Mathematische Modellierung des Herz-Kreislauf-Systems

Übungsblatt 6 , Abgabe: 7.12.98 , 13.00 Uhr

Aufgabe 20: (2 Punkte)
Man betrachte das Problem

$$i\omega u_1(r) = +\tfrac{i\omega}{\rho c} p_1 + \nu \left(\tfrac{d^2 u_1}{dr^2} + \tfrac{1}{r}\tfrac{du_1}{dr} \right), \ 0 < r < a \qquad (1)$$

mit $i = \sqrt{-1}$ und a, ω, ρ, p_1 und ν positive Konstanten. Man zeigt, daß die allgemeine Lösung von (1), die die Bedingung

$$\frac{du_1}{dr} = 0, \qquad r = 0$$

erfüllt, folgende Gestalt hat:

$$u_1(r) = \frac{p_1}{\rho c}\left[1 + A\frac{J_0(i^{3/2}\alpha r/a)}{J_0(i^{3/2}\alpha)}\right]$$

mit

$$\alpha := a(\frac{\omega}{\nu})^{1/2}$$

und A eine beliebige Konstante.

Aufgabe 21: (6 Punkte)
Für eine isotropische inkompressible elastische Wand ohne Verbindungen, nehmen die Parameter in der Theorie von Womersley folgende Werte an:

$$\begin{array}{lcl} \sigma &=& 1/2, \\ S &=& T = K_1' = K_2' = 0, \\ B_{11} &=& B_{22} := B \\ B_{12}' &=& B_{21}' = \sigma B \\ c_0^2 &=& B(1-\sigma^2)/2\rho a \end{array}$$

Die Gleichung für k' ist:

$$(1-\sigma^2)F - [4 + F(1-4\sigma)](k')^2 + 4(1-F)(k')^4 = 0$$

mit

$$F = F(\alpha) = \frac{2J_1(i^{3/2}\alpha)}{i^{3/2}\alpha J_0(i^{3/2}\alpha)}$$

a) Zeigen Sie, daß für $\alpha \to \infty$, die zwei Lösungen approximativ durch

$$\begin{array}{lcl} (k')^2 &\doteq& 1 + \frac{9}{8\alpha i^{1/2}} \\ (k')^2 &\doteq& \frac{3}{8\alpha i^{1/2}}\left[1 + \frac{1}{2\alpha}(1 + \frac{7}{4i^{1/2}})\right] \end{array}$$

gegeben sind.

b) Zeigen Sie, daß für $k' = 1$,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \tfrac{1}{2} a p_1 / \rho\, c_0^2, \\ (\omega / c_0) \xi_1 &= i \eta_1 / 2a \end{aligned}$$

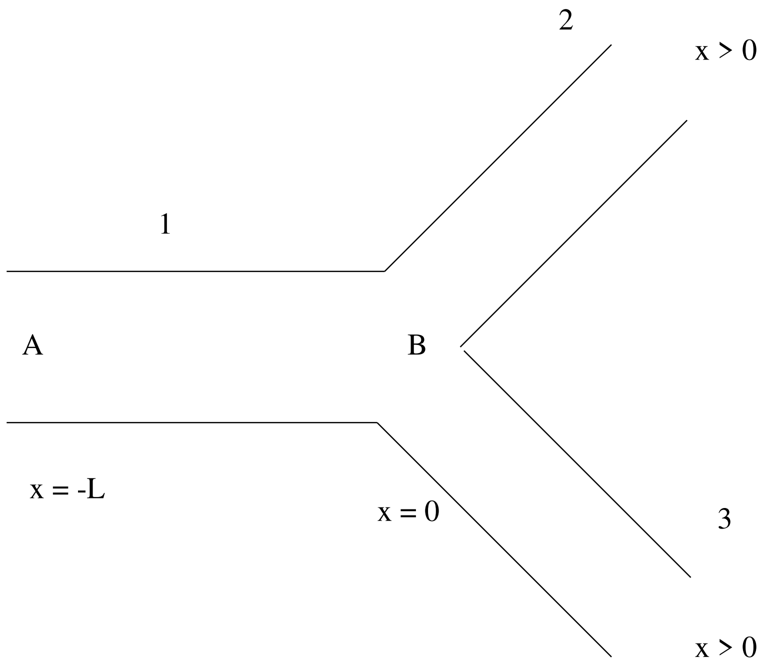
c) Zeigen Sie, daß für $k' = (\frac{3}{8\alpha})^{1/2} e^{-i\pi/8}$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{3}{16 \alpha i^{1/2}} \frac{a p_1}{\rho\, c_0^2} \\ \frac{\omega}{c_0} \xi_1 &= (\frac{2\alpha}{3})^{1/2} \frac{i^{5/4}}{a} \eta_1 \end{aligned}$$

d) Interpretieren Sie diese Ergebnisse als Druckwellen bzw. Scherwellen. Wie unterscheiden sich die Geschwindigkeiten?

e) Für $\alpha = 13$ (Aorta eines Hundes), welche Dämpfung wird vorausgesagt?

Aufgabe 22: (2 Punkte)
Man betrachtet das System



Es gilt in jedem Teil; $1 \leq k \leq 3$

$$p_k = h_k e^{i\omega(t - x/c_k)} + g_k e^{i\omega(t + x/c_k)}$$

$$J_k = Y_k \left[h_k e^{i\omega(t - x/c_k)} - g_k e^{i\omega(t + x/c_k)} \right]$$

mit gegebenen Konstanten Y_k, c_k.

Zeigen Sie, daß aus Erhaltung des Flusses und Stetigkeit des Druckes es folgt:

$$\begin{aligned} Y_1^{eff} &:= \left.\tfrac{J_1}{p_1}\right]_{x=-L} \\ &= Y_1 \left(\tfrac{H-G}{H+G}\right) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} H &:= (Y_1 + Y_2 + Y_3) e^{i\omega L/c_1} \\ G &:= (Y_1 - Y_2 - Y_3) e^{-i\omega L/c_1} \end{aligned}$$