Mathematische Modellierung des Herz-Kreislauf-Systems

Übungsblatt 5 , Abgabe: 30.11.98 , 13.00 Uhr

Aufgabe 16: (Punkte)
Benutzen Sie das Programm von Herrn te Uhle, um die Lösung des Problems von Anliker, Rockwell und Oden mit folgenden Parametern zu lösen:

Der Druck p und die Geschwindigkeit v sollten für $z = 0$ und $z = 60\ cm$ grafisch dargestellt werden.

Aufgabe 17: (Punkte)
Man betrachte das p-**System**:

$$\mathbf{u}_t + F(\mathbf{u})_x = 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -v \\ p(w) \end{pmatrix}$$

wo die Funktion ρ gegeben ist, $\rho' < 0$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_1(\mathbf{u})$, $\lambda_2(\mathbf{u})$ von ∇F.

b) Ist (1) streng hyperbolisch?

c) Berechnen Sie die rechten Eigenvektoren $\mathbf{r}_1(\mathbf{u})$ und $\mathbf{r}_2(\mathbf{u})$ von $\nabla \mathbf{F}$ zu λ_1, λ_2.

d) Sei

$$\begin{array}{rcl} \Phi(s) & := & \int\limits_0^s \sqrt{-p'(\xi)} d\xi, \\ \rho_1(\mathbf{u}) & := & v - \Phi(w) \\ \rho_2(\mathbf{u}) & := & v + \Phi(w). \end{array}$$

Sei

$$\mathbf{u}(x,t) = \begin{pmatrix} v(x,t) \\ w(x,t) \end{pmatrix}$$

eine Lösung von (1). Zeigen Sie, daß die Riemansche Invariante $\rho_k(\mathbf{u}(x,t))$ entlang der Kurve $C_k, (\hat{x}(t), t)$,

$$C_k : \frac{d\hat{x}}{dt} = -\lambda_k(\mathbf{u}\begin{pmatrix} \hat{x}(t) \\ t \end{pmatrix}),$$

konstant ist.

Aufgabe 18: (Punkte)
Man betrachte das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l} A_t + (uA)_x = 0 \\ u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}p_x = 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$p = P(A) = \frac{1}{2}\rho\, c_0^2 A^2/A_0^2 + P_0,$$

mit Konstanten ρ, c_0, A_0 und P_0.
Sei

$$U(t) := \begin{cases} U_0(1-(1-t/t_0)^2), 0 \leq t \leq 2t_0 \\ 0, t > t_0 \end{cases}$$

Sei (A, u) eine Lösung von (2) mit den Anfangsdaten:

$$\begin{array}{ll} (A(x,o), u(x,0)) = (A_0, 0), & x \geq 0 \\ (A(o,t), u(o,t)) = (A_0, U(t)), & t > 0. \end{array}$$

Zeigen Sie, daß ein Schock sich zuerst bei $t_s = c_0 t_0/4U_0$ bildet und das der entsprechende Abstand $x_s = c_0^2 t_0/4U_0$ ist.

Aufgabe 19: (Punkte)
Für das System

$$\begin{array}{l} A_t + (uA)_x = 0, \\ u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}p_x = 0, \\ p = P(A), \end{array}$$

bestimmen Sie:

a) Die Rankine-Hugoniot Bedingungen

b) Die Lax Entropie Bedingungen.