Prof. Dr. C. W. Cryer WS 95/96

Mathematatik des Herz-Kreislaufsystems

Übungsblatt 7 , Abgabe: 14.12.95 , 13.00 Uhr

Aufgabe 16:

Transformieren Sie die Navier-Stokes-Gleichungen (NSG)

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \langle u, \nabla_x u\rangle\right) - \mu\Delta_x u + \nabla_x p = f,$$
$$\operatorname{div}_x u = 0,$$

mittels der Skalierungen $u = U_*\overline{u}, p = P_*\overline{p}, x = L_*\overline{x}, t = T_*\overline{t}, f = F_*\overline{f}, U_* = L_*/T_*, F_* = \rho U_*/T_*$, $P_* = U_*^2\rho$, auf ein System dimensionsloser Gleichungen

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{t}} + \langle \overline{u}, \nabla_{\overline{x}}\overline{u}\rangle - \nu\Delta_{\overline{x}}\overline{u} + \nabla_{\overline{x}}\overline{p} = \overline{f},$$
$$\operatorname{div}_{\overline{x}}\overline{u} = 0,$$

mit $\nu^{-1} = \frac{\rho}{\mu}L_*U_*$. Dabei ist $x \in \mathbb{R}^3$ der Ortsvektor, $t \in \mathbb{R}$ die Zeit, $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^3$ der Geschwindigkeitsvektor, $p = p(x,t) \in \mathbb{R}$ der Druck, $\rho \in \mathbb{R}$ die Dichte, $f \in \mathbb{R}^3$ die äußere Kraft pro Volumeneinheit. L_* und T_* sind Referenz-Länge und Zeit, die üblicherweise entsprechend dem Problem festgelegt werden.

Aufgabe 17:

1. Vereinfachen Sie die NSG

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \langle u, \nabla u\rangle - \nu\Delta u + \nabla p = 0$$

für den Fall, daß nur die erste Komponente von u nicht verschwindet und diese außerdem nur von x_2 und x_3 abhängt.

2. Schreiben Sie die vereinfachte NSG in Zylinderkoordination $x_1 = x_1, x_2 = r\cos\varphi, x_3 = r\sin\varphi$. Berechnen Sie damit die Flußgeschwindigkeit in einem zylindrischen Rohr unter der Annahme, daß diese am Rand verschwindet und nur von r abhängt.

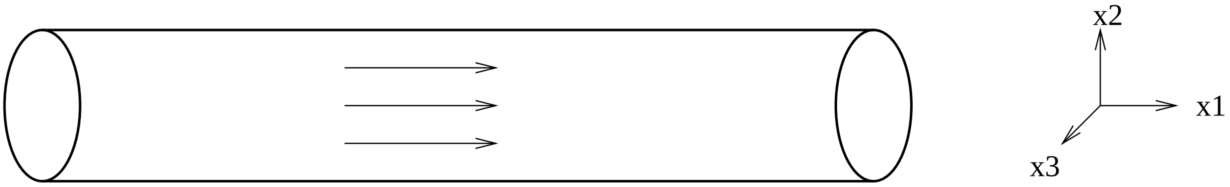

Abbildung 1: Aufgabe 17.

Aufgabe 18:

Blutgefäße könnten wie in Abb. 2 verzweigen. Die einzelnen Teile L_0, L_1, L_2 seien Zylinder mit Radien $a_0 = 1, a_1 = a_2$. Die Verzweigung sei symmetrisch mit einem Winkel θ. Die Endpunkte A, B, D seien fixiert. Leiten Sie ähnlich wie in der Vorlesung a_1 in Abhängigkeit von θ mit der Maßgabe her, daß die Oberfläche der Blutgefäße minimal sein soll.

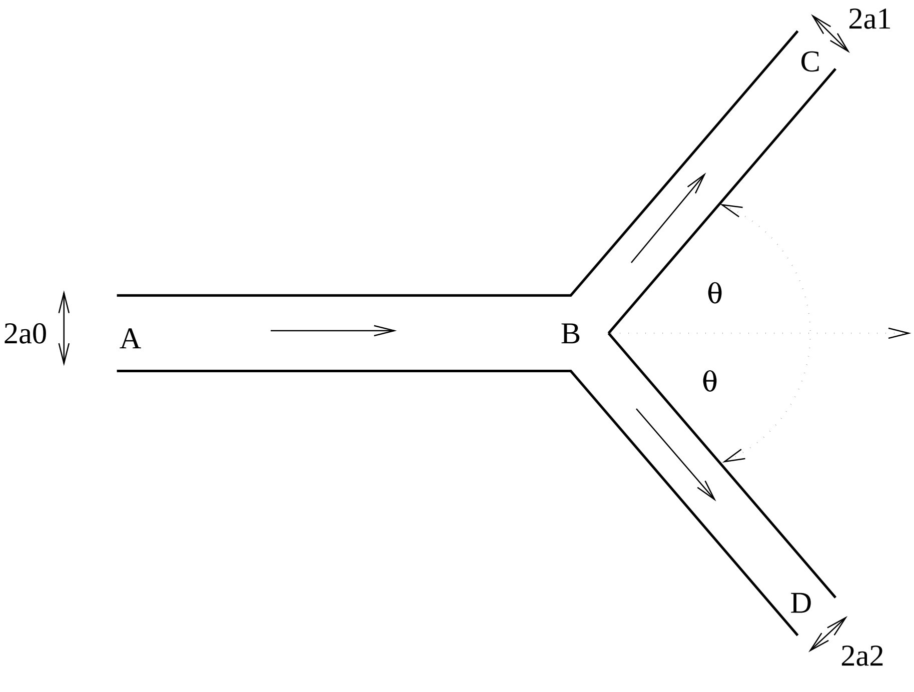

Abbildung 2: Aufgabe 18.