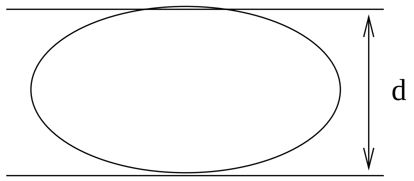
Prof. Dr. C. W. Cryer WS 98/99

Mathematische Modellierung des Herz-Kreislauf-Systems

Übungsblatt 7 , Abgabe: 14.12.98 , 13.00 Uhr

Aufgabe 23: (6 Punkte)
Für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei

$$h(\Omega) := \inf\{d \geq 0 : \exists y_1 \in \mathbb{R} \text{ so daß } y_1 \leq y \leq y_1 + d \text{ für alle } (x,y) \in \Omega\}.$$

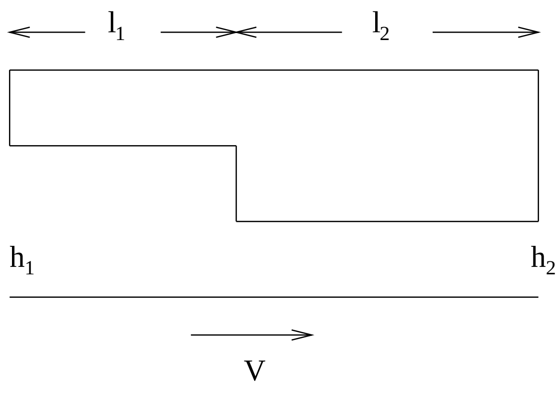


Für $A_0 > 0$ und $L_0 \geq \sqrt{4\pi A_0}$, sei $\mathcal{U}(A_0, L_0)$ die Menge aller Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit stetigem Rand $(x(s), y(s))$, Oberfläche A_0 und Randlänge L_0.

a) Zeigen Sie, daß
$$h_0(A_0, L_0) := \inf_{\Omega \in \mathcal{U}(A_0,L_0)} \{h(\Omega)\} > 0.$$

b) Bestimmen Sie $h_0(A_0, L_0)$ und ein Gebiet $\Omega \in \mathcal{U}(A_0, L_0)$ mit $h(\Omega) = h_0(A_0, L_0)$.
[Schwierig, wird besprochen!]

Aufgabe 24: (2 Punkte)
Ein 'Rayleigh-Lager' ist ein Lager mit zwei Stufen von Höhen h_1 bzw. h_2.



In jedem Teil gilt:

$$h^3 \frac{dp}{dx} = 6\mu V h - 12\mu q$$

mit

$$\begin{aligned} h &:= \text{Höhe} \\ V &:= \text{Geschwindigkeit der unteren Platte} \\ q &:= \text{Fluß} \\ \mu &:= \text{Viskosität} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie den Druck p und zeigen Sie, daß die Last durch

$$\int_0^{l_1+l_2} p\, dx = \frac{1}{2} \frac{(l_1 + l_2) \cdot 6\mu V \cdot (h_1 - h_2)}{(h_1^3/l_1) + (h_2^3/l_2)}$$

gegeben ist.

Aufgabe 25: (2 Punkte)
Seien u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten bzgl. zylindrischer Koordinaten (r, θ, z).

a) Zeigen Sie, daß die Kontinuitätsgleichung folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

b) Zeigen Sie, daß für eine axisymmetrische Strömung, es eine Funktion ψ gibt mit

$$w = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}, \; u = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}$$