\theta) \\ &= \int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{\theta^\perp} f(x+y)dyd\sigma(\theta) \ . \end{aligned}$$

Nun benutzen wir die Formel

$$\int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{\theta^\perp} f(y)dyd\sigma(\theta) = |S^{n-2}| \int\limits_{\mathrm{R}^n} |y|^{-1} f(y)dy \ ,$$

welche etwa für $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ richtig ist. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} (R^* Rf)(x) &= |S^{n-2}| \int\limits_{\mathrm{R}^n} |y|^{-1} f(x+y)dy \\ &= |S^{n-2}| \int\limits_{\mathrm{R}^n} |y-x|^{-1} f(y)dy \ . \end{aligned}$$

□

Satz 4.1.3 *(Radonsche Inversionsformel): Sei $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ und $g = Rf$. Dann ist*

$$f = R^* K g \ ,$$

$$(Kg(\theta,\cdot))^\wedge(\sigma) = c|\sigma|^{n-1}\hat{g}(\theta,\sigma) \ , \quad c = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \ .$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathrm{R}^n} e^{+ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_0^\infty |\sigma|^{n-1} \int\limits_{S^{n-1}} e^{i\sigma x\cdot\theta} \hat{f}(\sigma\theta)d\sigma(\theta)d\sigma \\ &= (2\pi)^{-n/2}(2\pi)^{(1-n)/2} \int\limits_0^\infty |\sigma|^{n-1} \int\limits_{S^{n-1}} e^{i\sigma x\cdot\theta} \hat{g}(\theta,\sigma)d\sigma(\theta)d\sigma \ . \end{aligned}$$

Ersetzen wir θ durch $-\theta$ und σ durch $-\sigma$, so ändert sich das Integral nicht. Also können wir das so veränderte Integral addieren und die Summe durch 2 dividieren:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}(2\pi)^{-n/2}(2\pi)^{(1-n)/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\sigma|^{n-1}\int\limits_{S^{n-1}} e^{i\sigma x\cdot\theta}\hat{g}(\theta,\sigma)d\sigma(\theta)d\sigma \\
&= \frac{1}{2}(2\pi)^{-n/2}(2\pi)^{(1-n)/2}\,\frac{1}{c}\int\limits_{S^{n-1}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(Kg)^\wedge(\theta,\sigma)e^{i\sigma x\cdot\theta}d\sigma d\sigma(x) \\
&= \frac{1}{2}(2\pi)^{-n/2}(2\pi)^{(1-n)/2}(2\pi)^{1/2}\,\frac{1}{c}\int\limits_{S^{n-1}}(Kg)(\theta,x\cdot\theta)d\sigma(x) \\
&= (R^*Kg)(x)\,.
\end{aligned}$$

□

Wir betrachten zunächst den Fall $n=3$. In diesem Fall ist

$$(Kg)^\wedge(\sigma) = c\sigma^2\hat{g}(\sigma) = -c(g'')^\wedge(\sigma)\,,$$

also $Kg=-cg''$. Damit nimmt die Radonsche Inversionsformel die Gestalt

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{S^2} g''(\theta,x\cdot\theta)d\sigma(\theta)$$

an. Wir können sie auch in der Form

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2}\Delta\int\limits_{S^2} g(\theta,x\cdot\theta)d\sigma(\theta)$$

mit dem Laplaceschen Operator Δ schreiben.

Der Fall $n=2$ ist nicht so einfach. Es ist jetzt

$$\begin{aligned}
(Kg)^\wedge(\sigma) &= \frac{1}{4\pi}|\sigma|\hat{g}(\sigma) \\
&= \frac{1}{4\pi}\,i\,\operatorname{sgn}(\sigma)(g')^\wedge(\sigma)\,.
\end{aligned}$$

In Aufgabe 14 haben wir gesehen, daß die Fourier-Transformation von $\frac{1}{s}$ im Sinne des Hauptwertes existiert und $-i(\frac{\pi}{2})^{1/2}\mathrm{sgn}(\sigma)$ ist. Formal ergibt also der Faltungssatz

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{s} \star g)^\wedge &= (2\pi)^{1/2}(\frac{1}{s})^\wedge \hat{g} \\
&= -i\,\pi\,\mathrm{sgn}(\sigma)\hat{g}
\end{aligned}$$

oder, mit der Hilbert-Transformation

$$\begin{aligned}
(Hg)(s) &= \frac{1}{\pi}\int \frac{g(t)}{s-t}dt\ , \\
(Hg)^\wedge(\sigma) &= -i\,\mathrm{sgn}(\sigma)\hat{g}(\sigma)\ .
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$(Kg)^\wedge = -\frac{1}{4\pi}\,(Hg')^\wedge$$

oder $K = -\frac{1}{4\pi}H\frac{d}{ds}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S^1}(Hg')(\theta, x\cdot\theta)d\sigma(\theta) \\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{S^1}\int \frac{g'(\theta,s)}{x\cdot\theta - s}ds d\sigma(\theta)\ .
\end{aligned}$$

Dies ist die von Radon 1917 angegebene Formel.

4.2 Rekonstruktion einer Funktion aus sphärischen Mitteln

Als nächstes Beispiel eines integralgeometrischen Problems betrachten wir die Rekonstruktion einer Funktion f in $\mathbb{R}^n$ aus ihren Integralen über Sphären, deren Mittelpunkte auf einer Hyperebene liegen. Diese Hyperebene nehmen wir als $x_n = 0$ an und haben dann die Integraltransformation

$$(Rf)(x', r) = r^{1-n} \int\limits_{|y|=r} f\left(\begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} + y\right) d\sigma(y), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ r > 0. \qquad (2.1)$$

Offenbar ist $Rf = 0$ für in x_n ungerade Funktionen f. Wir setzen daher f als gerade in x_n voraus. Überdies nehmen wir $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ an, um technische Schwierigkeiten zu vermeiden. Eine äquivalente Darstellung von R ist

$$(Rf)(x', r) = 2 \int\limits_{|y'|<1} f(x' + ry', r\sqrt{1-|y'|^2})\ \frac{dy'}{\sqrt{1-|y'|^2}}\ .$$

Wir machen eine $(n-1)$-dimensionale Fourier-Transformation bezüglich x':

$$\begin{aligned}(Rf)\hat{}(\xi', r) &= (2\pi)^{(n-1)/2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-ix'\cdot\xi'} (Rf)(x', r) dx' \\ &= 2(2\pi)^{(n-1)/2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-ix'\cdot\xi'} \int\limits_{|y'|<1} f(x' + ry', r\sqrt{1-|y'|^2})\ \frac{dy'}{\sqrt{1-|y'|^2}} dx'\ .\end{aligned}$$

Wir vertauschen die Integrationsreihenfolge und führen für x' die neue Variable $z' = x' + ry'$ ein. Dies ergibt

$$\begin{aligned}(Rf)\hat{}(\xi', r) &= 2(2\pi)^{(n-1)/2} \int\limits_{|y'|<1} e^{iry'\cdot\xi'} \int f(z', r\sqrt{1-|y'|^2}) e^{-iz'\cdot\xi'} dz' \frac{dy'}{\sqrt{1-|y'|^2}} \\ &= 2 \int\limits_{|y'|<1} e^{iry'} \check{f}(\xi', r\sqrt{1-|y'|^2}) \frac{dy'}{\sqrt{1-|y'|^2}}\end{aligned}$$

mit der $(n-1)$-dimensionalen Fourier-Transformation $\check{f}$ von f bezüglich der Variablen x'. Hier führen wir für y' Polarkoordinaten $y' = s\theta$, $\theta \in S^{n-2}$ ein.

Dann wird

$$(Rf)^\wedge(\xi', r) = 2\int_0^1 \frac{s^{n-2}}{\sqrt{1-s^2}} \check{f}(\xi', r\sqrt{1-s^2}) \int_{S^{n-2}} e^{irs\theta\cdot\xi'} d\theta ds \; . \tag{2.2}$$

Dies ist für jedes $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ eine eindimensionale Integralgleichung für $\check{f}(\xi', \cdot)$. Die Fourier-Transformation hat also das n-dimensionale Problem auf eine $(n-1)$-dimensionale Familie eindimensionaler Probleme reduziert.

Wir machen nun Gebrauch von der Hankel-Transformation H_n. Diese ist erklärt als die Fourier-Transformation einer radialsymmetrischen Funktion $f(|x|)$ in $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
(H_n f)(|\xi|) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x) dx \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_0^\infty r^{n-1} f(r) \int_{S^{n-1}} e^{-ir\theta\cdot\xi} d\theta dr \\
&= \int_0^\infty r^{n-1} f(r) (|\xi| r)^{1-n/2} J_{\frac{n-2}{2}}(r|\xi|) dr
\end{aligned}$$

mit der Bessel-Funktion J_k. Diese Formel haben wir für $n = 2$ in Aufgabe 15 bewiesen. Es folgt

$$(H_n f)(\rho) = \rho^{1-n/2} \int_0^\infty r^{n/2} J_{\frac{n-2}{2}}(r\rho) f(r) dr \; .$$

Für die inverse Fourier-Transformation hätten wir das gleiche Resultat erhalten. Also ist $H_n^{-1} = H_n$.

Satz 4.2.1 *Sei $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ gerade in x_n. Dann gilt*

$$(H_n(Rf)^\wedge)(\xi', \rho) = \begin{cases} 2(2\pi)^{(n-1)/2} \hat{f}(\xi', \sqrt{\rho^2 - |\xi'|^2}) \frac{\rho^{2-n}}{\sqrt{\rho^2 - |\xi'|^2}} \; , & \rho > |\xi'| \; , \\ 0 \quad , & \textit{sonst} \; . \end{cases}$$

Dabei ist $(Rf)^\wedge$ die $(n-1)$-dimensionale Fourier-Transformation von Rf bezüglich des ersten Arguments, und H_n wirkt auf das zweite Argument.

Beweis: Wir beschränken uns auf $n \geq 3$.

Mit Hilfe der Formel

$$\int\limits_{S^{n-1}} e^{-ir\theta\cdot\xi} d\sigma(\theta) = (2\pi)^{n/2}(r|\xi|)^{1-n/2} J_{\frac{n-2}{2}}(r|\xi|)$$

(vgl. Aufgabe 15) lautet (2.2)

$$(Rf)^\wedge(\xi', r) = 2(2\pi)^{(n-1)/2} \int\limits_0^1 \frac{s^{n-2}}{\sqrt{1-s^2}} \check{f}(\xi', r\sqrt{1-s^2})(rs|\xi'|)^{1-(n-1)/2} J_{\frac{n-3}{2}}(rs|\xi'|)ds \ .$$

Die n-dimensionale Hankel-Transformation bezüglich r ergibt

$$\begin{aligned}
&(H_n(Rf)^\wedge)(\xi', \rho) = 2(2\pi)^{(n-1)/2}\rho^{1-n/2} \\
&\int\limits_0^1 \frac{s^{n-2}}{\sqrt{1-s^2}} \int\limits_0^\infty r^{n/2} J_{\frac{n-2}{2}}(r\rho) J_{\frac{n-3}{2}}(rs|\xi'|) \\
&\qquad (rs|\xi'|)^{1-(n-1)/2} \check{f}(\xi', r\sqrt{1-s^2}) drds \\
= \ & 2(2\pi)^{(n-1)/2}\rho^{1-n/2}|\xi'|^{(3-n)/2} \int\limits_0^1 \frac{s^{(n-1)/2}}{\sqrt{1-s^2}} \int\limits_0^\infty r^{3/2} J_{\frac{n-2}{2}}(r\rho) J_{\frac{n-3}{2}}(rs|\xi'|) \\
&\qquad \check{f}(\xi', r\sqrt{1-s^2}) drds \ .
\end{aligned}$$

Wir substituieren für r die Variable $t = r\sqrt{1-s^2}$:

$$\begin{aligned}
= \ & 2(2\pi)^{(n-1)/2}\rho^{1-n/2}|\xi'|^{(3-n)/2} \int\limits_0^1 \frac{s^{(n-1)/2}}{\sqrt{1-s^2}} \int\limits_0^\infty \left(\frac{t}{\sqrt{1-s^2}}\right)^{3/2} J_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\rho t}{\sqrt{1-s^2}}\right) \\
&\qquad J_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{st|\xi'|}{\sqrt{1-s^2}}\right) \overset{\vee}{f}(\xi', t) \frac{dtds}{\sqrt{1-s^2}} \\
= \ & 2(2\pi)^{(n-1)/2}\rho^{1-n/2}|\xi'|^{(3-n)/2} \int\limits_0^\infty \overset{\vee}{f}(\xi', t) t^{3/2} I_n(t, \rho, |\xi'|) dt \ , \\
&\qquad I_n(t, \rho, |\xi'|) = \int\limits_0^1 s^{(n-1)/2}(1-s^2)^{-7/4} J_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\rho t}{\sqrt{1-s^2}}\right) J_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{st|\xi'|}{\sqrt{1-s^2}}\right) ds \ .
\end{aligned}$$

In I_n substituieren wir für s die Variable $x = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$, also

$$x^2 + 1 = \frac{1}{1-s^2}\ , \quad s = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ , \quad \frac{dx}{ds} = (1-s^2)^{-3/2}\ .$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} I_n(t,\rho,|\xi'|) &= \int_0^\infty \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^{(n-1)/2} (x^2+1)^{7/4} J_{\frac{n-2}{2}}(\rho t\sqrt{1+x^2}) \\ &\quad J_{\frac{n-3}{2}}(xt|\xi'|)(1+x^2)^{-3/2} dx \\ &= \int_0^\infty x^{(n-1)/2}(x^2+1)^{\frac{2-n}{4}} J_{\frac{n-2}{2}}(\rho t\sqrt{1+x^2}) J_{\frac{n-3}{2}}(xt|\xi'|) dx\ . \end{aligned}$$

Dies ist ein Sonine-Gegenbauer-Integral. In: *Magnus-Oberkettenger-Soni: Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Springer 1966, S. 104, findet man die Formel ($\nu > \mu > -1$)

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty J_\mu(bx) J_\nu(a(x^2+z^2)^{1/2})(x^2+z^2)^{-\nu/2} x^{\mu+1} dx \\ &= \begin{cases} 0\ , \quad a < b\ , \\ b^\mu a^{-\nu} z^{1+\mu-\nu}(a^2-b^2)^{\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}-\frac{1}{2}} J_{\nu-\mu-1}(z(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}})\ , \qquad a > b\ . \end{cases} \end{aligned}$$

Setzen wir hier $z = 1$, $\nu = \frac{n-2}{2}$, $\mu = \frac{n-3}{2}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty J_{\frac{n-3}{2}}(bx) J_{\frac{n-2}{2}}(a\sqrt{x^2+1}) x^{\frac{n-1}{2}} (\sqrt{x^2+1})^{\frac{2-n}{2}} dx \\ &\qquad = \begin{cases} 0\ , \quad a < b \\ b^{(n-3)/2} a^{(2-n)/2} (a^2-b^2)^{-1/4} J_{-1/2}((a^2-b^2)^{1/2})\ , \quad a > b\ , \end{cases} \\ &\qquad = \begin{cases} 0\ , \quad a < b \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} b^{(n-3)/2} a^{(2-n)/2} (a^2-b^2)^{-1/2} \cos((a^2-b^2)^{1/2})\ , \quad a > b\ , \end{cases} \end{aligned}$$

wobei wir zuletzt

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z$$

benutzt haben. Mit $a = \rho t$, $b = t|\xi'|$ folgt

$$I_n(t,\rho,|\xi'|) = \begin{cases} 0\,, \quad |\xi'| > \rho \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}|\xi'|^{(n-3)/2}\rho^{(2-n)/2}(\rho^2 - |\xi'|^2)^{-1/2}t^{-3/2}\cos(t(\rho^2 - |\xi'|^2)^{1/2}), \ |\xi'| < \rho\,. \end{cases}$$

Damit erhalten wir schließlich

$$(H_n(Rf)^\wedge)(\xi',\rho) = 2(2\pi)^{(n-1)/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\rho^{2-n}\int\limits_0^\infty \check{f}(\xi',t)\frac{\cos(t(\rho^2 - |\xi'|^2)^{1/2})}{(\rho^2 - |\xi'|^2)^{1/2}}dt$$

für $|\xi'| < \rho$ und 0 sonst. Da f und damit $\check{f}$ im letzten Argument gerade sind, ist das Integral bis auf den Faktor $\frac{1}{2}(2\pi)^{1/2}$ die Fourier-Transformation von $\check{f}$ bezüglich des letzten Argumentes, also $\hat{f}$. Dieses ergibt die Formel des Satzes.

□

4.3 Lösung integralgeometrischer Aufgaben mit Symmetrien

Sei G eine abelsche Gruppe, z.B. $G = \mathbb{R}^n$, $G = \mathbb{R}_+$, $G = \mathbb{R} \bmod 2\pi$ (Torus-Gruppe). Eine Abbildung $\chi : G \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$ mit $\chi(s)\chi(t) = \chi(st)$ heißt Charakter. Mit χ_1, χ_2 ist auch $\chi_1\chi_2$ ein Charakter. Die Charaktere von G bilden wieder eine abelsche Gruppe, die Charaktergruppe oder den Dual $\hat{G}$.

Beispiele:

1) $G = \mathbb{R}^n$, $\chi_\xi(x) = e^{-i\xi\cdot x}$, $\hat{G} = \mathbb{R}^n$.

2) $G = \mathbb{R}_+$, $\chi_t(x) = x^t$, $\hat{G} = \mathbb{R}_+$.

3) $G = \mathbb{R} \bmod 2\pi$, $\chi_\ell(x) = e^{-i\ell x}$, $\hat{G} = \mathbb{Z}$.

Ein Maß μ auf G heißt invariant, wenn $\mu(sH) = \mu(H)$ für $s \in G$, $H \subset G$.

Beispiele:

1) $G = \mathbb{R}^n$, $\mu =$ Lebesguesche Maß.

2) $G = \mathbb{R}_+$, $d\mu(x) = \frac{dx}{x}$.

3) $G = \mathbb{R} \bmod 2\pi$, $\mu =$ Restriktion des Lebesgueschen Maßes auf $[0, 2\pi)$.

Die Fourier-Transformation einer Funktion f auf G ist nun erklärt als Funktion $\hat{f}$ auf $\hat{G}$, und zwar ist

$$\hat{f}(\chi) = \int \chi(s) f(s) d\mu(s)$$

mit dem geeignet normierten invarianten Maß auf G.

Beispiele:

1) $G = \mathbb{R}^n$, $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx$.

   Dies ist die übliche Fourier-Transformation.

2) $G = \mathbb{R}_+$, $\hat{f}(t) = \int\limits_0^\infty f(x) x^t \frac{dx}{x}$.

   Dies ist die Mellin-Transformation.

3) $G = \mathbb{R} \bmod 2\pi$, $\hat{f}(\ell) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi) e^{-i\ell\varphi} d\varphi$.

Dies sind die Fourier-Koeffizienten.

Sei nun $Rf = g$ ein n-dimensionales integralgeometrisches Problem. Dieses sei invariant gegenüber einer Gruppe G von Transformationen. Es gilt folgende Regel: Ist G abelsch und von der Dimension d, so kann man $Rf = g$ auf eine d-parametrische Familie $(n-d)$-dimensionaler Probleme reduzieren. Im Falle $d = n$ bedeutet dies eine Inversionsformel $f = R^{-1}g$.

Beispiele:

1) Sei R die Radon-Transformation in $\mathbb{R}^n$. Mit $f_a(x) = f(x+a)$ hat man dann

$$(Rf_a)(\theta, s) = (Rf)(\theta, s + a \cdot \theta) .$$

Wir haben also Invarianz bezüglich der n-dimensionalen abelschen Gruppe $\mathbb{R}^n$ der Translationen $x \to x + a$. Wir erwarten also eine Inversionsformel. In der Tat gilt nach Satz 1.1

$$\hat{g}(\theta, \sigma) = (2\pi)^{(n-1)/2} \hat{f}(\sigma\theta)$$

und dies führt über die Fouriersche Inversionsformel direkt zur Radonschen Inversionsformel, vgl. Satz 1.2.

2) Die Radon-Transformation besitzt noch weitere Invarianzen. Ist $U \in SO(n)$ und $f_U(x) = f(Ux)$, so ist

$$\begin{aligned} (Rf_U)(\theta, s) &= \int\limits_{x \cdot \theta = s} f(Ux) d\sigma(x) = \int\limits_{y \cdot U\theta = s} f(y) d\sigma(y) \\ &= (Rf)(U\theta, s) . \end{aligned}$$

Setzt man für $t \in \mathbb{R}_+$ $f_t(x) = f(tx)$, so ist

$$\begin{aligned} (Rf_t)(\theta, s) &= \int\limits_{x \cdot \theta = s} f(tx) d\sigma(x) \\ &= t^{1-n} \int\limits_{y \cdot \theta = ts} f(y) d\sigma(y) \\ &= t^{1-n} (Rf)(\theta, ts) . \end{aligned}$$

Wir haben also das direkte Produkt von $SO(n)$ und $\mathbb{R}_+$ als Invarianzgruppe. Für $n = 2$ ist diese Gruppe abelsch und führt mittels Fourier-Reihe und Mellin-Transformation zur Cormackschen Inversionsformel (Aufgabe 30).

3) Sei

$$(Cf)(x) = \int\limits_{|y-x|=|x|} f(y)d\sigma(y) \ .$$

Dieses Problem hat die gleiche Invarianzgruppe wie die Radon-Transformation:

$$\begin{aligned}(Cf_U)(x) &= \int\limits_{|y-x|=|x|} f(Uy)d\sigma(y) = (Cf)(Ux) \ , \quad U \in SO(n) \\ (Cf_t)(x) &= \int\limits_{|y-x|=|x|} f(ty)d\sigma(y) = t^{1-n}(Cf)(tx) \ .\end{aligned}$$

Für $n = 2$ muß also eine Entwicklung in eine Fourier-Reihe, gefolgt von der Mellin-Transformation, zu einer Inversionsformel führen. Sei

$$\begin{aligned}f(r\theta) &= \sum_\ell f_\ell(r)e^{i\ell\varphi} \ , \quad \theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \ , \quad r > 0 \ , \\ f_\ell(r) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(r\theta)e^{-i\ell\varphi}d\varphi \ .\end{aligned}$$

Mit $y = r(\theta + \omega)$, $\omega = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}$ haben wir

$$\begin{aligned}(Cf)(r\theta) &= \int\limits_0^{2\pi} f(r(\theta+\omega))d\psi \\ &= \int\limits_0^{2\pi} f\left(r\begin{pmatrix} \cos\varphi & + & \cos\psi \\ \sin\varphi & + & \sin\psi \end{pmatrix}\right)d\psi \\ &= \int\limits_0^{2\pi} f\left(2r\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi)/2 \\ \sin(\varphi+\psi)/2 \end{pmatrix}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\right)d\psi \ .\end{aligned}$$

Da der Integrand in ψ die Periode 2π hat, können wir anstatt über $[0, 2\pi]$ ebensogut über $[\varphi - \pi, \varphi + \pi]$ integrieren. Dann ist $\cos\frac{\varphi-\psi}{2} > 0$ im Innern des Integrationsintervalls, und wir können die Fourier-Reihe von f benutzen:

$$\begin{aligned}
(Cf)(r,\theta) &= \sum_\ell \int\limits_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} f_\ell\left(2r\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\right) e^{i\ell(\varphi+\psi)/2} d\psi \\
&= \sum_\ell e^{i\ell\varphi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\ell\left(2r\cos\frac{\psi'}{2}\right) e^{-i\ell\psi'/2} d\psi' \\
&= \sum_\ell 2e^{i\ell\varphi} \int\limits_{0}^{\pi} f_\ell(2r\cos\frac{\psi'}{2}) \cos(\ell\psi'/2) d\psi' \\
&= \sum_\ell e^{i\ell\varphi} \frac{2}{r} \int\limits_{0}^{2r} f_\ell(s) \cos(\ell \arccos(\frac{s}{2r})) \frac{ds}{\sqrt{1-(\frac{s}{2r})^2}} .
\end{aligned}$$

Ist also

$$(Cf)(r,\theta) = \sum_\ell g_\ell(r) e^{i\ell\varphi}$$

die Fourier-Reihe von Cf, so hat man

$$g_\ell(r) = \frac{2}{r} \int\limits_{0}^{2r} f_\ell(s) \cos(\ell \arccos(\frac{1}{2r})) \frac{ds}{\sqrt{1-(\frac{s}{2r})^2}} .$$

Dies ist für jedes ℓ eine Integralgleichung, die man durch die Mellin-Transformation lösen kann.

4.4 Näherungsweise Inversion verallgemeinerter Radon-Transformation

Die Radonsche Inversionsformel für $n = 3$ ist der Prototyp integralgeometrischer Inversionsformeln. Sie lautet

$$f = -\frac{1}{8\pi^2} R^* g \quad , \quad g = \frac{\partial^2}{\partial s^2} Rf$$

vgl. IV.4.1. Diese Inversionsformel wollen wir näherungsweise auf (III.6.5) übertragen. R^* entspricht dabei einer Integration über alle d mit $x \in I_d$, und der Ableitung nach s entspricht die nach t. Also kommt man zu

$$f(x) = \int_{R_x} g(r, s, t) d\sigma(r, s, t) \, ,$$

wo $R_x = \{(r, s, t) : \tau(r, x) + \tau(x, s)) = t\}$ die Fläche maximierender Konvexität (vgl. §1) und σ ein geeignetes Maß auf R_x ist.

Kapitel 5

Numerische Methoden

5.1 Das Kaczmarz-Verfahren

Sei A eine (komplexe) $n \times m$-Matrix. Wir interessieren uns für die Lösung von $Af = g$. Wir nehmen an, es gäbe eine Lösung, die aber nicht eindeutig bestimmt zu sein braucht.

Wir spalten $Af = g$ auf in p Systeme

$$A_j f = g_j \quad , \quad j = 1, \dots, p \tag{1.1}$$

mit den (q, m)-Matrizen A_j und $g_j \in \mathbb{C}^q$. Es sei $n = pq$. Die Verallgemeinerung des Verfahrens auf Matrizen A_j mit unterschiedlicher Anzahl q_j von Zeilen ist trivial. Sei P_j die Orthogonalprojektion von $\mathbb{C}^m$ auf den affinen Unterraum $A_j f = g_j$.

Satz 5.1.1 *A_j habe den Rang q. Dann ist*

$$P_j f = f + A_j^* S_j^{-1}(g_j - A_j f) \qquad S_j = A_j A_j^* \; .$$

Beweis: $P_j f$ ist charakterisiert durch

$$A_j P_j f = g_j \quad , \quad P_j f - f \;\perp\; \ker\,(A_j) \; .$$

Die letzte Bedingung bedeutet wegen $\mathbb{C}^m = \ker(A_j) \oplus \text{ range } (A_j^*)$

$$P_j f = f + A_j^* h$$

mit $h \in \mathbb{C}^q$. Damit ergibt die erste Bedingung

$$A_j(f + A_j^* h) = g_j \ .$$

Auflösen nach h ergibt die behauptete Formel.

□

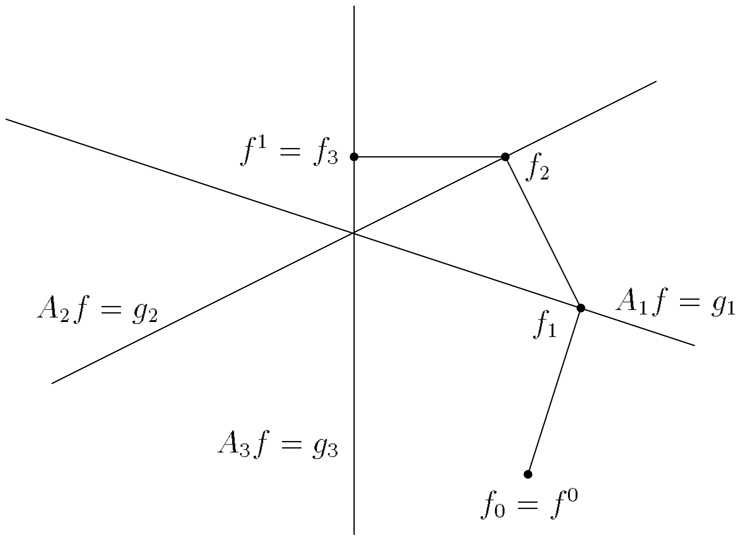
Sei nun $P_j(\omega) = (1-\omega)I + \omega P_j$, also $P_j(1) = P_j$. Nach Satz 5.1 ist

$$\begin{aligned} P_j(\omega)f &= (1-\omega)f + \omega(f + A_j^* S_j^{-1}(g_j - A_j f)) \\ &= f + \omega A_j^* S_j^{-1}(g_j - A_j f) \ . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Das Kaczmarz-Verfahren ist ein Iterationsverfahren. Wir erklären den Schritt $f^0 \to f^1$:

$$\begin{aligned} f_0 &= f^0 \\ f_j &= P_j(\omega) f_{j-1} \quad , \qquad j = 1, \ldots, p \\ f^1 &= f_p \ . \end{aligned} \tag{1.3}$$

Für $\omega = 1$ bedeutet dies also die sukzessive orthogonale Projektion auf $A_j f = g_j$:



Die Berechnung von S_j ist sehr zeitaufwendig. Wir werden das Verfahren (1.3) daher mit vereinfachten Matrizen S_j ausführen, die also nicht notwendig mit $A_j A_j^*$ übereinstimmen.

Satz 5.1.2 *Sei S_j positiv definit und $S_j \geq A_j A_j^*$. A_j habe den Rang q. Ist (1.1) lösbar und erfüllt die Ausgangsnäherung*

$$f^0 \in \textit{ range}\,(A_1^*) \oplus \cdots \oplus \textit{ range}\,(A_p^*)\ ,$$

so konvergiert (1.3) gegen die Lösung von (1.1) mit kleinster Norm.

Beweis: Die Iteration lautet explizit

$$f_j = f_{j-1} + \omega A_j^* S_j^{-1}(g_j - A_j f_{j-1})\ .$$

f_j ist also von der Form

$$f_j = f_0 + A_1^* u_1 + \cdots + A_j^* u_j \tag{1.4}$$

mit $u_j \in \mathbb{C}^q$. Damit lautet die Rekursion

$$\begin{aligned} f_0 + \sum_{k=1}^{j} A_k^* u_k &= f_0 + \sum_{k=1}^{j-1} A_k^* u_k \\ &+ \omega A_j^* S_j^{-1} \left(g_j - A_j f_0 - \sum_{k=1}^{j-1} A_j A_k^* u_k \right) \end{aligned}$$

oder, vereinfacht,

$$A_j^* u_j = \omega A_j^* S_j^{-1} \left(g_j - A_j f_0 - \sum_{k=1}^{j-1} A_j A_k^* u_k \right)\ .$$

Da A_j vollen Rang hat, ist A_j^* injektiv, und man kann den Faktor A_j^* kürzen. Nachfolgende Multiplikation mit S_j ergibt

$$S_j u_j = \omega \left(g_j - A_j f_0 - \sum_{k=1}^{j-1} A_j A_k^* u_k \right)\ . \tag{1.5}$$

Mit

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix} \quad , \quad S = \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_p \end{pmatrix} \quad , \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{pmatrix} \quad , \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$$

haben wir

$$AA^* = (A_j A_k^*)_{j,k=1,\ldots,p} = L + L^* + D \ ,$$

wobei L, D aus den $q \times q$-Blöcken $A_j A_k^*$ bestehen und L die linke Hälfte, L^* die rechte Hälfte und D die Diagonale von AA^* bedeutet. (1.5) lautet damit

$$Su = \omega(g - Af_0 - Lu) \ .$$

Auflösen nach u ergibt

$$u = \omega(S + \omega L)^{-1}(g - Af_0) \ .$$

Aus (1.4) mit $j = p$ entnehmen wir

$$f^1 = f^0 + A^* u \ .$$

Erfüllt f^0 die Bedingung des Satzes, so ist $f^0 = A^* u^0$ und damit $f^1 = A^* u^1$ mit

$$u^1 = u^0 + u = u^0 + \omega(S + \omega L)^{-1}(g - AA^* u^0) \ .$$

Dies ist von der Form

$$\begin{aligned} u^1 &= C(\omega) u^0 + c(\omega) \ , \\ C(\omega) &= I - \omega(S + \omega L)^{-1} AA^* \ , \\ c(\omega) &= \omega(S + \omega L)^{-1} g \ . \end{aligned} \tag{1.6}$$

Wir zeigen nun, daß die Eigenwerte von C entweder 1 oder aber betragsmäßig < 1 sind, falls die S_j die Voraussetzung des Satzes erfüllen. Sei λ ein Eigenwert mit Eigenvektor u von $C(\omega)$, d.h.

$$(I - \omega(S + \omega L)^{-1} AA^*) u = \lambda u$$

oder, nach Multiplikation mit $S + \omega L$,

$$(S + \omega L - \omega AA^*) u = \lambda (S + \omega L) u$$

Mit $AA^* = D + L + L^*$ lautet dies

$$(S - \omega D - \omega L^*)u = \lambda(S + \omega L)u \ .$$

Wir normieren u so, daß $(u, Du) = 1$ und setzen $(Lu, u) = \alpha + i\beta, \ \ \gamma = (Su, u)$, wobei $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Skalare Multiplikation der letzten Gleichung mit u ergibt dann

$$\begin{aligned} \gamma - \omega - \omega(\alpha - i\beta) &= \lambda(\gamma + \omega(\alpha + i\beta)) \\ \lambda &= \frac{\gamma - \omega - \omega(\alpha - i\beta)}{\gamma + \omega(\alpha + i\beta)} \ . \end{aligned}$$

Wegen $AA^* \geq 0$ ist

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}((\alpha + i\beta) + (\alpha - i\beta)) \\ &= \frac{1}{2}((Lu, u) + (L^*u, u)) \\ &= \frac{1}{2}((AA^*u, u) - (Du, u)) \\ &\geq -\frac{1}{2} \ , \end{aligned}$$

und wegen $S_j \geq A_j A_j^*$ ist

$$\gamma = (Su, u) \geq (Du, u) = 1 \ .$$

Für $\alpha = -\frac{1}{2}$ ist $\lambda = 1$. Für $\alpha > -\frac{1}{2}$ ist $|\gamma - \omega - \omega\alpha| < |\gamma + \omega\alpha|$, wenn nur $0 < \omega < 2\gamma$, also erst recht für $0 < \omega < 2$. Also ist $|\lambda| < 1$ für $\alpha > -\frac{1}{2}$ und $0 < \omega < 2$. In der Tat hat also $C(\omega)$ für $0 < \omega < 1$ nur Eigenwerte 1 oder vom Betrage < 1.

Kehren wir nun zurück zu (1.6). Wir zerlegen $\mathbb{C}^n = H_0 + H_1$, wo H_0 der invariante Unterraum zu den Eigenwerten λ mit $|\lambda| < 1$ und H_1 derjenige zu $\lambda = 1$ ist. Wir zeigen, daß $H_1 \subseteq \ker(A^*)$. Ist $u_1 \in H_1$ Eigenvektor von $C(\omega)$, so ist

$$(C(\omega) - I)u_1 = -\omega(S + \omega L)^{-1} AA^* u_1 = 0$$

und damit $A^* u_1 = 0$. Ist $u_2 \in H_1$ Hauptvektor der Stufe 2 von $C(\omega)$, so gibt es einen Hauptvektor der Stufe 1, also einen Eigenvektor u_1 mit

$$(C(\omega) - I)u_2 = -\omega(S + \omega L)^{-1} AA^* u_2 = u_1 \ .$$

Anwendung von A^* ergibt

$$-\omega A^*(S+\omega L)^{-1}AA^*u_2 = 0 \ .$$

Da A^* injektiv ist, folgt $A^*u_2 = 0$. Ebenso zeigt man $A^*u = 0$ für Hauptvektoren höherer Stufe und damit $H_1 \subseteq \ker\ (A^*)$.

Der Spektralradius von $C(\omega)$ in H_0 ist < 1. Die Anteile von u^k in H_0 sind also konvergent. Wegen $H_1 \subseteq \ker\ (A^*)$ konvergieren damit die $f^k = A^*u^k$. Der Grenzwert f erfüllt natürlich alle Gleichungen $A_j f = g_j$ und liegt in range (A^*). Also ist f Lösung kleinster Norm.

$\square$

Wir wollen nun das Kaczmarz-Verfahren auf das nichtlineare Problem

$$R_j(f) = g_j \ , \qquad j = 1, \ldots, p$$

anwenden. Dabei ist R_j ein stetig differenzierbarer Operator von einem Hilbertraum F in einen Hilbertraum G. Damit ist die Fréchet-Ableitung $R'(f)$ ein linearer Operator von F nach G, und wir können seine Adjungierte bilden. Als Verallgemeinerung von (1.3) bietet sich dann an:

$$f_j = f_{j-1} + \omega R_j'(f_{j-1})^* S_j^{-1}(g_j - R_j(f_{j-1})) \ .$$

Dabei ist S_j ein linearer Operator, von dem man

$$S_j \geq R_j'(f_{j-1}) R_j'^*(f_{j-1})$$

verlangen wird. Dies werden wir im nächsten Abschnitt auf ein inverses Problem anwenden.

5.2 Das Kaczmarz-Verfahren in der Impedanz-Tomographie

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet und $\sigma \in C^1(\overline{\Omega})$ sei positiv und $\sigma = 1$ auf $\partial\Omega$. Seien f_j, $g_j \in C(\partial\Omega)$, $j = 1, \ldots, p$, gegeben. Wir betrachten die Aufgabe

$$\operatorname{div}(\sigma\nabla u) = 0 \quad \text{in } \ \Omega\,, \qquad \sigma\frac{\partial u}{\partial\nu} = f_j \quad \text{auf } \ \partial\Omega\,. \tag{2.1}$$

Dabei sei ν die äußere Normale auf $\partial\Omega$. Die Lösung u_j ist eindeutig bestimmt durch die Forderung, daß ihr Mittelwert über Ω verschwinden soll. Wir wollen σ näherungsweise aus

$$u_j = g_j \quad \text{auf } \ \partial\Omega\,, \qquad j = 1, \ldots, p$$

bestimmen.

Dazu definieren wir den nichtlinearen Operator $R_j : L_2(\Omega) \to L_2(\partial\Omega)$ durch

$$R_j(\sigma) = u_j|_{\partial\Omega}$$

und haben dann das System

$$R_j(\sigma) = g_j \ , \qquad j = 1, \ldots, p$$

zu lösen. Zunächst berechnen wir die Fréchet-Ableitung $R_j'(\sigma)$. Dazu berechnen wir für ein $h \in C_0^1(\Omega)$ den Wert $R_j(\sigma + h)$. Die zugehörige Lösung von (2.1) sei $u_j + w_j$. Es ist also

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left((\sigma + h)\nabla(u_j + w_j)\right) &= 0 \quad \text{in } \ \Omega \\ \sigma \ \frac{\partial(u_j + w_j)}{\partial\nu} &= s_j \quad \text{auf } \ \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

Vernachlässigen wir die Terme mit hw_j, so lautet dies

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma\nabla w_j) &= -\operatorname{div}(h\nabla u_j) \quad \text{in } \ \Omega\,, \\ \sigma\frac{\partial w_j}{\partial\nu} &= 0 \quad \text{auf } \ \partial\Omega\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Wieder erzwingen wir Eindeutigkeit von w_j durch die Forderung, daß der Mittelwert verschwindet. Es ist nun

$$R_j'(\sigma)h = w_j|_{\partial\Omega} \ .$$

Wir betrachten $R_j'(\sigma)$ als Operator von $L_2(\Omega)$ in $L_2(\partial\Omega)$. Dann ist $R_j'(\sigma)^* : L_2(\partial\Omega) \to L_2(\Omega)$. Zu seiner Berechnung gehen wir aus von der 2. Greenschen Formel in der Form

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (\mathrm{div}(\sigma\nabla w)z - w\ \mathrm{div}(\sigma\nabla z))dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \sigma\left(\frac{\partial w}{\partial\nu}z - w\frac{\partial z}{\partial\nu}\right) ds \ . \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sei nun z die Lösung mit Mittelwert 0 von

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\sigma\nabla z) &= 0 \quad \text{in } \Omega \ , \\ \frac{\partial z}{\partial\nu} &= -g \quad \text{auf } \partial\Omega \ . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Mit diesem z und mit $w = w_j$ lautet (2.3)

$$-\int_\Omega \mathrm{div}(h\nabla u_j)z dx = \int_{\partial\Omega} w_j g ds$$

oder, da $h_{|\partial\Omega} = 0$,

$$\int_\Omega h\nabla u_j \cdot \nabla z dx = \int_{\partial\Omega} w_j g ds \ .$$

Dies bedeutet aber

$$(h, \nabla u_j \cdot \nabla z)_{L_2(\Omega)} = \left(R_j'(\sigma)h, g\right)_{L_2(\partial\Omega)}$$

und damit

$$R_j'(\sigma)^* g = \nabla u_j \cdot \nabla z \ .$$

Das Kaczmarz-Verfahren mit $S_j = \gamma I$ lautet damit:

Für $j = 1, \ldots, p$:

1) Bereitstellung von $R_j(\sigma_{j-1})$ durch Lösen von

$$\operatorname{div}(\sigma_{j-1}\nabla u_j) = 0 \quad \text{in } \Omega\ , \quad \frac{\partial u_j}{\partial \nu} = f_j \quad \text{auf } \partial\Omega\ .$$

Es ist dann $R_j(\sigma_{j-1}) = u_j|_{\partial\Omega}$.

2) Anwendung des Adjungierten auf $R_j(\sigma_{j-1}) - g_j$ durch Lösen von

$$\operatorname{div}(\sigma_{j-1}\nabla z_j) = 0 \quad \text{in } \Omega\ , \quad \frac{\partial z_j}{\partial \nu} = u_j - g_j \quad \text{auf } \partial\Omega\ .$$

3) Update

$$\sigma_j = \sigma_{j-1} + \frac{w}{\gamma}\nabla u_j \cdot \nabla z_j\ .$$

5.3 Layer - Stripping

Sei f die bei einem inversen Problem gesuchte Funktion. Mit *Layer - Stripping* bezeichnet man ein Verfahren, bei dem f zunächst in der Nähe des Randes von supp (f) rekonstruiert wird. Sind die randnahen Teile von f bekannt, rekonstruiert man eine etwas weiter im Innern von supp (f) gelegene Schicht. So fährt man fort, bis das ganze f rekonstruiert ist.

Wir geben drei Beispiele.

1. Radon - Transformation

Sei supp $(f) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < \rho\}$, und sei $g = Rf$ die Radon-Transformation, vgl. 4.1. Wir machen Gebrauch von der Cormackschen Inversionsformel aus Aufgabe 30. Sei

$$\begin{aligned} g(\theta, s) &= \sum_\ell g_\ell(s) e^{i\ell\varphi} \;, \quad \theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \\ f(r\theta) &= \sum_\ell f_\ell(r) e^{i\ell\varphi} \;. \end{aligned}$$

Satz 5.3.1 *Für $\ell \in \mathbb{R}$ gilt*

$$f_\ell(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty (s^2 - r^2)^{-1/2} T_{|\ell|}(\frac{s}{r}) g_\ell'(s) ds \;. \tag{3.1}$$

Da hier nur über $s \geq r$ integriert wird, kann man $f(x)$ für $|x| \geq r$ aus $g(\theta, s)$ für $s \geq r$ berechnen. Dies ist also ein besonders einfacher Fall von *Layer-Stripping*. Die randnahen Teile von f werden zur Bestimmung der tiefergelegenen Schichten gar nicht benötigt. Wir können hier aber eine mögliche Gefahr des *Layer - Stripping* erkennen, nämlich Instabilität. Es gilt nämlich für $u \geq 1$ und $\ell \geq 0$

$$\begin{aligned} T_\ell(u) &= \cosh(\ell \arccos u) \geq \frac{1}{2} e^{\ell \operatorname{arccosh} u} \\ &\geq \frac{1}{2}(u + \sqrt{u^2 - 1})^\ell \;, \end{aligned}$$

so daß also $T_\ell(u)$ für $u > 1$ mit $\ell \to \infty$ sehr schnell anwächst. Dies zeigt, daß die Auswertung von (3.1) hochgradig instabil ist.

2. Impedanz - Tomographie

Wir betrachten wieder - wie schon in 5.1 und 1.1 - das Problem, die Funktion σ aus

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma\nabla u) &= 0 \qquad \text{in } \Omega \\ \sigma\frac{\partial u}{\partial\nu} &= f\,, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.2}$$

bei Kenntnis "vieler" Paare f, g zu bestimmen. Wir nehmen jetzt $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$. "Viele" Paare bedeutet, daß die Neumann-zu-Dirichlet - Abbildung $S : L_2(\partial\Omega) \to L_2(\partial\Omega)$, $g = Sf$ bestimmt ist. Dies ist z.B. der Fall, wenn die $g_n = Sf_n$ für ein vollständiges Orthonormalsystem $\{f_n\}$ bekannt sind, etwa $f_n(\theta) = e^{in\varphi}$ für $\theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Beim *Layer - Stripping* wird (3.2) in eine Schar von Aufgaben in den Gebieten $|x| < \rho$, $0 < \rho \le 1$ eingebettet:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma\nabla u_\rho) &= 0 \qquad \text{in } |x| < \rho \\ \sigma\frac{\partial u_\rho}{\partial\nu} &= f\,, \quad u_\rho = g \;\; \text{auf } |x| = \rho\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Hier ist ν (wie oben) die äußere Normale. In Polarkoordinaten (r, φ) ist also $\partial/\partial\nu = \partial/\partial r$. Wir betrachten jetzt die Funktionen f, g als Funktionen auf S^1. Die Neuman-zu-Dirichlet - Abbildung $S(\rho)$ wird dann zu einer Abbildung in $L_2(S^1)$.

Das Hilfsmittel zum *Layer - Stripping* ist eine Differentialgleichung für $S(\rho)$. Wir leiten sie her, ohne auf mathematische Exaktheit zu achten.

Satz 5.3.2 *Der Operator $S'(\rho) = \lim_{h\to 0}(S(\rho+h) - S(\rho))/h$ erfüllt die Riccati - Differentialgleichung*

$$S'(\rho) = \frac{1}{\sigma_\rho}I + \frac{1}{\rho}S(\rho) + \frac{1}{\rho^2}S(\rho)\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sigma_\rho\frac{\partial}{\partial\varphi}S(\rho)\right)\ .$$

Dabei ist $\sigma_\rho(\theta) = \sigma(\rho\theta)$, $\theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ *und* I *die Identität auf* S^1.

Beweis: Es ist

$$(S(\rho)f)(\theta) = u_\rho(\rho\theta)$$

mit der Lösung u_ρ von (3.3). Wir berechnen zunächst die Ableitung $u'_\rho(x) = \frac{\partial}{\partial\rho}u_\rho(x)$. Sei $0 < \rho_2 < \rho_1$. Dann ist

$$\operatorname{div}(\sigma\nabla(u_{\rho_1} - u_{\rho_2})) = 0 \quad \text{in} \ |x| < \rho_2 \ ,$$

und für $|x| = \rho_2$ ist bis auf $\mathrm{O}\left((\rho_2 - \rho_1)^2\right)$

$$\begin{aligned}
\left(\sigma\frac{\partial(u_{\rho_1} - u_{\rho_2})}{\partial\nu}\right)(\rho_2\theta) &= \left(\sigma\frac{\partial u_{\rho_1}}{\partial r}\right)(\rho_2\theta) - f(\theta) \\
&= \left(\sigma\frac{\partial u_{\rho_1}}{\partial r}\right)(\rho_1\theta) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma\frac{\partial u_{\rho_1}}{\partial r}\right)(\rho_2\theta)(\rho_2 - \rho_1) - f(\theta) \\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma\frac{\partial u_{\rho_1}}{\partial r}\right)(\rho_2\theta)(\rho_2 - \rho_1) \ ,
\end{aligned}$$

weil u_{ρ_1} wie u_{ρ_2} die Randbedingung aus (3.3) erfüllt. Für $\rho_2 \to \rho_1 = \rho$ folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\sigma\nabla u'_\rho) &= 0 \qquad \text{in} \ |x| < \rho \ , \\
\sigma\frac{\partial u'_\rho}{\partial\nu} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma\frac{\partial u_\rho}{\partial r}\right) \quad \text{auf} \ |x| = \rho \ .
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Die Differentialgleichung in (3.3) lautet in Polarkoordinaten

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\sigma}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\sigma\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) = 0 \ .$$

Damit gilt auf $|x| = \rho$

$$\begin{aligned}
\sigma\frac{\partial u'_\rho}{\partial\nu} &= \frac{\sigma_\rho}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial r} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sigma_\rho\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}\right) \\
&= \frac{1}{\rho}f + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sigma_\rho\frac{\partial}{\partial\varphi}S(\rho)f\right) \ .
\end{aligned}$$

(3.4) bedeutet nun nichts anderes als

$$u'_\rho = \frac{1}{\rho}S(\rho)f + \frac{1}{\rho^2}S(\rho)\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sigma_\rho\frac{\partial}{\partial\varphi}S(\rho)f\right) . \tag{3.5}$$

Aus

$$(S(\rho)f)(\theta) = u_\rho(\rho\theta)$$

bekommen wir durch Differentiation

$$\begin{aligned}(S'(\rho)f)(\theta) &= \frac{d}{d\rho}u_\rho(\rho\theta)\\ &= u'_\rho(\rho\theta) + \frac{\partial u_\rho}{\partial r}(\rho\theta)\\ &= u'_\rho(\rho\theta) + \frac{1}{\sigma_\rho}f(\theta) .\end{aligned}$$

Zusammen mit (3.5) ist dies die behauptete Differentialgleichung.

□

Wir illustrieren Satz 2 an dem Beispiel $\sigma = 1$. Für $f(\theta) = e^{in\varphi}$, $\theta = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$ kann man (3.3) leicht lösen, und zwar ist für $x = r\theta$

$$u_\rho(x) = \frac{\rho}{n}(\frac{r}{\rho})^n e^{in\varphi} , \qquad n \neq 0 .$$

Für $r = \rho$ erhalten wir

$$S(\rho)e^{in\varphi} = \frac{\rho}{n}e^{in\varphi} .$$

Man berechnet sofort

$$\frac{1}{\rho^2}S(\rho)\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sigma_\rho\frac{\partial}{\partial\varphi}S(\rho)\right)e^{in\varphi} = -e^{in\varphi} ,$$

und die behauptete Differentialgleichung für S ist offenbar erfüllt.

Der Layer - Stripping - Algorithmus arbeitet nun wie folgt. Wir schreiben $F(\rho, S)$ für die rechte Seite der Differentialgleichung aus Satz 2, also

$$F(\rho, S) = \frac{1}{\sigma_\rho}I + \frac{1}{\rho}S + \frac{1}{\rho^2}S\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sigma_\rho\frac{\partial}{\partial\varphi}S\right) ,$$

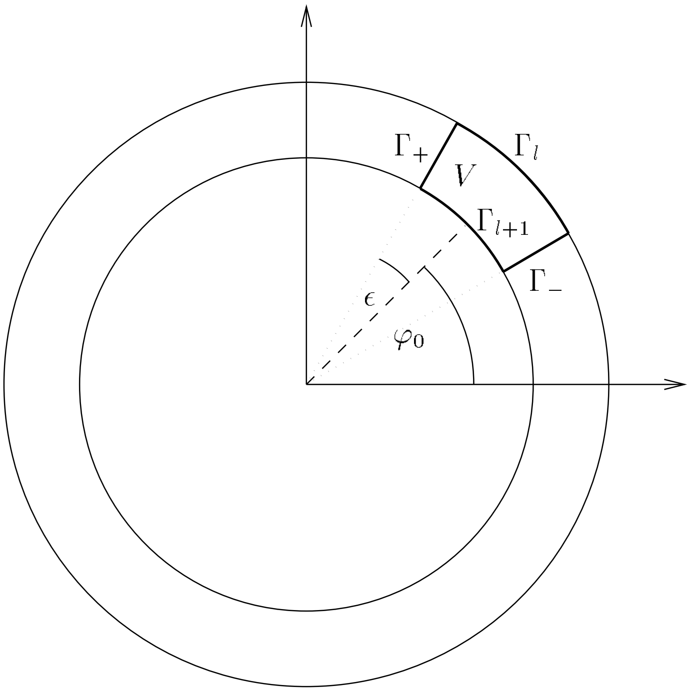


Abbildung 5.1: Skizze zur Bestimmung von σ_{l+1} aus σ_l

so daß die Differentialgleichung einfach

$$S' = F(\rho, S)$$

lautet. $S(1)$ ist bekannt. Wir setzen $\rho_\ell = 1 - h\ell$, $\ell = 0, \ldots, p-1$, $h = \frac{1}{p}$, und ersetzen die Differentialgleichung durch das Euler - Verfahren

$$\begin{aligned} S_{\ell+1} &= S_\ell - hF(\rho_\ell, S_\ell)\ , \qquad \ell = 0, 1, \ldots, p-1\ , \\ S_0 &= S(1)\ . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Wir benötigen noch eine Formel zur Berechnung von $\sigma_\ell(\theta) = \sigma(\rho_\ell \theta)$. Seien σ_ℓ, S_ℓ bekannt. Dann können wir zunächst $S_{\ell+1}$ nach (3.6) berechnen und danach $\sigma_{\ell+1}$ in folgender Weise. Sei $V = \{(r, \varphi) : \rho_{\ell-1} < r < \rho_\ell, |\varphi - \varphi_0| < \varepsilon\}$ mit beliebigem φ_0, vgl. Abb. 5.1. Sei $g \in L_2(S^1)$ beliebig. Sei $u_\ell = u_{\rho_\ell}$ die

Lösung von (3.3) mit $u_\ell(\rho_\ell\theta) = g(\theta)$, also $f = S_\ell^{-1}g = \sigma_\ell \partial u_\ell/\partial r$. Dann ist nach dem Gaußschen Integralsatz

$$\int\limits_{\partial V} \sigma \frac{\partial u_\ell}{\partial \nu} ds = 0 \ . \tag{3.7}$$

Auf $|x| = \rho_{\ell+1}$ ist bis auf Terme der Ordnung h^2

$$\begin{aligned} u_\ell(\rho_{\ell+1}\theta) &= u_\ell(\rho_\ell\theta) - h\frac{\partial u_\ell}{\partial r}(\rho_\ell\theta) \\ &= g(\theta) - \frac{h}{\sigma_\ell(\theta)} f(\theta) \ . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Damit ist auf $|x| = \rho_{\ell+1}$, ebenfalls bis auf $\mathrm{O}(h^2)$

$$\sigma_{\ell+1}\frac{\partial u_\ell}{\partial \nu} = S_{\ell+1}^{-1}(g - \frac{h}{\sigma_\ell} f) \ . \tag{3.9}$$

Sei nun Γ_ℓ der Teil von ∂V mit $|x| = \rho_\ell$, $\Gamma_\pm$ derjenige mit $\varphi = \varphi_0 \pm \varepsilon$. Da auf $\Gamma_\pm$ $\partial/\partial\nu = \pm\frac{1}{r}\partial/\partial\varphi$ gilt, lautet (3.7) wegen (3.9)

$$\int\limits_{\Gamma_\ell} f ds - \int\limits_{\Gamma_{\ell+1}} S_{\ell+1}^{-1}(g - \frac{h}{\sigma_\ell} f) ds + \int\limits_{\Gamma_-} \frac{\sigma}{r}\frac{\partial u_\ell}{\partial \varphi} ds - \int\limits_{\Gamma_+} \frac{\sigma}{r}\frac{\partial u_\ell}{\partial \varphi} ds = 0 \ .$$

Die Integrale über $\Gamma_\pm$ approximieren wir durch die Trapezregel und benutzen (3.9). Das ergibt schließlich

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Gamma_\ell} f ds - \int\limits_{\Gamma_{\ell+1}} S_{\ell+1}^{-1}(g - \frac{h}{\sigma_\ell} f) ds + \frac{h}{2}\frac{\sigma_\ell}{\rho_\ell}\left(g'(\varphi_0 - \varepsilon) - g'(\varphi_0 + \varepsilon)\right) \\ &= \frac{h}{2}\frac{\sigma_{\ell+1}}{\rho_{\ell+1}}\left((g - \frac{h}{\sigma_\ell} f)'(\varphi_0 + \varepsilon) - (g - \frac{h}{\sigma_\ell} f)'(\varphi_0 - \varepsilon)\right) \ . \end{aligned}$$

Wendet man dies auf geeignete Funktionen g an, kann man $\sigma_{\ell+1}$ bestimmen.

Literaturverzeichnis

Kirsch, A.: An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. Springer 1996.

Colton, D. - Kress, R.: Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. Springer 1992.

Louis, A.K.: Inverse und schlecht gestellte Probleme. Teubner 1989.

Ramm, A.R.: Multidimensional Inverse Scattering Problems. Longman 1992.

Chadan, K. - Sabatier, P.C.: Inverse Problems in Quantum Scattering Theory. Second Edition, Springer 1989.

Romanov, V.G.: Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations. Springer 1974.

Lavrentev, M.M. - Romanov, V.G. - Shishatskii, S.P.: Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. AMS 1986.

Bui, H.D.: Inverse Problems in the Mechanics of Materials: An Introduction. CRC Press 1994.

Romanov, V.G. - Kabanikhin, S.I.: Inverse Problems for Maxwell's Equation. VSP 1994.

Levitan, B.M.: Inverse Sturm-Liouville Problems. VNU 1987.

Marchenko, V.A.: Sturm-Liouville Operators and Applications. Birkhäuser 1986.

Newton, R.G.: Scattering Theory of Waves and Particles. Second Edition, Springer 1982.

Isakov, V.: Inverse Source Problems. AMS 1990.

Romanov, V.G.: Inverse Problems of Mathematical Physics. VNU 1987.

Lavrentiev, M.M.: Some Improperly Posed Problems of Mathematical Physics. Springer 1967.

Lax, P.D. - Phillips, R.S.: Scattering Theory. Academic Press 1967.

Gladwell, G.M.L.: Inverse Problems in Scattering. Kluwer 1993.