Prof. Dr. C. W. Cryer WS 95/96

Mathematik des Herz-Kreislaufsystems

Übungsblatt 5 , Abgabe: 30.11.95 , 13.00 Uhr

Aufgabe 13:

Margaria (1975) benutzt folgendes hydraulisches Modell zur Beschreibung des Energiehaushaltes im menschlichen Körper bei sportlicher Betätigung: Drei Behälter O (Sauerstoff), P (Phosphagen) und L (Laktat) sind miteinander durch Rohre (R_1, R_2, R_3) verbunden. Ein Hahn reguliert die Geschwindigkeit der Energiezufuhr entsprechend des Bedarfs. Die Kapazität von O wird als unendlich angenommen.

Zu Beginn der Übung (der Hahn ist noch geschlossen) sind alle Behälter bis zum oberen Rand gefüllt. Bei einer leichten Übung (Hahn ist halb geöffnet) fällt der Pegel in P; dadurch wird ein Sauerstoffzufluß durch R_1 verursacht. Ist die Energierate nicht zu hoch, bleibt der Pegel schließlich konstant, und die Übung könnte theoretisch unbegrenzt fortgeführt werden. Wird die Übung nun beendet (Hahn wird geschlossen), füllt sich P durch R_1 wieder auf.

Bei einer sehr anstrengenden Übung (Hahn ist ganz geöffnet) fällt der Pegel in P unterhalb des Pegels in L, und der Fluß durch R_1 ist nun maximal. Laktatbildung durch R_2 entsprechend des Pegelunterschieds $h - 1 - \ell$ setzt ein. Wird die Übung fortgesetzt, ist P bald leer; der Sportler ist erschöpft. Bei Aussetzung der Übung wird P wieder aufgefüllt, durch R_1 bei zunächst maximaler Flußrate, und durch R_2, bis $h - 1 - \ell = 0$. Dann wird P nur durch R_1 aufgefüllt und L sehr langsam durch R_3.

Morton (1985) beschreibt das Modell durch gewöhnliche Differentialgleichung für den Fall, daß der Pegel in P sich schon unterhalb R_1 befindet.

Zunächst ist die Energierate proportional zur Summe der Flüsse aus den drei Behältern:

$$\beta M = \dot{V}_O + \dot{V}_P + \dot{V}_L$$

wobei M = Energierate (Nm/sec), V = Volumen (m^3), $\dot{V}$ = Änderungsrate von $V(m^3/sec)$, β = Konversionsfaktor zwischen M und $\dot{V}(m^2/N)$, $\dot{V}_O = \dot{V}_{O\,max}$ = konstant. Weiter gilt:

$$\dot{V}_P = A_P \frac{dh}{dt}, \quad \dot{V}_L = A_L \frac{d\ell}{dt},$$

wobei A_P, A_L die Schnittflächen der Behälter sind. Außerdem ist $\dot{V}_L$ proportional zur Differenz der Pegel in P und L:

$$\dot{V}_L = \dot{M}_L(h - 1 - \ell),$$

$\dot{M}_L$ eine Konstante, welche die maximale Rate der Laktatproduktion beschreibt.

1. Leiten Sie zunächst folgende Differentialgleichungen für ℓ und h her:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{A_L}{\dot{M}_L}\frac{d^2\ell}{dt^2} + \frac{d\ell}{dt},$$

$$\frac{d^2\ell}{dt^2} + \frac{\dot{M}_L(A_P + A_L)}{A_P A_L}\frac{d\ell}{dt} - \frac{\dot{M}_L(\beta M - \dot{V}_O)}{A_P A_L} = 0$$

2. Es soll versucht werden, die Sauerstoffverbrauchsrate in Abhängigkeit von der Zeit eines 70 kg schweren Sportlers zu bestimmen, der zunächst für eine Dauer von 95 sec mit einer konstanten Rate βM von $2\dot{V}_{O\ max}$ belastet wird und sich anschließend für 80 sec erholt.

   Margaria gibt für diesen Fall die folgenden Parameter an:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{O\ max} &= 46.67\ ml/s \\ A_P &= 823.2\ cm^2, \quad A_L = 3780.0\ cm^2 \\ \dot{M}_L &= 95.67\ ml/s \end{aligned}$$