Prof. Dr. C. W. Cryer WS 98/99

Mathematische Modellierung des Herz-Kreislauf-Systems

Übungsblatt 4 , Abgabe: 16.11.98 , 13.00 Uhr

Aufgabe 12: (4 Punkte)
Ein isotropischer homogener Ball, mit Lame' Konstanten λ, μ, inneren Radius r_1 und äußeren Radius r_0 wird mit einer Flüssigkeit gefüllt. Wenn der innere Druck p_1 und der äußere Druck p_0 sei, bestimmen Sie alle Wandspannungen mit Hilfe der Navier Gleichungen für kugelsymmetrische Deformationen:

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial e}{\partial r} - \frac{2\mu}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\omega_\phi \sin\theta) + \frac{2\mu}{r\sin\theta}\frac{\partial \omega_\phi}{\partial\phi} + \rho b_r = \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{(\lambda+2\mu)}{r}\frac{\partial e}{\partial\theta} - \frac{2\mu}{r\sin\theta}\frac{\partial \omega_r}{\partial\phi} + \frac{2\mu}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\phi \sin\theta) + \rho b_\theta = \rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}$$

$$\frac{(\lambda+2\mu)}{r\sin\theta}\frac{\partial e}{\partial\phi} - \frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\theta) + \frac{2\mu}{r}\frac{\partial \omega_r}{\partial\theta} + \rho b_\phi = \rho\frac{\partial^2 u_\phi}{\partial t^2}.$$

mit

$$e = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r u_\theta \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\phi}(r u_\phi)\right]$$

und

$$\begin{aligned}
\omega_r &= -\Omega_{\theta\phi} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\phi\sin\theta) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\phi}\right]\\
\omega_\theta &= -\Omega_{\phi r} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r u_\phi)}{\partial r}\right]\\
\omega_\phi &= -\Omega_{r\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right]
\end{aligned}$$

Aufgabe 13: (4 Punkte)
Ein isotropischer homogener Ball, mit Lame' Konstanten λ, μ, inneren Radius r_1 und äußeren Radius r_0 wird mit einer Flüssigkeit gefüllt. Wenn der innere Druck p_1 und der äußere Druck p_0 sei, bestimmen Sie die Durchschnittswandspannungen $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi}$ dadurch, daß Sie eine Kräftebilanz aufstellen (Gesetz von Laplace). Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie die Wandspannungen aus Aufgabe 1 integrieren und so deren Durchschnittswerte bestimmen.

Aufgabe 14: (2 Punkte)
In einem Punkt in einem elastischen Körper ist der Cauchysche Spannungstensor (in karterischen Koordinaten)

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Spannungen

a) auf der Ebene, die normal zu der x-Achse ist.

b) auf der Ebene $2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$.

Aufgabe 15: (4 Punkte)
Die Navier Gleichungen für Deformationen sind:

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot bfu) + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \rho\mathbf{b} = 0$$

a) Schreiben Sie diese Gleichungen explizit aus, für kartesische Koordinaten x, y, z.

b) Überprüfen Sie, daß für kartesische Koordinaten:

$$\nabla^2\mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

c) Bestimmen Sie die Navier Gleichungen für ebene Deformationen u_r, u_θ bezüglich Polarkoordinaten r, θ mit Hilfe der Formeln:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= u_r\mathbf{e}_r + u_\theta\mathbf{e}_\theta + u_z\mathbf{e}_z \\
\nabla \cdot \mathbf{u} &= \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \tfrac{\partial u_z}{\partial z} \\
\nabla f &= \tfrac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \tfrac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z \\
\nabla \times \mathbf{u} &= \left(\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial u_z}{\partial \theta} - \tfrac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \\
&+ \left(\tfrac{\partial u_r}{\partial z} - \tfrac{\partial u_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta + \\
&+ \left(\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial r}(ru_\theta) - \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{e}_z
\end{aligned}$$