# Probeklausur zur Numerik 1

**Aufgabe 1**

Erläutern Sie den $LR$-Algorithmus mit Pivotsuche. Für welche Matrizen ist dieses Verfahren anwendbar?

**Aufgabe 2**

Sei $f(x)$ eine Funktion mit einer einfachen Nullstelle in $\bar{x}$, also $f(\bar{x}) = 0$ und $f'(\bar{x}) = 0$. Zeigen Sie, dass die lokale Konvergenzordnung des modifizierten Newton-Verfahrens

$$g = x - r(x) + \frac{r''(x)[r(x)]^2}{2r'(x)} \qquad r(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

mindestens drei ist.

**Aufgabe 3**

Durch die Messwerte

| $t_i$ | 0 | 1 | 4 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 2 | 3 | 4 | 6 |

soll eine Ausgleichsfunktion $u(t) = \alpha + \beta\sqrt{t}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelegt werden. Formulieren Sie das lineare Ausgleichsproblem zur Bestimmung optimaler Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und berechnen Sie diese.

**Aufgabe 4**

(a) Gegeben seien die Stützpunkte

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $t_i$ | $-2$ | 0 | 2 | 3 |
| $f_i$ | $-24$ | 12 | $-8$ | 6 |

Berechnen Sie die Koeffizienten des Interpolationspolynoms $p(x) \in \prod_3$ in der Newton'schen dividierten Differenzen Darstellung.

(b) Berechnen Sie $p(1)$ nach dem *NEVILLE*-Schema.

(c) Bestimmen Sie $p(x)$ mit der Formel von Lagrange.

**Aufgabe 5**

Für

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3.5 \end{pmatrix}.$$

ist $x = (0, 1, 0.5)^T$ die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Die Inverse der Matrix $A$ ist

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Betrachten Sie das gestörte Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Wie groß darf der Fehler $||\tilde{b} - b||_\infty$ sein, damit der absolute Fehler in $\tilde{x}$ kleiner als 0.035 ist?

(b) Wie groß darf die Störung in $A$ sein, damit der relative Fehler in $x$ kleiner als $7 \cdot 10^{-1}$ ist, wenn der Vektor $b$ ungestört ist?

**Aufgabe 6**

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die $LR$-Zerlegung von $A$ mit Spaltenpivotisierung.

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der berechneten $LR$-Zerlegung.

**Aufgabe 7**

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} x_1 x_2 + c x_2 - 1 \\ x_1^2 - x_2 + 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche $c \in \mathbb{R}^+$ sind die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes auf der Menge $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$ erfüllt?

(b) Berechnen Sie für $c = 1$ die erste Iterierte $x^1 = (x_1^1, x_2^1)^T = g(x^0)$ mit $x^0 = (0, 0)^T$. Wie viele Schritte der Fixpunktiteration

$$x^{k+1} = g(x^k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

sind erforderlich, um den Fixpunkt mit einer Genauigkeit von $10^{-3}$ zu bestimmen?