Prof. Dr. C. W. Cryer WS 98/99

Mathematische Modellierung des Herz-Kreislauf-Systems

Übungsblatt 1 , Abgabe: 26.10.98 , 13.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Das Ohmsche Gesetz

$$Q = \frac{\Delta P}{R}$$

bestimmt das Verhältnis zwischen dem Fluß Q, dem Widerstand R und dem Druckunterschied ΔP.

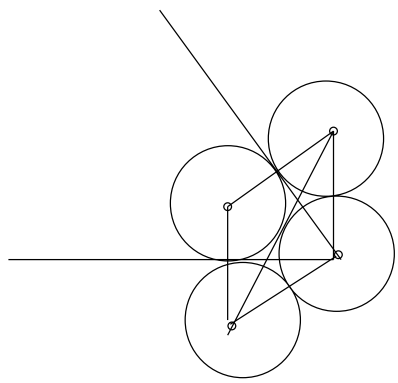
Für ein System mit n Komponenten R_i, zeigen Sie:

a) $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$ (Serienschaltung)

b) $\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$ (Parallelschaltung)

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Man betrachte folgende Packung von $\mathbb{R}^2$ mit Kreisen:



und zeigt, daß die Dichte ρ der Packung,

$$\rho := \frac{\text{Durchschnittsoberfläche gedeckt durch Kreise}}{\text{Gesamtoberfläche}}$$

durch $\rho = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$ gegeben ist (Lagrange 1773).

Literatur: Rogers, C.A.: Packing and Covering. Cambridge, 1964

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Der normale menschliche Erythrocyte (rote Blutzelle) hat folgende Dimensionen:

Diameter:	$8,3\mu m$
Dicke:	$2,4\mu m$
Volumen:	$84\mu m^3$

Der Anteil der Erythrocyten am Blutvolumen wird **Hämatokrit** genannt.

a) Zeigen Sie, mit Hilfe der Aufgabe 2, daß der Hämatokritwert maximal etwa 58% sein kann. (Bei normalen Männern beträgt der Hämatokritwert etwa 44%, bei Frauen etwa 39%.)

b) Bei einem kranken Menschen kann der Wert 70% erreichen - wie kann man dies erklären?

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Eine newtonische Flüssigkeit (Blut?) fließt stetig durch ein langes Rohr mit dem Querschnitt $Q \in \mathbb{R}^2$. Die Navier-Stokes Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + wu_z &= -\tfrac{1}{\rho}p_x + \nu\nabla^2 u \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z &= -\tfrac{1}{\rho}p_y + \nu\nabla^2 v \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z &= -\tfrac{1}{\rho}p_z + \nu\nabla^2 w \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \rho_t$$

Man nimmt an:

1. Rohr $= \{(x,y,z) : (x,y) \in Q,\ z \in \mathbb{R}\}$
2. $u = v = 0$ (keine Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur z-Achse des Rohres)
3. konstante Dichte ρ
4. $w = 0$ für $(x,y) \in \partial Q$ (die Flüssigkeit haftet am Rande des Rohres).
5. Quadratische Terme, etwa wu_x, sind vernachlassbar klein.

   Man zeigt, Hagen-Poiseuillesche Gesetz (Poiseuille Strömung):
   a) $p(x,y,z) = p_0 - Pz, p_0$ und P konstant
   b) $w(x,y,z) = \psi_(x,y) - \frac{P}{4\mu}(x^2+y^2)$

   mit

$$\begin{aligned} \nabla^2\psi &= 0 \text{ in } Q \\ \psi &= \tfrac{P}{4\mu}(x^2+y^2), (x,y) \in \partial Q \end{aligned}$$

c) Ist Q ein Kreis mit Radius c, so gilt:

i) $w = \frac{2Pc^2}{8\mu}(1 - \frac{r^2}{c^2}),\ r^2 := x^2 + y^2$

ii) $R = \frac{\pi c^4}{8\mu}P,$ wo R das Durchflußvolumen pro Zeiteinheit bezeichnet.