Prof. Dr. C. W. Cryer WS 95/96

Mathematik des Herz-Kreislaufsystems

Übungsblatt 4 , Abgabe: 23.11.95 , 13.00 Uhr

Aufgabe 10:
Die Körperoberfläche A eines Hundes ist im allgemeinen nicht leicht zu bestimmen. Man versucht daher einen Ansatz, A in Relation zu einfacher zu messenden Größen, wie zum Beispiel Körperlänge L und Volumen V, zu setzen:

$$A = K_1 L^2, \quad A = K_2 V^{2/3}.$$

Leider ist dieser Ansatz nur für "mittlere" Hunde sinnvoll; für besonders dicke Hunde wird etwa die erste Formel eine zu kleine Fläche liefern. Man versucht daher, beide Formeln mittels

$$A = K\ L^a (V^{1/3})^b, \tag{1}$$

- wobei K, a und b noch zu bestimmen sind - miteinander zu kombinieren.

1. Bestimmen Sie b in Abhängigkeit von a derart, daß (1) dimensional korrekt ist.
2. Bestimmen Sie ein vollständiges System $\{\pi_1, \pi_2\}$ dimensionsloser Größen derart, daß sich (1) in der Form $\pi_1 = K\pi_2^a$ schreiben läßt.
3. Messungen an sieben Hunden ergaben die folgenden Werte:

Hund Nr.	1	2	3	4	5	6	7
$L(cm)$	74	98	103	51	100	62	76
$V(cm^3)$	5450	17250	32640	3390	25930	5350	10150
$A(cm^2)$	3815	8104	10763	2320	9106	3284	5070

   Bestimmen Sie daraus mit der Methode der kleinsten Quadrate K und a.

Aufgabe 11:
Gesucht wird eine einfache Formel für die Bewegung von Festlandbewohnern in Abhängigkeit von den Größen l (Beinlänge), s (Spurlänge = Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Fußabdrücken), u (horizontale Geschwindigkeit) und g (Erdbeschleunigung).

1. Zeigen Sie, daß $\pi_1 = s/l$ und $\pi_2 = u^2/gl$ unabhängige dimensionslose Größen sind.
2. Ähnlich wie in Aufgabe 10 wurde aus Meßwerten diverser Tierarten eine Abhängkeit $\pi_1 = K\pi_2^a$ mit $K = 2.3$, $a = 0.3$, ermittelt. Bestimmen Sie daraus die Geschwindigkeiten eines Dinosauriers mit Beinlänge $3m$ und Spurlänge $2,5m$.

Aufgabe 12:
Es soll das Pi-Theorem in mehreren Schritten bewiesen werden:

Es seien $u, W_1, \ldots, W_n$ Variablen, die einer dimensional korrekten Gleichung

$$u = f(W_1, \ldots, W_n) \tag{2}$$

genügen, $L_1, \ldots, L_m$ Basisgrößen. Die Dimensionen der Variablen lassen sich als Produkte von Potenzen der Basisgrößen darstellen:

$$[u] = L_1^{a_1} \cdots L_m^{a_m}, \quad [W_i] = L_1^{b_{1i}} \cdots L_m^{b_{mi}}; \qquad i = 1 \ldots n.$$

Eine Variable Z ist also dimensionslos, wenn $[Z] = 1$. Weiter sei $B = B(W_1, \ldots, W_n) = (b_{ji}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\quad a = a(u) = (a_j) \in \mathbb{R}^m$. Die Aussage des Theorems lautet:

1. (2) ist transformierbar auf eine Gleichung der Form
$$\pi = g(\pi_1, \ldots, \pi_k)$$
mit dimensionslosen Größen $\pi, \pi_1, \ldots, \pi_k$. Diese lassen sich darstellen durch $k+1$ Vektoren $y, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ mittels
$$\pi = uW_1^{y_1} \cdots W_n^{y_n}, \quad \pi_i = W_1^{x_1^{(i)}} \cdots W_n^{x_n^{(i)}}, \quad i = 1 \ldots k$$
wobei die $x^{(i)}$ linear unabhängig sind. Insbesondere gilt also $u = W_1^{-y_1} \cdots W_n^{-y_n} g(\pi_1, \ldots, \pi_k)$.
2. Genauer gilt: $k = n - rang(B)$, $Bx^{(i)} = 0$, $i = 1 \ldots k$, $By = -a$. Umgekehrt läßt sich aus jeder Basis $\{x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}\}$ von Kern(B) und jedem y mit $By = -a$ ein unabhängiges System dimensionsloser Größen wie in 1. konstruieren.

Gehen Sie zum Beweis wie folgt vor:

1. Es sei $\epsilon \in \mathbb{R}$,
$$u^* = e^{\epsilon a_1} u, \quad W_i^* = e^{\epsilon b_{1i}} W_i,$$
dann ist (2) äquivalent zu
$$u^* = f(W_1^*, \ldots, W_n^*).$$
2. Folgern Sie, daß ohne Einschränkung $b_{11} \neq 0$ gilt.
3. Zeigen Sie mit Hilfe von 1., daß die skalierten Variablen
$$\overline{u} = uW_1^{-a_1/b_{11}} \ , \ \overline{W}_{i-1} = W_i W_1^{-b_{1i}/b_{11}} \ , \ i = 2 \ldots n \ , \ \overline{W}_n = W_1$$
einer Gleichung der Form
$$\overline{u} = \overline{f}(\overline{W}_1, \ldots, \overline{W}_{n-1}) \quad \text{genügen}$$
und dimensionslos bezüglich L_1 sind.
4. Folgern Sie durch wiederholte Anwendung von 1. - 3. den ersten Teil der Aussage.
5. Zeigen Sie schließlich den zweiten Teil.