Prof. Dr. C. W. Cryer WS 95/96

Mathematik des Herz-Kreislaufsystems

Übungsblatt 8 , Abgabe: 18.12.95 , 13.00 Uhr

Aufgabe 19:

Betrachten Sie Aufgabe 17 für den nichtstationären Fall, d. h. die nichtverschwindende erste Komponente von u hängt außer von x_2 und x_3 noch von t ab.

1. Vereinfachen Sie die Navier-Stokes-Gleichung für diesen Fall.

2. Sei R der Radius des Rohres $y = r/R, \alpha^2 = R^2 n/\nu$. Machen Sie den Ansatz

   $$-\frac{\partial p}{\partial x} = Ae^{int},\ u = ve^{int}, \quad A \in \mathbb{C},$$

   und folgern Sie, daß v der Differentialgleichung

   $$\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{dv}{dy} - i\alpha^2 v = -\frac{AR^2}{\nu} \tag{1}$$

   genügt. (Zur Vereinfachung der Notation wurde x_1 durch x und u_1 durch u ersetzt.)

3. Bestimmen Sie $c \in \mathbb{C}$ derart, daß durch die Skalierung $y = cz$ die zu (1) gehörende homogene Differentialgleichung in die Bessel-Differentialgleichung

   $$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dv}{dz} + v = 0$$

   transformierbar ist.

4. Plotten Sie die Fundamental-Lösungen der Bessel-DGL (siehe z. B. Walter, "Gewöhnliche Differentialgleichungen"). Konstruieren Sie mit diesen Lösungen die Lösung von (1) zu den entsprechenden Randbedingungen.

5. Plotten Sie mit den bisherigen Ergebnissen und Informationen eine (nichttriviale) reelle Lösung der nichtstationären Navier-Stokes-Gleichung. (Hierzu wird Mathematica empfohlen.)