Prof. Dr. C. W. Cryer WS 95/96

Mathematik des Herz-Kreislaufsystems

Übungsblatt 10 , Abgabe: 01.02.96 , 13.00 Uhr

Aufgabe 22:
Es seien $\{x^a\}$ und $\{X^A\}$ zylindrische Koordinatensysteme des $\mathbb{R}^3$, also

$$\begin{array}{rclrclrcl} x^1 &=& r, & x^2 &=& \theta, & x^3 &=& z, \\ X^1 &=& R, & X^2 &=& \Theta, & X^3 &=& Z. \end{array}$$

Betrachten Sie für $\mathcal{B} = \mathbb{R}^3$ eine gleichförmige Drehung im entgegengesetzten Uhrzeigersinn um die Z-Achse

$$\phi_t^1(R,\Theta,Z) = R, \quad \phi_t^2(R,\Theta,Z) = \Theta + 2\pi t, \quad \phi_t^3(R,\Theta,Z) = Z,$$

mit $\phi_t^a = x^a \circ \phi_t$. Berechnen Sie V_t^a, v_t^a, A_t^a und a_t^a.

Aufgabe 23:
Die Bezeichnungen seien wie in Aufgabe 22. Gegeben sei weiter ein kartesisches Koordinatensystem $\{\overline{x}^a\}$ durch

$$\overline{x}^1 = x^1 \cos x^2, \quad \overline{x}^2 = x^1 \sin x^2, \quad \overline{x}^3 = x^3.$$

Berechnen Sie $\overline{V}_t^a, \overline{v}_t^a, \overline{A}_t^a$ und $\overline{a}_t^a$ durch die Koordinatentransformations-Formeln aus der Vorlesung und durch direktes Differenzieren von $\overline{\phi}_t^a$. Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 24:
Es seien $v \in \mathcal{C}^1$ und $w \in \mathcal{C}^0$ Vektorfelder des $\mathbb{R}^3$. Die *kovariante Ableitung von v längs w* ist definiert als

$$\nabla_w v(x) := Dv(x) \cdot w(x).$$

Zeigen Sie: In einem Koordinatensystem $\{x^a\}$ gilt

$$(\nabla_w v)^a = \frac{\partial v^a}{\partial x^b} w^b + \gamma_{bc}^a w^b v^c.$$

(γ_{bc}^a sind die Christoffelsymbole von $\{x^a\}$)