Prof. Dr. C. W. Cryer WS 98/99

Mathematische Modellierung des Herz-Kreislauf-Systems

Übungsblatt 9 , Abgabe: 11.1.99 , 13.00 Uhr

Aufgabe 28: (3 Punkte)
Benutzen Sie das Programm von Herrn Gründing, um die Form der Aortenklappen und deren fraktalen Dimension zu berechnen.

Aufgabe 29: (2 Punkte)
Sei $\mathbf{t}(u,v) \in \mathbb{R}^3$ eine glatte Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial v} = \mathbf{t} \times \frac{\partial^2 t}{\partial u^2},\ v > 0,\ -u_0 \leq u \leq u_0$$
$$\frac{\partial t}{\partial u}(\pm u_0, v) = 0,$$

mit $||\mathbf{t}(u,0)||_2 = 1$.

Zeigen Sie, daß $\mathbf{t}(u,v)$ ein Einheitsvektor ist.

Aufgabe 30: (5 Punkte)
Zur Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial v} = \mathbf{t} \times \frac{\partial^2 \mathbf{t}}{\partial u^2},\ -u_0 \leq u \leq u_0$$
$$\mathbf{t}(u,v) \in \mathbb{R}^3,$$
$$\mathbf{t}(u,o) = \mathbf{f}(u),\ -u_0 \leq u \leq u_0$$
$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial v}(\pm u_0, v) = 0,\ v > 0$$

wird folgendes Verfahren (Buttke) eingesetzt:

$$\mathbf{t}_j^{n+1} - \mathbf{t}_j^n = \lambda(\mathbf{t}_j^{n+1} + \mathbf{t}_j^n) \times (\mathbf{t}_{j+1}^{n+1} + \mathbf{t}_{j-1}^{n+1} + \mathbf{t}_{j+1}^n + \mathbf{t}_{j-1}^n) \quad (1)$$

für $1 \leq j \leq j_{max}$,
mit

$$\lambda := \frac{\Delta v}{4(\Delta u)^2},\ 0 \leq n \leq n_{max}$$

$$\mathbf{t}_j^n := \mathbf{t}^h(j\Delta u, n\Delta v)$$

(wo $\mathbf{t}^h(u,v)$ die Approximation zu $\mathbf{t}(u,v)$ ist),

$$\mathbf{t}_0^n := \mathbf{t}_1^n,$$

$$\mathbf{t}_{j_{max}+1}^n := \mathbf{t}_{j_{max}}^n$$

In jedem Zeitschritt $n+1$ wird die Gleichung (1) iterativ gelöst:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x}_j^0 := \mathbf{t}_j^n,\ 0 \le j \le j_{max} \\
&\mathbf{x}_j^{k+1} := \frac{\mathbf{y}_j^{k+1}}{||y_j^{k+1}||_2},\ 0 \le j \le j_{max},\ k \ge 0 \\
&\mathbf{y}_j^{k+1} - \mathbf{t}_j^n := \lambda(\mathbf{x}_j^k + \mathbf{t}_j^n) \times (\mathbf{x}_{j+1}^k + \mathbf{x}_{j-1}^k + \mathbf{t}_{j+1}^n + \mathbf{t}_{j-1}^n),\ 1 \le j \le j_{max} \\
&\mathbf{y}_0^{k+1} := y_1^{k+1}, \\
&\mathbf{y}_{j_{max}+1}^{k+1} := y_{j_{max}}^{k+1}.
\end{aligned}
$$

Beweisen Sie:
<u>Satz:</u> Sei $\lambda < \frac{1}{1b}$. Dann existiert $q \in [0,1)$ mit $\max\limits_j |\mathbf{x}_j^{k+1} - x_j^k| \le q \max\limits_j |\mathbf{x}_j^k - \mathbf{x}_j^{k-1}|, \forall k$