Prof. Dr. C. W. Cryer WS 95/96

Mathematik des Herz-Kreislaufsystems

Übungsblatt 6 , Abgabe: 07.12.95 , 13.00 Uhr

Aufgabe 14:
Es sei durch $\{(x_i, t_j)\}$ mit $x_i = ih, i \in \mathbb{Z}, t_j = jk, j \in \mathbb{N}$ ein Raum-Zeit-Gitter gegeben, $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), g_i := g(x_i)$. $p^\ell_{i,j}$ bezeichne die Wahrscheinlichkeit, daß ein Partikel, welches sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ bei x_ℓ befindet, nach j Zeitschritten bei x_i ankommt, wobei in jedem Zeitschritt Bewegungen des Partikels um eine Ortseinheit nach links oder rechts dieselbe Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ haben. Sei nun

$$h_{i,j} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} p^\ell_{i,j} g_\ell .$$

Zeigen Sie, daß obige Summe endlich ist, und daß $h_{i,j}$ die Lösung des klassischen expliziten Differenzenschemas für die Wärmeleitungsgleichung mit $\lambda = k/h^2 = \frac{1}{2}$ und $h_{i,0} = g_i$ ist.

Aufgabe 15:
Betrachten Sie das RWP

$$\Delta u = 0 \quad \text{auf } \Omega \, , \quad u = g \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega$$

für das Einheitsquadrat $\Omega = (0,1)^2$. Wie üblich wird Ω durch ein Gitter Ω_h diskretisiert, die Randpunkte werden mit $\Gamma_h \subset \Omega_h$ bezeichnet. Eine numerische Lösung u_h kann auf eine sehr einfache (wenn auch langsame) Art folgendermaßen bestimmt werden: Eine Zufallsgröße $F : \Omega_h \backslash \Gamma_h \to \Omega_h$ ordne einem gegebenen inneren Gitterpunkt $P = (i,j)$ einen seiner Nachbarpunkte $(i-1,j), (i+1,j), (i,j-1), (i,j+1)$ "zufällig" zu, die Wahrscheinlichkeit soll jeweils bei 1/4 liegen. Auf diese Weise kann man jedem $P \in \Omega_h$ einen Randpunkt $Q \in \Gamma_h$ zuordnen:

function $Q(P \in \Omega_h)\{$
    while $(P \notin \Gamma_h)$ $P := F(P)$;
    return (P);
$\}$

Es wird also ein “zufälliger” Weg von P zum Rand Γ_h gewählt und der dortige Randpunkt Q zurückgegeben. Sei nun zu $P \in \Omega_h$ und $Q \in \Gamma_h$ $\; p(P,Q)$ die Wahrscheinlichkeit, daß der Weg von P zum Rand gerade nach Q führt. Es gilt: $0 \leq p(P,Q) \leq 1$ und $\sum_{Q\in\Gamma_h} p(P,Q) = 1$. $u_h(P)$ wird nun definiert als

$$u_h(P) := \sum_{Q\in\Gamma_h} p(P,Q)g(Q) \ .$$

1. Zeigen Sie, daß u_h die Fünfpunkteformel erfüllt.

2. Für $n > 0$ sei

$$u_h^{(n)}(P) := \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} g(Q(P)) \ .$$

   Benutzen Sie die Konvergenz $u_h^{(n)}(P) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} u_h(P)$, um das RWP mit $u(x,y) = x^2 - y^2$ numerisch für $N = 10, h = 1/(N+1)$, zu lösen. Bestimmen Sie die asymptotische Fehlerkonstante und die Konvergenzordnung des Verfahrens.